ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ի. Ի. ՊՐԻՎԱԼՈՎ

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

Թույլատրված է ՌՍՖՍՀ բարձրագույն և միջնակարգ մասնագիտական կրթության մինիստրության կողմից որպես դասագիրք բարձրագույն տեխնիկական ուսումնական հաստատությունների համար

Վերահրատարակություն

ԵՐԵՎԱՆԻ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ—1970

Թարգմանված է ռուսերեն 27-րդ հրատարակությունից, համեմատված է 29-րդ հրատարակության հետ և կատարված են համապատասխան փոփոխություններ։

Թարգմանիչ՝ Վ. Վ. ՍԱՂԱԹԵԼՅԱՆ

ИВАН ИВАНОВИЧ ПРИВАЛОВ

2—2—3 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

(На армянском языке, перевод с русского)
Издательство Ереванского университета
ЕРЕВАН—1970

ՀԵՂԻՆԱԿԻ ԱՌԱՋԱԲԱՆԸ
ՏԱՍՆԵՐԵՔԵՐՈՐԴ ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅԱՆ ԱՌԹԻՎ

Իմ «Անալիտիկ երկրաչափություն» գրքի ներկա հրատարակության մեջ վերամշակման է ենթարկված նախորդ հրատարակության նյութը։ Այդ մեթոդական աշխատանքը կատարելով, ես ձգտել եմ վերացնել դասընթացի մի քանի հարցերը սովորողների կողմից ըմբռնելու դժվարությունները, որոնք դասավանդման ընթացքում նկատել են բուհերի մի շարք դասախոսներ։ Խորին շնորհակալություն եմ հայտնում բոլոր նրանց, ովքեր ուղարկել են իրենց դիտողությունները։ Առանձնապես արժեքավոր ցուցումներ եմ ստացել դոցենտ Վ. Պ. Մինորսկուց, որին սրտագին շնորհակալություն եմ հայտնում։

Ի. ՊՐԻՎԱԼՈՎ

ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅԱՆ ԿՈՂՄԻՑ

Սույն գրքի 18-րդ հրատարակությունը խմբագրելիս հաշվի են առնվել այն դիտողությունները, որոնք արվել են Մոսկվայի մաթեմատիկական ընկերության բարձրագույն տեխնիկական ուսումնական հաստատությունների սեկցիայում նախորդ հրատարակությունները քննարկելիս: Վերամշակման շնորհիվ գիրքն ընդունեց այն տեսքը, որը պահպանվել է մինչև սույն հրատարակությունը:

27-րդ հրատարակության ժամանակ որոշ կրճատումներ են կատարվել: Այն կապակցությամբ, որ երկրորդ կարգի կորերի ընդհանուր տեսությունը բարձրագույն տեխնիկական ուսումնական հաստատությունների ծրագրերի մեջ չի մտնում՝ լրիվ հանված է առաջին մասի VII *գլուխը, ինչպես նաև* V *գլխի* § *5-ը և* § *7-ը: Երկրորդ կարգի կորերի ձևափոխության տարրական հարցերը, որոնք առաջ մտնում էին* VII *գլխի,* §§ *1-4 մեջ, այժմ կազմում են* V *գլխի* § *6-ը և* § *7-ը. այդ նույն գլխի* § *6-ն այժմ դարձել է* § *5: Նախկին* VII *գլխի № 9 խնդիրը տեղափոխված է* V *գլխի խնդիրների մեջ և այժմ այնտեղ ունի 19-րդ համարը:*

Բարձրագույն տեխնիկական ուսումնական հաստատությունների ծրագրերի մեջ չմտնող ամբողջ նյութը շարված է մանրատառով: Մանրատառով են շարված նաև ուղիղի և հարթության հավասարումների այն արտածումները (երկրորդ մասի IV-V *գլուխներում), որոնց ժամանակ վեկտորական հանրահաշիվը չի օգտագործված:*

Գիրքը ինչպես 18-րդ, այնպես էլ 27-րդ հրատարակության նախապատրաստելու ամբողջ աշխատանքը կատարել են Ե. Ե. Բրենկը, Ն. Ա. Օլիսովը և Ն. Յա. Սիսոևան: 18-րդ հրատարակության համար կատարված աշխատանքին հսկել է Պ. Կ. Ռաշևսկին. 27-րդ հրատարակությունը նախապատրաստելու աշխատանքին մասնակցել է նաև Ի. Գ. Արամանովիչը:

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Անալիտիկ երկրաչափության առարկան՝ երկրաչափական ձևերի հետազոտումն է հանրահաշվական անալիզի օգնությամբ: Տարրական մաթեմատիկայի զանազան բաժիններում հանրահաշիվը կիրառվում է երկրաչափական շատ խնդիրներ լուծելիս: Այսպես, օրինակ, երկրաչափության մեջ կարիք է լինում թվերի օգնությամբ որոշել հատվածների և աղեղների երկարությունները, որոշ պատկերների մակերեսները, մարմինների ծավալները, եռանկյունաչափության մեջ թվային առնչություններից օգտվում են հատվածների հարաբերությունների և անկյունների միջև կախումներ ստանալու համար: Սակայն, եթե մաթեմատիկայի այդ բաժիններում հանրահաշվի օգնությամբ լուծվում է երկրաչափական ձևերի չափերի հարցը, անալիտիկ երկրաչափության մեջ թվերի օգնությամբ բնորոշվում է նրանց ամենաէական առանձնահատկությունը՝ նրանց դիրքը:

Երկրաչափական ձևի դիրքը որոշող թվերը կոչվում են նրա կոորդինատներ: Իսկ այն եղանակը, որի օգնությամբ որոշվում է երկրաչափական ձևի դիրքը, կոորդինատների եղանակ կամ կոորդինատների մեթոդ անունն է կրում: Երկրաչափական ձևերը շատ բազմազան են և, անալիտիկ երկրաչափությունը կառուցելիս բնականաբար, մենք պետք է այդ ձևերից որևէ մեկն ընդունենք որպես սկզբնային և նրա օգնությամբ կազմենք մյուս բոլոր ձևերը: Ամենից պարզը կլինի որպես այդպիսի սկզբնային ձև ընդունել երկրաչափական կետը: Այդ դեպքում երկրաչափական ամեն մի այլ ձև, օրինակ՝ գիծը կամ մակերևույթը, կարելի է դիտարկել որպես կետերի երկրաչափական տեղ:

Որպես սկզբնային էլեմենտ ընդունելով կետը, մենք ամենից առաջ պետք է ցույց տանք, թե տարածության մեջ կետի դիրքն ինչպես է որոշվում թվերի օգնությամբ: Կոորդինատների մեթոդի այս առաջին գաղափարն է, որ դրվել է երկրաչափական զանազան խնդիրների լուծման հիմքում։ Այդ մեթոդի երկրորդ գաղափարն է՝ ցույց տալ, թե գծի երկրաչափական հատկությունները ինչպես են անդրադառնում այդ գծին պատկանող կետերի կոորդինատների վրա։ Կոորդինատների մեթոդի բեղմնավոր գաղափարները կիրառություն են գտել մաթեմատիկայի ու մեխանիկայի բոլոր բնագավառներում, դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի զարգացման շնորհիվ նրանք դարձել են մաթեմատիկական հետազոտության հզորագույն զենք։

Անալիտիկ երկրաչափության շարադրմանն անցնելով, մենք, հարմարության համար, ամբողջ դասընթացը երկու մասի ենք բաժանում։ Առաջին մասում կզբաղվենք երկրաչափական հարթ ձևերի հետազոտությամբ՝ հանրահաշվական միջոցներով, որոնք հիմնված են կոորդինատների կիրառման վրա։ Երկրորդ մասում մենք նույնը կկատարենք երկրաչափական տարածական ձևերի նկատմամբ։

Դասընթացի մեջ օժանդակ դեր ունի 2-րդ և 3-րդ կարգի դետերմինանտների տեսությանը նվիրված գլուխը։ Այդ գլուխը, ինչպես և նրա հետագա կիրառումները, կարելի է բաց թողնել։

Երկրաչափական առավելագույն դիտողականության նպատակով հարթության և ուղիղի (տարածության մեջ) հիմնական հավասարումները տրված են վեկտորական տեսքով։ Այդ կապակցությամբ էլ մտցված է հատուկ գլուխ, որտեղ շարադրված են անհրաժեշտ տեղեկություններ վեկտորական հանրահաշվից։ Սակայն, հաշվի առնելով այն բուհերի կարիքները, որտեղ անալիտիկ երկրաչափությունն ուսումնասիրելիս վեկտորական հանրահաշիվ չեն անցնում, հարթության և ուղիղի տեսության վեկտորական շարադրմանը զուգընթաց մենք տալիս ենք նաև նրա կոորդինատային շարադրանքը։

ԱՌԱՋԻՆ ՄԱՍ

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԸ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

ԳԼՈՒԽ I

ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ

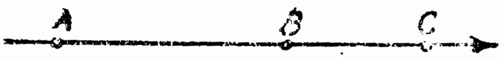
§ 1. **Ուղղությամբ օժտված հատվածներ:** Հատվածի և նրա երկարության գաղափարները հայտնի են տարրական երկրաչափությունից: Հատվածը ուղիղի՝ երկու կետերով սահմանափակված մասն է: Հատվածի երկարությունը մի թիվ է, որն ստացվում է այդ հատվածը չափելով նախապես ընտրված մի որոշ հատվածի՝ մասշտաբի միավորի օգնությամբ: A և B կետերով սահմանափակված հատվածը, ինչպես և նրա երկարությունը նշանակում են AB կամ BA:

Մաթեմատիկայի ու ֆիզիկայի շատ հարցերում նշանակություն ունի հատվածի ուղղությունը. օրինակ՝ երբ հատվածը դիտվում է որպես շարժվող կետի անցած ճանապարհ:

Հատվածի ուղղությունը ընորոշելու համար, հատվածը սահմանափակող երկու կետերից մեկն ընդունում են որպես հատվածի սկիզբ, մյուսը՝ որպես ծայր. հատվածի ուղղություն համարում են նրա սկզբից դեպի ծայրը գնացող ուղղությունը: Այն հատվածը, որի վրա նշված է ուղղությունը (այսինքն՝ ասված է, թե երկու ծայրակետերից որն է սկիզբ համարվում և որը՝ ծայր), կոչվում է ուղղությամբ օժտված հատված:

Պայմանավորվենք ուղղությամբ օժտված հատվածը նշանակել երկու տառով՝ նրանց գլխին գրված գծիկով, առաջ գրելով հատվածի սկիզբը նշանակող տառը: Այսպես, օրինակ, այն հատվածը, որի համար A կետը սկիզբ է, իսկ B կետը ծայր, կնշանակենք $\overline{AB}$: Նկատենք, որ ուղղությամբ օժտված $\overline{AB}$ և $\overline{BA}$ հատվածները նույնը չեն, քանի որ նրանք ունեն հակադիր ուղղություններ:

Եթե դիտարկենք մեկ ուղիղի վրա գտնվող ուղղությամբ օժտված հատվածները, ապա նրանց ուղղությունները կարելի է բնորոշել + և — նշաններով: Դրա համար այդ ուղիղի երկու հակադիր ուղղություններից մեկը (միևնույն է, թե որը) կանվանենք դրական ուղղություն, մյուսը՝ բացասական: Գծագրի վրա դրական ուղղությունը պայմանավորվենք նշել սլաքով (գծ. 1-ում ձախից աջ ուղղությունն է դրական ընդունված): Այն ուղիղը, որի վրա ընտրված է դրական ուղղություն, կոչվում է առանցք:



Գծ. 1

Առանցքի վրա գտնվող ուղղությամբ օժտված հատվածի երկարությունը՝ վերցրած որոշակի նշանով, կոչվում է առանցքի՝ ուղղությամբ օժտված հատվածի մեծություն. այդ դեպքում նշանը դրական է դրվում, եթե հատվածի ուղղությունը համընկնում է առանցքի դրական ուղղության հետ, և՝ բացասական, եթե հատվածի ուղղությունը հակադիր է առանցքի դրական ուղղությանը[1]: Այսպես, օրինակ՝ գծ. 1-ում պատկերված $\overline{AC}$ հատվածի մեծությունը դրական է, իսկ $\overline{CB}$ հատվածինը՝ բացասական: Ակներևորեն ուղղությամբ օժտված հատվածի երկարությունը հավասար է նրա մեծության մոդուլին[2]: Պայմանավորվենք ուղղությամբ օժտված $\overline{AB}$ հատվածի երկարությունը նշանակել AB, իսկ մեծությունը՝ մեծ $\overline{AB}$:

Առանցքի՝ ուղղությամբ օժտված հատվածի մեծության սահմանումից հետևում է, որ $\overline{AB}$ և $\overline{BA}$ հատվածների մեծությունները միմյանցից տարբերվում են նշանով՝

$$\text{մեծ}\ \overline{AB} = -\,\text{մեծ}\ \overline{BA}:$$

Դիտողություն: Հետագայում հարկ է լինելու դիտարկել նաև ուղղությամբ օժտված այնպիսի «հատված», որի սկիզբն ու վերջը համընկնում են: Այդպիսի հատվածի ուղղությունը կարելի

[1] «Առանցքի՝ ուղղությամբ օժտված հատվածի մեծություն» տերմինը գործածելն իմաստ ունի միայն այն դեպքում, երբ դիտարկվում է առանցքի վրա գտնվող ուղղությամբ օժտված հատված: Սակայն հետագայում, կարճության համար ուղղությամբ օժտված հատվածի մեծության մասին խոսելիս «առանցքի» բառը բաց ենք թողնելու: Ճիշտ այդպես էլ, կարճության համար, մենք հաճախ ասելու ենք «AB հատված», փոխանակ ասելու «ուղղությամբ օժտված AB հատված»:

[2] Թվի բացարձակ մեծությունն անվանում են նաև մոդուլ. a թվի մոդուլը նշանակելու ենք |a|:

է ցանկացած ձևով ընտրել։ Նրա երկարությունը, հետևաբար նաև մեծությունը հավասար է զրոյի։ Այդպիսի հատվածները կանվանենք զրոյական հատվածներ կամ զրո հատվածներ։

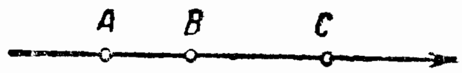
Մի որոշ առանցքի վրա վերցնենք երեք կետ՝ A, B, C և պարզենք, թե ինչի հավասար կլինի $\overline{AB}$ և $\overline{BC}$ հատվածների մեծությունների գումարը։ Մենք հիմա ցույց կտանք, որ առանցքի վրա A, B և C կետերի ցանկացած դասավորության դեպքում $\overline{AB}$ և $\overline{BC}$ հատվածների մեծությունների գումարը հավասար է $\overline{AC}$ հատվածի մեծությանը՝

$$\text{մեծ}\,\overline{AB} + \text{մեծ}\,\overline{BC} = \text{մեծ}\,\overline{AC}, \qquad (1)$$

այսինքն՝ եթե $\overline{AB}$ և $\overline{BC}$ հատվածներն առանցքի վրա այնպես են դասավորված, որ նրանցից առաջինի ծայրը երկրորդի համար սկիզբ է հանդիսանում, ապա նրանց մեծությունների գումարը հավասար է այն $\overline{AC}$ հատվածի մեծությանը, որի սկիզբն առաջին հատվածի սկիզբն է, ծայրը՝ երկրորդ հատվածի ծայրը։

(1) հավասարությունն ապացուցելու համար նախ ենթադրենք, թե B կետը գտնվում է A և C կետերի միջև (գծ. 2)։

Հատվածը դիտարկելով որպես շարժվող կետի անցած ճանապարհ, կարող ենք ասել, որ այս դեպքում շարժվող կետը, անցնելով $\overline{AB}$ ճանապարհը, շարժումը շարունակում է $\overline{BC}$ ճանապարհով՝ նույն ուղղությամբ։ Այդ ժամանակ $\overline{AC}$ հատվածի երկարությունն ակներևորեն հավասար կլինի $\overline{AB}$ և $\overline{BC}$ հատվածների երկարությունների գումարին, իսկ բոլոր երեք հատվածների մեծությունները կունենան նույն նշանը, քանի որ երեք հատվածներն էլ ուղղված են դեպի միևնույն կողմը։ Հետևաբար՝



Գծ. 2

$$\text{մեծ}\,\overline{AB} + \text{մեծ}\,\overline{BC} = \text{մեծ}\,\overline{AC}։$$

Այսպիսով, եթե B կետը գտնվում է $\overline{AC}$ հատվածի վրա, ապա (1) հավասարությունն իրավացի է։

Այժմ ենթադրենք, թե B կետը գտնվում է $\overline{AC}$ հատվածից դուրս՝ կամ հատվածի շարունակության վրա C կետից այն կողմը (գծ. 3), կամ էլ նրա շարունակության վրա A կետից այն կողմը (գծ. 4)։ Երկու դեպքում էլ շարժվող կետը, $\overline{AB}$ ճանապարհն անցնելով, շարժումը շարունակում է $\overline{BC}$ ճանապարհով՝ հակադիր ուղղությամբ։ Պարզ է, որ այժմ $\overline{AC}$ հատվածի երկարությունը հավասար կլինի $\overline{AB}$ և $\overline{BC}$ հատվածների երկարությունների տարբերությանը [կամ՝ $AC = AB - BC$ (*գծ. 3*), կամ՝ $AC = BC - AC$ (*գծ. 4*)]։

Գծ. 3

Գծ. 4

Ակներև է, որ $\overline{AC}$ հատվածի ուղղությունը կհամընկնի $\overline{AB}$ և $\overline{BC}$ հատվածներից այն հատվածի ուղղության հետ, որն ավելի մեծ երկարություն ունի (*գծ. 3*-ում՝ $\overline{AB}$ հատվածի ուղղության հետ, *գծ. 4*-ում՝ $\overline{BC}$ հատվածի ուղղության հետ)։ Այդ պատճառով, $\overline{AC}$ հատվածի մեծությունը կունենա այն նշանը, ինչ՝ որ երկար հատվածի մեծությունը։

Հետևաբար, $\overline{AC}$ հատվածի մեծությունը կարելի է գտնել մեծ $\overline{AB}$ և մեծ $\overline{BC}$ հարաբերական թվերի գումարման կանոնով։

Այսպիսով, $\overline{AC}$ հատվածից դուրս B կետի ցանկացած դասավորության դեպքում ևս կունենանք՝

$$\text{մեծ}\,\overline{AB} + \text{մեծ}\,\overline{BC} = \text{մեծ}\,\overline{AC}։$$

Մնում է նկատել, որ (1) հավասարությունը ճիշտ կլինի նաև այն դեպքում, երբ երեք կետերից որևէ երկուսը համընկնեն։ Ընթերցողն ինքը հեշտությամբ կարող է ստուգել այդ։ Օրինակ, եթե համընկնեն A և C կետերը, ապա կունենանք՝

$$\text{մեծ}\,\overline{AB} + \text{մեծ}\,\overline{BC} = \text{մեծ}\,\overline{AB} + \text{մեծ}\,\overline{BA} = 0,$$

բայց նաև՝ մեծ $\overline{AC} = 0$։ Հետևաբար, (1) հավասարությունը ճիշտ կլինի։

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն։ Եթե (1) հավասարության մեջ գրված լինեին հատվածների ոչ թե մեծությունները, այլ երկարությունները, ապա այն ճիշտ կլիներ միայն այն դեպքում, երբ B կետը գտնվեր $\overline{AC}$ հատվածի վրա, և իր ուժը կկորցներ B կետի ամեն մի այլ դասավորության դեպքում։

Օգտվելով (1) հավասարությունից, հեշտ է ցույց տալ, որ առանցքի վրա ցանկացած թվով և ցանկացած դասավորությամբ վերցրած՝ A, B_1, B_2 . . ., B_n, C կետերի համար կունենանք՝

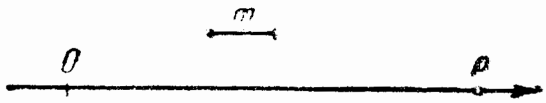
$$\text{մեծ}\,\overline{AB_1} + \text{մեծ}\,\overline{B_1B_2} + \ldots + \text{մեծ}\,\overline{B_nC} = \text{մեծ}\,\overline{AC}, \qquad (1')$$

այսինքն՝ եթե առանցքի վրա յուրաքանչյուր հաջորդ հատվածի սկիզբը համընկնում է նախորդի ծայրի հետ, ապա նրանց մեծությունների գումարը հավասար է այն հատվածի մեծությանը, որի սկիզբը համընկնում է առաջին հատվածի սկզբի հետ, ծայրը՝ վերջին հատվածի ծայրի հետ:

§ 2. **Կոորդինատները ուղիղ գծի վրա:** Տեսնենք, թե կետի դիրքն ինչպե՞ս կարելի է որոշել ուղիղ գծի վրա:

Այդ ուղիղի վրա վերցնենք մի O կամայական կետ (լատիներեն origo=սկիզբ բառից), որի նկատմամբ պետք է որոշենք ուղիղի բոլոր կետերի դիրքը: Պարզ է, որ ուղիղ գծի յուրաքանչյուր P կետի դիրքը լրիվին կորոշվի $\overline{OP}$ ուղղությամբ օժտված հատվածով. ուղիղի յուրաքանչյուր կետին համապատասխանում է ուղղությամբ օժտված մի որոշակի հատված, որի սկիզբն O կետումն է, ծայրը՝ տված P կետում և, հակադարձաբար, ուղղությամբ օժտված յուրաքանչյուր հատվածին, որի սկիզբը համընկնում է O կետի հետ, համապատասխանում է մեկ որոշակի P կետ՝ այդ հատվածի ծայրը:

Այժմ ուղիղի վրա ընտրենք դրական ուղղություն և մասշտաբի m միավոր (գծ. 5-ում դրական ուղղությունն ընտրված է ձախից դեպի աջ): Այդ դեպքում, ուղիղ գծի յուրաքանչյուր P կետի դիրքը կորոշվի մի թվով՝ $\overline{OP}$ հատվածի մեծությամբ: Կետի դիրքը որոշող այդ թիվը կոչվում է այդ կետի կոորդինատ: Այսպիսով, $\overline{OP}$ ուղղությամբ օժտված հատվածի մեծությունը՝ ուղիղ գծի P կետի կոորդինատն է: P կետի կոորդինատը նշանակելով x տառով. կունենանք՝



Գծ. 5

$$x = \text{մեծ}\ \overline{OP}:$$

Գիտենալով P կետը, հեշտ է գտնել նրա կոորդինատը. այն հավասար է $\overline{OP}$ ուղղությամբ օժտված հատվածի մեծությանը: Հակադարձաբար, տված x կոորդինատով կարելի է կառուցել միակ կետ՝ այն կլինի x մեծությունն ունեցող $\overline{OP}$ ուղղությամբ օժտված հատվածի P ծայրը:

Եթե ուղիղ գծի վրա նշված է մի որոշ O կետ, ցույց է տրված դրական ուղղությունը և, բացի այդ, ընտրված է մասշտաբի միավոր, այդ դեպքում մենք կասենք, որ ուղիղի վրա սահմանված է կոորդինատների սիստեմ: O կետը, որը դիտարկվող հատվածների սկիզբն է, կոչվում է կոորդինատների սկիզբ կամ կոորդինատների սկզբնակետ, իսկ տված ուղիղը՝ կոորդինատների առանցք կամ կոորդինատային առանցք: Ակներևորեն, դրական կիսաառանցքի կետերն ունեն դրական կոորդինատներ (գծ. 5-ում O-ից դեպի աջ գտնվող կետերը), բացասական կիսաառանցքի կետերը՝ բացասական կոորդինատներ, իսկ O սկզբնակետի կոորդինատը հավասար է զրոյի:

Պայմանավորվենք կետի կոորդինատը գրել այդ կետը նշանակող տառի աջ կողմում, փակագծերի մեջ՝ $P(x)$:

§ 3. Երկու կետերի հեռավորությունն ուղիղ գծի վրա: Դիցուք կոորդինատների մի որոշ սիստեմում տրված են երկու կետեր՝ $A(x_1)$ և $B(x_2)$: Տեսնենք, թե այդ երկու կետերի AB հեռավորությունն ինչպե՞ս կարտահայտվի նրանց կոորդինատների միջոցով:

(1) հավասարության համաձայն, կարող ենք գրել՝

$$\text{մեծ}\,\overline{OA}+\text{մեծ}\,\overline{AB}=\text{մեծ}\,\overline{OB},$$

որտեղից՝

$$\text{մեծ}\,\overline{AB}=\text{մեծ}\,\overline{OB}-\text{մեծ}\,\overline{OA}:$$

Քանի որ մեծ $\overline{OA}=x_1$ և մեծ $\overline{OB}=x_2$, ապա՝

$$\text{մեծ}\,\overline{AB}=x_2-x_1:$$

Այսպիսով, առանցքի ուղղությամբ օժտված հատվածի մեծությունն ստանալու համար, պետք է նրա ծայրի կոորդինատից հանել սկզբի կոորդինատը:

A և B կետերի հեռավորությունը հավասար է $\overline{AB}$ հատվածի երկարությանը: Հետևաբար՝

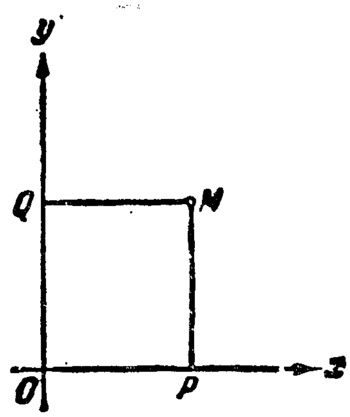
$$AB=|x_2-x_1|,$$

այսինքն՝ երկու կետերի հեռավորությունը հավասար է այդ կետերի կոորդինատների տարբերության բացարձակ մեծությանը:

Օրինակ, եթե տրված են $A(5)$ և $B(-3)$ կետերը, ապա մեծ $AB=-3-5=-8$, իսկ նրանց հեռավորությունը՝ $AB=8$:

§ 4. Ուղղանկյուն կոորդինատները հարթության վրա: Այժմ սահմանենք հարթության վրա կոորդինատների մեթոդի գաղափարը, այսինքն՝ ցույց տանք այն եղանակը, որը հնարավորություն է տալիս թվերի օգնությամբ որոշելու հարթության կետերի դիրքը:

Վերցնենք երկու փոխուղղահայաց ուղիղներ և



Գծ. 6

յուրաքանչյուրի վրա ընտրենք դրական ուղղություն։ Այդ ուղիղները, որոնց նկատմամբ պետք է որոշենք հարթության կետերի դիրքը, կոչվում են կոորդինատների (կամ կոորդինատային) առանցքներ։ Կոորդինատների առանցքները սովորաբար դասավորվում են այնպես, ինչպես ցույց է արված գծ. 6-ում. մեկը՝ հորիզոնական, որի վրա դրական ուղղությունն ընտրում ենք ձախից դեպի աջ, մյուսը՝ ուղղաձիգ, որի վրա դրական ուղղությունը ընտրում ենք ներքևից վերև։ Դրանցից մեկը (սովորաբար հորիզոնականը) անվանում են աբսցիսների առանցք (Ox առանցք), մյուսը՝ օրդինատների առանցք (Oy առանցք)։ Կոորդինատային առանցքների հատման կետը կոչվում է կոորդինատների սկզբնակետ (գծ. 6-ում կոորդինատների սկզբնակետը նշանակված է O տառով)։ Վերջապես, ընտրենք մասշտաբի միավոր (մենք միշտ ենթադրելու ենք, որ կոորդինատային երկու առանցքների վրա էլ մասշտաբի միևնույն միավորն է ընտրված)։

Այժմ հարթության ցանկացած կետի դիրքը կարելի է որոշել թվերով՝ այդ կետի կոորդինատներով։ Իրոք, հարթության յուրաքանչյուր M կետին կոորդինատային առանցքների վրա համապատասխանում են երկու կետեր՝ P և Q, որոնք նրա պրոյեկցիաներն[1] են այդ առանցքների վրա (գծ. 6) և, հակադարձաբար, գիտենալով կոորդինատային առանցքների վրա P և Q կետերը, կարելի է հարթության վրա կառուցել M միակ կետը, որի համար P-ն և Q-ն պրոյեկցիաներ են այդ առանցքների վրա։ Այսպիսով, հարթության M կետի դիրքը որոշելը հանգում է կոորդինատային առանցքների վրա P և Q պրոյեկցիաների դիրքերը որոշելուն։

Բայց մենք արդեն գիտենք, որ առանցքի վրա կետի դիրքը լիովին որոշվում է նրա կոորդինատով։ Դիցուք x-ը P կետի կոորդինատն է աբսցիսների առանցքի վրա ($x=$ մեծ$\overline{OP}$), իսկ y-ը՝ Q կետի կոորդինատն օրդինատների առանցքի վրա ($y=$ մեծ$\overline{OQ}$)։ x և y թվերը լիովին որոշում են M կետի դիրքը հարթության վրա և կոչվում են այդ կետի կոորդինատներ, x-ը՝ աբսցիս, y-ը՝ օրդինատ։

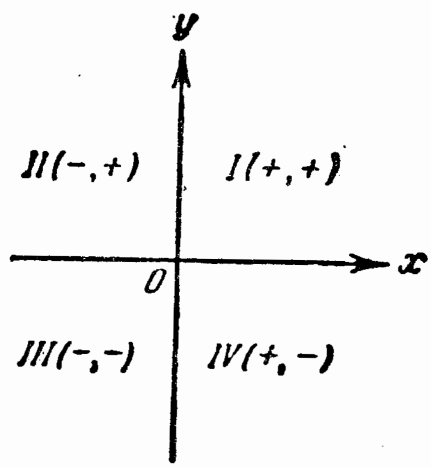
[1] M կետի պրոյեկցիա առանցքի վրա կոչվում է M կետից այդ առանցքին իջեցրած ուղղահայացի հիմքը։

Այսպիսով, կետի աբսցիս կոչվում է Ox առանցքի այն հատվածի մեծությունը, որի սկիզբը կոորդինատների սկզբնակետն է, ծայրը՝ կետի պրոյեկցիան աբսցիսների առանցքի վրա. կետի օրդինատ կոչվում է Oy առանցքի այն հատվածի մեծությունը, որի սկիզբը կոորդինատների սկզբնակետն է, ծայրը՝ կետի պրոյեկցիան օրդինատների առանցքի վրա:

Ուրեմն հարթության ցանկացած կետի դիրքը լիովին որոշվում է x *և* y *թվերի զույգով, որոնցից առաջինը կետի աբսցիսն է, երկրորդը՝ օրդինատը:*

Կետի կոորդինատները պայմանավորվենք գրել կետը նշանակող տառի աջ կողմը՝ փակագծերի մեջ, առաջ գրելով աբսցիսը, ապա՝ օրդինատը, անջատելով իրարից ստորակետով՝ M(x,y): Կոորդինատային առանցքների՝ գծ. 6-ում ցույց տրված դասավորության դեպքում օրդինատների Oy առանցքից դեպի աջ գտնվող կիսահարթության բոլոր կետերի x աբսցիսները դրական կլինեն, դեպի ձախ գտնվող կիսահարթության կետերինը՝ բացասական: Oy առանցքի վրա գտնվող կետերի համար աբսցիսը հավասար է զրոյի: Ճիշտ այդպես էլ, աբսցիսների Ox առանցքից վերև գտնվող կետերի y օրդինատները դրական կլինեն, դեպի ներքև գտնվողներինը՝ բացասական: Ox առանցքի վրա գտնվող կետերի համար օրդինատը հավասար է զրոյի: Կոորդինատների սկզբնակետն ունի (0,0) կոորդինատներ:

Կոորդինատային առանցքները հարթությունը տրոհում են չորս մասի, որոնք կոչվում են քառորդներ կամ կվադրանտներ (երբեմն անվանում են նաև կոորդինատային անկյուններ): Հարթության այն մասը, որը գտնվում է Ox և Oy դրական կիսաառանցքների միջև, կոչվում է առաջին քառորդ: Այնուհետև քառորդների համարակալումը կատարվում է ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ (գծ. 7): Առաջին քառորդի բոլոր կետերի համար $x>0$, $y>0$. II քառորդի կետերի համար $x<0$, $y>0$. III քառորդի կետերի համար $x<0$, $y<0$. IV քառորդի կետե-համար՝ $x>0$, $y<0$:



գծ. 7

Հարթության կետի դիրքը որոշելու համար այստեղ օգտագործված կոորդինատները կոչվում են ուղղանկյուն կոորդինատներ, քանի որ հարթության M կետն ստացվում է ուղիղ *անկյան տակ միմյանց հանդիպող* PM *և* QM *ուղիղների համա-մամբ (գծ. 6), ինչպես նաև՝* դեկարտյան կոորդինատներ—*մա-թեմատիկոս և փիլիսոփա Դեկարտի անունով, որը 1637 թվակա-նին հրապարակել է անալիտիկ երկրաչափության վերաբերյալ ա-ռաջին աշխատությունը:*

Կոորդինատների դեկարտյան ուղղանկյուն սիստեմը կոորդի-նատների միակ սիստեմը չէ, որ հնարավորություն է տալիս որո-շելու հարթության կետերի դիրքերը (տե՛ս սույն գլխի § 11-ը), սակայն նա պարզագույն սիստեմն է, և մենք հետագայում առա-վելապես նրանից ենք օգտվելու:

Կոորդինատների նկարագրված մեթոդից բխում են հետևյալ երկու հիմնական խնդիրների լուծումները.

Խ ն դ ի ր I. Տրված M կետով գտնել նրա կոորդինատները:

Տված M *կետից ուղղահայացներ ենք իջեցնում* Ox *և* Oy *առանցքներին: Այդ ուղղահայացների հիմքերը՝* P *և* Q *կետերը կորոշեն որոնելի երկու կոորդինատները.* M *կետի առաջին կոոր-դինատը, նրա* x *աբսցիսը, հավասար է* Ox *առանցքի վրա գըտ-նըվող* $\overline{OP}$ *հատվածի մեծությանը: Իսկ* M *կետի երկրորդ կոորդի-նատը, նրա* y *օրդինատը, հավասար է* Oy *առանցքի վրա* $\overline{OQ}$ *հատվածի մեծությանը:*

Խ ն դ ի ր II. Գիտենալով M կետի x և y կոորդինատները, կառուցել այդ կետը:

Ox *առանցքի վրա* O *կետից սկսած վերցնենք* $|x|$ *միավոր երկարություն ունեցող մի* OP *հատված, որի* P *ծայրը գտնվի* O *կետից դեպի աջ, եթե* $x>0$, *դեպի ձախ, եթե* $x<0$, *և համընկնի* O *կետի հետ, եթե* $x=0$: *Այդ հատվածի* P *ծայրը կլինի որոնելի* M *կետի պրոյեկցիան* Ox *առանցքի վրա:* Oy *առանցքի վրա* O *կետից սկսած վերցնենք* $|y|$ *միավոր երկարություն ունեցող մի* $\overline{OQ}$ *հատ-ված, որի* Q *ծայրը գտնվի* O *կետից վերև՝ եթե* $y>0$, *ներքև՝ եթե* $y<0$ *և համընկնի* O *կետի հետ՝ եթե* $y=0$: *Այդ հատվածի* Q *ծայրը կլինի* M *կետի պրոյեկցիան* Oy *առանցքի վրա: Իմանալով* P *և* Q *կետերը, նրանցով, որպես պրոյեկցիաներով, հեշտ է կա-ռուցել որոնելի* M *կետը: Դրա համար բավական է* P *և* Q *կետերից առանցքներին զուգահեռ ուղիղներ տանել. նրանց հատման կետը կլինի* M*-ը:*

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն: Եթե մենք պայմանավորվենք $\overline{PM}$ *և* $\overline{QM}$ *ուղղությամբ օժտված հատվածները (գծ. 6) դիտարկել որպես այնպիսի առանցքների հատվածներ, որոնք ունեն իրենց զուգա_* հեռ կոորդինատային առանցքների ուղղությունները, ապա M կետի աբսցիսը կարտահայտվի ոչ միայն $\overline{OP}$ հատվածի մեծությամբ, այլև նրան հավասար $\overline{QM}$ հատվածի մեծությամբ։ Նույն կետի օրդինատը միատեսակ կարտահայտվի ինչպես $\overline{OQ}$ հատվածի մեծությամբ, այնպես էլ նրան հավասար $\overline{PM}$ հատվածի մեծությամբ։ $\overline{OP}$, $\overline{QM}$, $\overline{OQ}$ և $\overline{PM}$ ուղղությամբ օժտված հատվածները կանվանենք M կետի կոորդինատային հատվածներ։ Այդ դեպքում դիտարկված երկու հիմնական խնդիրները լուծելիս, անհրաժեշտություն չկա որոշել M կետի երկու պրոյեկցիաներն էլ. բավական է որոշել միայն մեկը, օրինակ՝ պրոյեկցիան աբսցիսների առանցքի վրա։ Այսպես, I խնդրում M կետից ուղղահայաց ենք իջեցնում աբսցիսների առանցքին։ Դրա P հիմքը կլինի M-ի պրոյեկցիան այդ առանցքի վրա։ $\overline{OP}$ հատվածի մեծությունը կտա տըրված կետի x աբսցիսը, իսկ $\overline{PM}$ հատվածի մեծությունը՝ y օրդինատը։

Օրինակ։ Կառուցել այն կետը, որի կոորդինատներն են՝ $x=2$, $y=-3$։ O կետից սկսած դեպի աջ աբսցիսների առանցքի վրա վերցնենք 2 միավոր երկարությամբ հատված. այդ հատվածի P ծայրակետով տանենք Oy առանցքին զուգահեռ ուղիղ և նրա վրա P կետից սկսած դեպի ներքև վերցնենք 3 միավոր երկարությամբ հատված։ Այդ հատվածի ծայրակետը հենց կլինի որոնելի M կետը։

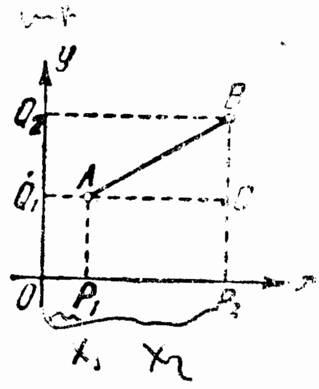
Այսպիսով, կոորդինատների մեր ընտրած սիստեմում հարթության յուրաքանչյուր կետին համապատասխանում է x և y կոորդինատների լրիվ որոշակի մի կարգավորված զույգ և, հակադարձաբար, x և y թվերի յուրաքանչյուր կարգավորված զույգ հարթության վրա որոշում է միակ կետ, որի աբսցիսը հավասար է x-ին, օրդինատը՝ y-ին։ Ուստի, երբ տրված է կետը, այդ նշանակում է տրված են նրա կոորդինատները, գտնել մի կետ, նշանակում է գտնել նրա կոորդինատները։

§ 5. Երկու կետերի հեռավորությունը հարթության վրա։

Այս գլխի 5, 6 և 10-րդ §-ներում մենք կդիտարկենք անալիտիկ երկրաչափության մի քանի պարզագույն խնդիրներ, որոնց հաճախ հանգեցվում են ավելի բարդ շատ խնդիրներ։ Այդպիսի պարզագույն խնդիրներից մեկը երկու կետերի հեռավորության վերաբերյալ խընդիրն է։

Դիցուք հարթության վրա ընտրված կոորդինատային սիստեմում[1] տված են երկու կետեր՝ $A(x_1, y_1)$ և $B(x_2, y_2)$: Այդ երկու կետերի միջև ընկած d հեռավորությունն արտահայտենք նրանց կոորդինատներով:

Գտնենք A և B կետերի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա (գծ. 8): Կունենանք՝



Գծ. 8

$$\text{մեծ } \overline{OP_1}=x_1, \quad \text{մեծ } \overline{OQ_1}=y_1,$$

$$\text{մեծ } \overline{OP_2}=x_2, \quad \text{մեծ } \overline{OQ_2}=y_2:$$

Տրված կետերից մեկից, օրինակ՝ A-ից, տանենք աբսցիսների առանցքին զուգահեռ ուղիղ մինչև P_2B ուղղի հետ հատվելը C կետում: ACB ուղղանկյուն եռանկյունից կստանանք՝

$$d^2=AC^2+CB^2$$

(այստեղ AC-ն ու BC-ն՝ ACB եռանկյան կողմերի երկարություններն են): Բայց քանի որ (գլ. I, § 3)՝

$$AC=P_1P_2=|x_2-x_1|$$

և

$$CB=Q_1Q_2=|y_2-y_1|,$$

ուստի՝

$$d^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2,$$

կամ՝

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

որտեղից՝

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (3)$$

Պարզ է, որ այստեղ պետք է վերցնել արմատի թվաբանական արժեքը:

Այսպիսով, տված երկու կետերի միջև հեռավորությունը գտնելու համար պետք է քառակուսի արմատ հանել նրանց համանուն կոորդինատների տարբերությունների քառակուսիների գումարից:

Դիտողություն: Եթե տված A և B կետերը գտնվեն

---

[1] Պարզ է, որ կետերի կոորդինատների մասին խոսել կարելի է միայն այն դեպքում, երբ կոորդինատների սիստեմն ընտրված է: Հետագայում մենք ամեն անգամ չենք հիշեցնելու կոորդինատային սիստեմի ընտրված լինելու մասին:

կոորդինատային առանցքներից մեկին զուգահեռ ուղիղի վրա, ABC եռանկյուն չենք ստանա, սակայն (3) բանաձևն այս դեպքում էլ իրավացի կլինի: Իսկապես, եթե A և B կետերը գտնվեն, օրինակ, Ox առանցքին զուգահեռ ուղիղի վրա, այդ դեպքում՝ ակներևաբար՝ $AB = P_1P_2 = |x_2 - x_1|$ (գլ. I, § 3): Այս նույն պատասխանը կստացվի նաև (3) բանաձևից, քանի որ տվյալ դեպքում $y_1 = y_2$:

$M(x, y)$ կետի հեռավորությունը $O(0,0)$ կետից, (3) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}: \tag{3'}$$

Օրինակ: Գտնել $(-1, 4)$ և $(2, 0)$ կետերի հեռավորությունը: Այդ հեռավորությունը հաշվենք (3) բանաձևով: Այստեղ $x_1 = -1$, $y_1 = 4$, $x_2 = 2$, $y_2 = 0$, հետևաբար՝

$$d = \sqrt{[2-(-1)]^2 + (0-4)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5:$$

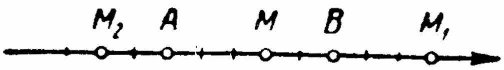
§ 6. Հատվածի բաժանումը տվյալ հարաբերությամբ: Դիցուք տված են A և B երկու կետերը: Այդ կետերով տանենք ուղիղ և նրա վրա կամայապես ընտրենք դրական ուղղություն: Դիցուք M-ը մի որոշ կետ է այդ առանցքի վրա: Որտեղ էլ գտնվելու լինի M կետը—$\overline{AB}$ հատվածի ներսը, թե՞ նրա շարունակության վրա դեպի մեկ կամ մյուս կողմը—պայմանավորվենք ասել, որ նա բաժանում է $\overline{AB}$ ուղղությամբ օժտված հատվածը: Ընդ որում, եթե M կետը գտնվում է A և B կետերի միջև, կասենք, որ նա $\overline{AB}$ հատվածը *ներքնապես* է բաժանում, իսկ եթե M կետը գտնվում է հատվածի շարունակության վրա, ապա կասենք, որ նա հատվածն *արտաքնապես* է բաժանում:

Ասում ենք, որ M կետը $\overline{AB}$ հատվածը բաժանում է λ հարաբերությամբ, եթե λ թիվը որոշվում է այսպես՝

$$\lambda = \frac{\text{մեծ } \overline{AM}}{\text{մեծ } \overline{MB}}: \tag{4}$$

Եթե M կետը $\overline{AB}$ հատվածը ներքնապես է բաժանում, այդ դեպքում $\overline{AM}$ և $\overline{MB}$ հատվածներն ունեն միևնույն ուղղությունը իսկ նրանց մեծությունները՝ նույն նշանը, հետևաբար λ հարաբերությունը դրական է: Եթե M կետը համընկնում է հատվածի A սկզբնակետի հետ, ապա $\lambda = 0$: Բաժանող M կետը հատվածի B ծայրակետին մոտենալիս λ հարաբերությունն անսահմանորեն աճում է, քանի որ հայտարարը (մեծ $\overline{MB}$-ն) ձգտում է զրոյի: Բաժանող M կետը հատվածի B ծայրակետի հետ համընկնելու դեպքը պետք է բացառել, քանի որ այդ դեպքում հարաբերությունն իմաստը կորցնում է (կոտորակի հայտարարը զրո է դառնում):

Եթե M կետը հատվածն արտաքնապես է բաժանում, ապա նրա ցանկացած դիրքի դեպքում $\overline{AM}$ և $\overline{MB}$ հատվածներն ունեն հակադիր ուղղություններ, իսկ նրանց մեծությունները՝ հակադիր նշաններ և, հետևաբար, λ հարաբերությունը, որով M կետը բաժանում է $\overline{AB}$ հատվածը, բացասական է։ Ընդ որում պարզ է, որ եթե բաժանող M կետը գտնվում է $\overline{AB}$ հատվածից դուրս՝ նրա սկզբից այն կողմը, ապա λ հարաբերության բացարձակ մեծությունը մեկից փոքր է. իսկ եթե M-ը գտնվում է $\overline{AB}$ հատվածի շարունակության վրա՝ նրա ծայրից այն կողմը, ապա $|\lambda|>1$ (նկատենք, որ բաժանող M կետի ոչ մի դիրքի դեպքում λ հարաբերությունը չի կարող հավասարվել —1-ի)։



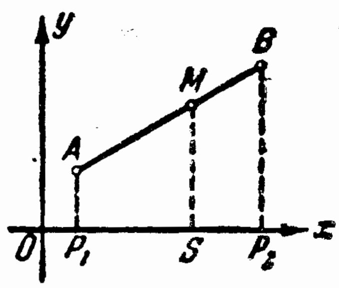
Գծ. 9.

Այսպիսով, ուղիղի վրա M կետի յուրաքանչյուր դիրքին (բացի այն դեպքից, երբ M-ը համընկնում է դիտարկվող հատվածի ծայրի հետ) համապատասխանում է λ հարաբերության որոշակի արժեք։

Այսպես, օրինակ, գծ. 9-ում M կետը $\overline{AB}$ հատվածը բաժանում է $\lambda=\frac{3}{2}$ հարաբերությամբ։ Այդ նույն կետը $\overline{BA}$ հատվածը բաժանում է $\lambda=\frac{2}{3}$ հարաբերությամբ։ M_1 կետը $\overline{BA}$ հատվածն արտաքնապես բաժանում է $\lambda=-\frac{8}{3}$ հարաբերությամբ, իսկ M_2 կետն այդ նույն $\overline{AB}$ հատվածը բաժանում է $\lambda=-\frac{2}{7}$ հարաբերությամբ։

Հատվածը տվյալ հարաբերությամբ բաժանելու խնդիրն այսպես պիտի հասկանալ. տված են $A(x_1, y_1)$ ու $B(x_2, y_2)$ կետերը և λ հարաբերությունը, որով $\overline{AB}$ ուղիղի մի որոշ $M(x, y)$ կետ բաժանում է $\overline{AB}$ հատվածը. պահանջվում է գտնել M կետի x, y կոորդինատները։

Դիցուք P_1, S, P_2 կետերը՝ A, M, B կետերի պրոյեկցիաներն են Ox առանցքի վրա ($AB \nparallel Oy$) (գծ, 10)։ AP_1, MS և BP_2 ուղիղները զուգահեռ են և, հետևաբար, նրանք AB ուղիղն ու Ox առանցքը բաժանում են համեմատական մասերի, այնպես որ՝ $AM : MB = P_1S : SP_2$։ Նման առնչություն կա նաև $\overline{AM}$, $\overline{MB}$, $\overline{P_1S}$ և $\overline{SP_2}$ ուղղությամբ օժտված հատվածների մեծությունների միջև՝



Գծ. 10

$$\frac{\text{մեծ}\ \overline{AM}}{\text{մեծ}\ \overline{MB}}=\frac{\text{մեծ}\ \overline{P_1S}}{\text{մեծ}\ \overline{SP_2}}: \qquad (5)$$

Իրոք, գրված հավասարության երկու մասերի մոդուլները, ինչպես հենց նոր ցույց տրվեց, հավասար են, իսկ նշաններն էլ համընկնում են, որովհետև $\overline{AB}$ *հատվածի նկատմամբ* M *կետի ամեն մի դասավորության դեպքում (ներսը, թե դուրսը՝ այս կամ այն կողմում)* S *կետը միշտ համապատասխան դասավորություն կունենա* $\overline{P_1P_2}$ *հատվածի նկատմամբ:*

Քանի որ (գլ. I, § 3)՝

$$\text{մեծ}\ \overline{P_1S}=x-x_1, \qquad \text{մեծ}\ \overline{SP_2}=x_2-x$$

և, ըստ պայմանի՝

$$\frac{\text{մեծ}\ \overline{AM}}{\text{մեծ}\ \overline{MB}}=\lambda,$$

ապա (5) համեմատությունից կստանանք՝

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda,$$

որտեղից՝ $x-x_1=\lambda(x_2-x)$, *կամ՝* $x-x_1=\lambda x_1-\lambda x$,

այսինքն՝ $x+\lambda x=x_1+\lambda x_2$:

Լուծելով x*-ի նկատմամբ, կստանանք՝*

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}: \qquad (6)$$

M *կետի* y *օրդինատն ստանալու համար պետք է* A, M, B *կետերը պրոյեկտել օրդինատների առանցքի վրա. նախորդի նման կստանանք՝*

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}: \qquad (7)$$

(6) և (7) բանաձևերն էլ հենց լուծում են առաջադրված խնդիրը. դրանցից հետևում է, որ λ*-ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է* AB *ուղիղի մի որոշակի* M *կետ, որի կոորդինատները որոշվում են հենց այդ բանաձևերով: Բացառություն է կազմում* $\lambda=-1$ *արժեքը, որի դեպքում բանաձևերը կորցնում են իրենց իմաստը:*

(6) և (7) բանաձևերում, ընդունելով $\lambda=1$, *կգտնենք* հատվածի միջնակետի կոորդինատները՝

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \tag{8}$$

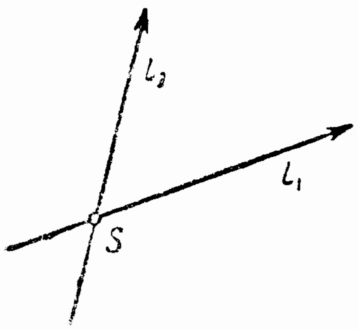
այսինքն՝ հատվածի միջնակետի կոորդինատներից յուրաքանչյուրը հավասար է նրա ծայրակետերի համանուն կոորդինատների կիսագումարին:

Դիտողություն: (6) և (7) բանաձևերն արտածելիս մենք ենթադրել էինք, որ AB ուղիղը կոորդինատային առանցքներից ոչ մեկին զուգահեռ չէ: Սակայն բանաձևերն այդ դեպքում ևս իրավացի կլինեն: Իրոք, եթե AB ուղիղը զուգահեռ է Oy առանցքին, ապա $x_1=x_2=x$ և (6) բանաձևն ուժի մեջ է մնում: Ճիշտ այդպես էլ, (7) բանաձևն ուժի մեջ կմնա, եթե AB ուղիղը զուգահեռ լինի Ox առանցքին:

Օրինակ: Գտնել այն M կետի կոորդինատները, որն A(1, 2) և B(—1,4) կետերը միացնող **AB** *հատվածը բաժանում է 1:2 հարաբերությամբ: Այստեղ՝ $x_1=1$, $y_1=2$, $x_2=-1$, $y_2=4$ և $\lambda=\frac{1}{2}$: Հետևաբար՝*

$$x=\frac{1+\frac{1}{2}(-1)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}, \qquad y=\frac{2+\frac{1}{2}\cdot 4}{1+\frac{1}{2}}=\frac{8}{3}:$$

§ **7. Երկու առանցքներով կազմված անկյունը:** *Դիցուք հարթության վրա տված են l_1 և l_2 երկու առանցքներ, որոնք հատվում են S կետում (գծ. 11): Պայմանավորվենք տվյալ կարգով տրված l_1 և l_2 երկու առանցքների միջև կազմված անկյուն ասելով հասկանալ այն անկյունը, որով պետք է l_1 առանցքը պտտել S կետի շուրջը, որպեսզի նրա դրական ուղղությունը համընկնի l_2 առանցքի դրական ուղղության հետ: Այդ անկյունը նշանակելու ենք (l_1, l_2): Նկատենք, որ (l_1, l_2) անկյունը կարող ենք դիտարկել նաև որպես S կետից l_1 և l_2 առանցքների դրական ուղղություններով ելնող ճառագայթներով կազմված անկյուն: Անկյունը չափելով, ինչպես սովորաբար, աստիճաններով կամ ռադիաններով[1], մենք ստացված թիվը, ինչպես և եռանկյունաչափու-*



Գծ. 11

---

[1] *Հիշենք, որ չափման երկու եղանակների միջև էական տարբերություն չկա, տարբերությունը միայն չափման միավորի ընտրության մեջ է,*

թյան մեջ, կվերցնենք + կամ — նշանով՝ պտտման ուղղությունից կախված, այն է՝ + նշանով, եթե անկյունն ստացվում է l_1 առանցքը ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ պտտելով, և — նշանով, եթե այդ առանցքի պտույտը կատարվում է ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ[2]: Սակայն, l_1 առանցքը ո՛չ միակ ձևով կարելի է պտտել այնպես, որ նրա դրական ուղղությունը համընկնի l_2 առանցքի դրական ուղղության հետ: Իրոք, եթե l_1 առանցքն արդեն պտտել ենք այդպիսի անկյունով, ապա դրանից հետո կարելի է լրացուցիչ կերպով այն նորից պտտել, ցանկացած անգամ լրիվ պտույտներ կատարելով ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ այնպես, որ l_1-ի դրական ուղությունն առաջվա նման համընկնի l_2-ի դրական ուղղության հետ:

Այդպիսով, առանցքների միջև կազմված (l_1, l_2) անկյան համար կարելի է նշել ոչ թե մեկ, այլ անթիվ բազմությամբ արժեքներ: Եթե այդ արժեքներից մեկը նշանակենք ω, ապա անկյան ամեն մի արժեք կարելի է ստանալ հետևյալ բանաձևով՝

$$(l_1, l_2) = \omega + 2n\pi,$$

որտեղ n-ը ցանկացած ամբողջ թիվ է (դրական, բացասական կամ զրո):

Հետագայում, խոսելով երկու առանցքներով կազմված անկյան մասին, մենք սովորաբար նկատի ենք ունենալու նրա բոլոր հնարավոր արժեքներից որևէ մեկը. ամենից հաճախ՝ իր մոդուլով փոքրագույնը:

Մեր դատողությունների ընթացքում մենք ենթադրում էինք, որ l_1 և l_2 առանցքները հատվում են: Առանցքների զուգահեռության դեպքում նրանցով կազմված անկյունը համարելու ենք հա-

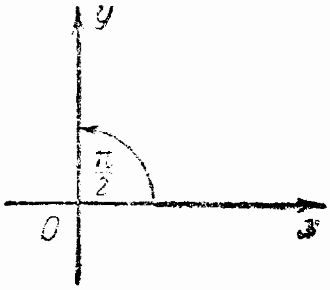
որպիսին մի դեպքում ընդունվում է այն կենտրոնական անկյունը, որը հենվում է շրջանագծի $\frac{1}{360}$ մասի վրա (աստիճան), մյուս դեպքում՝ այն կենտրոնական անկյունը, որը հենվում է շրջանագծի՝ իր երկարությամբ շառավղին հավասար աղեղի վրա (ռադիան): Անկյունները ռադիաններով չափելիս չափման միավորի (ռադիանի) անունը հաճախ բաց են թողնում: Օրինակ, ասում են «ուղիղ անկյունը հավասար է $\frac{\pi}{2}$-ի», փոխանակ ասելու՝ «ուղիղ անկյունը հավասար է $\frac{\pi}{2}$ ռադիանի», «անկյունը հավասար է 2,3-ի», փոխանակ «անկյունը հավասար է 2,3 ռադիանի»:

[2] Տե՛ս սույն պարագրաֆի վերջում արված դիտողությունը:

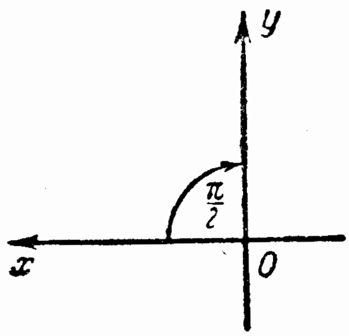
վասար զրոյի (կամ, ընդհանրապես՝ $2n\pi$), եթե նրանց դրական ուղղությունները համընկնում են, և π-ի (կամ, ընդհանրապես՝ $\pi+2n\pi$), եթե նրանց դրական ուղղությունները հակադիր են։

Շարադրվածի նմանությամբ, պայմանավորվում ենք առանցքով և ուղղությամբ օժտված հատվածով կազմված անկյուն ասելով հասկանալ այն անկյունը, որով պետք է առանցքը պտտել, որպեսզի նրա դրական ուղղությունը համընկնի հատվածի ուղղության հետ (հարկ եղած դեպքում կարելի է հատվածը շարունակել մինչև առանցքի հետ հատվելը)։

Դիտողություն։ Մենք պայմանավորվեցինք դրական համարել այն անկյունները, որոնք հաշվվում են ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ։ Սակայն, երբեմն ավելի հարմար է լինում դրական անկյունները հաշվել ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ։ Անկյուններ հաշվելու դրական ուղղության ընտրությունը կապված է կոորդինատային սիստեմի ընտրության հետ։ Հարթության վրա վերցնենք կոորդինատների ուղղանկյուն դեկարտյան սիստեմի առանցքների դասավորության երկու տեսակ։ Եթե նայենք Oy առանցքի դրական ուղղությամբ, Ox առանցքը կարող է ուղղված լինել դեպի աջ (գծ. 12) կամ դեպի ձախ (գծ. 13)։ Առաջին դեպքում կոորդինատների սիստեմը կոչվում է աջ սիստեմ, երկրորդ դեպքում՝ ձախ սիստեմ։ Այդ երկու սիստեմներից էլ կարելի է օգտվել։ Ինչպես աջ սիստեմում, այնպես էլ ձախ սիստեմում այն անկյուններն են դրական համարվում, որոնք հաշվվում են այն ուղղությամբ, ինչ ուղղությամբ որ պետք է Ox առանցքը պտտել ուղիղ անկյունով, որպեսզի նրա դրական ուղղությունը համընկնի Oy առանցքի դրական ուղղության հետ։ Ակներևաբար (տես գծ. 12 և 13), աջ սիստեմի դեպքում այդ պտույտը կա-



Գծ. 12

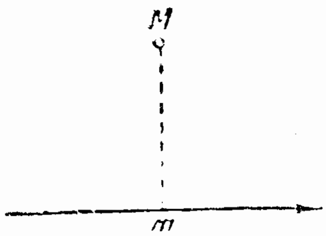


Գծ. 13

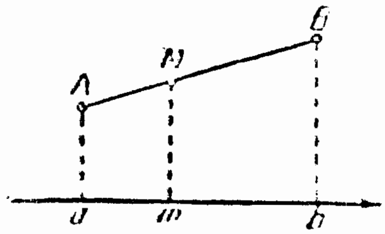
տարվում է ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ, իսկ ձախ սիստեմի դեպքում՝ ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ։ Հետագայում մենք, որպես կանոն, օգտվելու ենք կոորդինատների աջ սիստեմից *և, դրան համապատասխան, դրական անկյունները հաշվելու ենք ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ, որ և նշեցինք սկզբում:*

§ **8. Պրոյեկցիաների տեսության հիմնական դրույթները:** *Արդեն ասել ենք, որ* M *կետի պրոյեկցիա առանցքի վրա կոչվում է* M *կետից այդ առանցքի վրա իջեցրած ուղղահայացի* m *հիմքը (գծ. 14):*

Դիցուք հարթության վրա տված է ուղղությամբ օժտված մի $\overline{AB}$ *հատված և մի* l *առանցք (պրոյեկցիաների առանցք) (գծ. 15): Այդ հատվածը մենք դիտարկելու ենք որպես* M *շարժվող կետի անցնելիք ճանապարհ: Երբ* M *կետը շարժվի* $\overline{AB}$ *հատվածով, նրա* m *պրոյեկցիան առանցքի վրա կգծի ուղղությամբ օժտված*



Գծ. 14



Գծ. 15

մի $\overline{ab}$ *հատված, որը կոչվում է* $\overline{AB}$ *հատվածի երկրաչափական պրոյեկցիա* l *առանցքի վրա:*

Սակայն, հետագայում հիմնական դեր կատարելու է հատվածի ոչ թե երկրաչափական պրոյեկցիան, այլ նրա մեծությունը, որը կոչվում է հատվածի պրոյեկցիա առանցքի վրա:

Այսպես, ուրեմն, ուղղությամբ օժտված հատվածի պրոյեկցիա առանցքի վրա կոչվում է առանցքի այն հատվածի մեծությունը, որի սկիզբը պրոյեկտվող հատվածի սկզբի պրոյեկցիան է, ծայրը՝ այդ հատվածի ծայրի պրոյեկցիան:

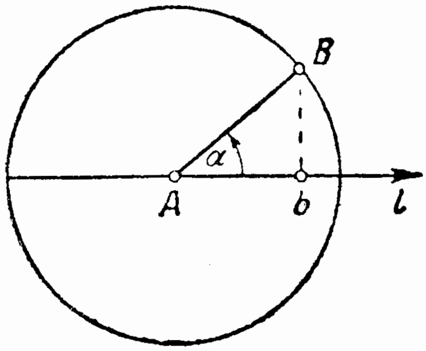
Նկատենք, որ ուղղությամբ օժտված հատվածի պրոյեկցիան թիվ է *(դրական, բացասական կամ զրո): Պայմանավորվենք* $\overline{AB}$ *հատվածի պրոյեկցիան* l *առանցքի վրա նշանակել պր*$_l\overline{AB}$ *կարճ՝ պր* $\overline{AB}$*:*

Ծանոթանանք պրոյեկցիաների տեսության հիմնական դրույթներին:

Ուղղությամբ օժտված $\overline{AB}$ հատվածի պրոյեկցիան l առանցքի վրա հավասար է այդ հատվածի AB երկարությանը՝ բազմապատկած պրոյեկցիաների առանցքով ու տվյալ հատվածով կազմված α անկյան կոսինուսով՝

$$պր_l \overline{AB} = AB\cos\alpha: \qquad (9)$$

Այս բանաձևի իրավացիությունը բավական է ապացուցել այն դեպքի համար, երբ պրոյեկցիաների առանցքն անցնում է պրոյեկտվող հատվածի սկզբնակետով: Իրոք, $\overline{AB}$ հատվածի պրոյեկցիան չի փոխվի, եթե պրոյեկցիաների առանցքն ինքն իրեն զուգահեռ տեղափոխենք: Այդ ժամանակ պրոյեկցիաների առանցքով և հատվածով կազմված անկյունը նույնպես կպահպանի իր նախկին արժեքը:



Գծ. 16

Դիցուք պրոյեկցիաների l առանցքն անցնում է $\overline{AB}$ պրոյեկտվող հատվածի սկզբնակետով (գծ. 16):

(9) հավասարությունն ապացուցելու համար, կառուցենք մի եռանկյունաչափական շրջանագիծ, որի կենտրոնը $\overline{AB}$ հատվածի սկիզբն է, իսկ շառավիղը հավասար է այդ հատվածի երկարությանը, և ընդունենք, որ նրա սկզբնական տրամագիծն ուղղված է l առանցքով (գծ. 16): Կոսինուսի սահմանման համաձայն ունենք՝

$$\cos\alpha = \frac{մեծ\, \overline{AB}}{AB}:$$

Քանի որ

$$մեծ\, \overline{AB} = պր_l \overline{AB},$$

ապա՝

$$\cos\alpha = \frac{պր_l \overline{AB}}{AB},$$

որտեղից՝

$$պր_l \overline{AB} = AB\cos\alpha:$$

(9) հավասարությունն ապացուցվեց:

Այժմ ենթադրենք, թե ուղղությամբ օժտված $\overline{AB}$ հատվածը գտնվում է մի u առանցքի վրա. դիցուք φ-ն՝ պրոյեկցիաների l առանցքով և u առանցքով կազմված անկյունն է:

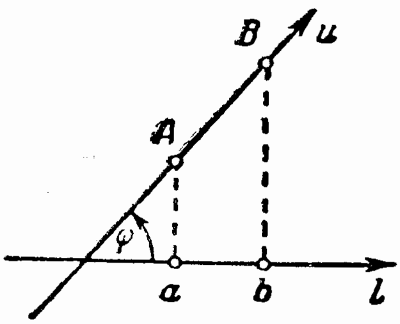
Ուղղությամբ օժտված $\overline{AB}$ հատվածի պրոյեկցիան l առանցքի վրա հավասար է այդ հատվածի մեծությանը՝ բազմապատկած պրոյեկցիաների l առանցքով և u առանցքով կազմված φ անկյան կոսինուսով՝

$$պր_l \overline{AB} = մեծ\, \overline{AB} \cdot \cos\varphi: \qquad (10)$$

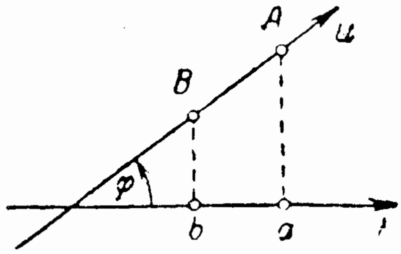
Նկատենք, որ այս բանաձևում պրոյեկցիան արտահայտված է մի որոշ առանցքի վրա գտնվող հատվածի մեծության *միջոցով,* մինչդեռ (9) բանաձևում օգտագործվում է հատվածի երկարությունը։

Ապացուցենք (10) հավասարությունը։ Այն դեպքում, երբ $\overline{AB}$ հատվածի ուղղությունը համընկնում է u առանցքի դրական ուղղության հետ (գծ. 17), (10) հավասարությունն ուղղակի հետևում է արդեն ապացուցված (9) հավասարությունից։ Իրոք, այդ դեպքում φ անկյունը միաժամանակ հանդիսանում է պրոյեկցիաների առանցքի և հատվածի միջև կազմված α անկյունը և հետևաբար՝

$$\text{պր}_l\, \overline{AB} = AB\cos\alpha = AB\cos\varphi։$$



Գծ. 17



Գծ. 18

Բացի այդ, հաշվի առնելով, որ տվյալ դեպքում

$$\text{մեծ}\, \overline{AB} = AB,$$

կստանանք՝

$$\text{պր}_l\, \overline{AB} = \text{մեծ}\, \overline{AB} \cos\varphi։$$

Իսկ եթե $\overline{AB}$ հատվածի ուղղությունը հակադիր է u առանցքի ուղղությանը (գծ. 18), ապա պրոյեկցիաների առանցքի և $\overline{AB}$ հատվածի միջև կազմված α անկյունը հավասար է $\varphi+\pi$ (քանի որ՝ եթե l առանցքը նախ պտտենք φ անկյունով, և ապա նաև π անկյունով, այդ ժամանակ նրա դրական ուղղությունը կհամընկնի u, առանցքի բացասական ուղղության հետ, այսինքն՝ $\overline{AB}$ հատվածի ուղղության հետ)։ Հետևաբար՝

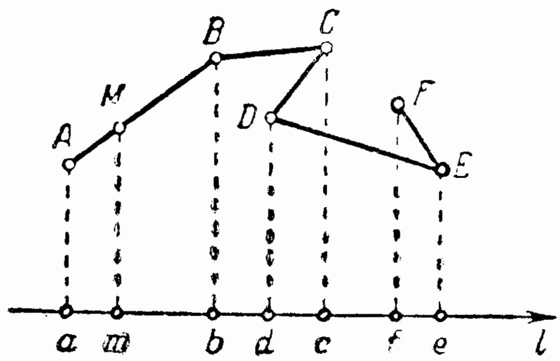
$$\text{պր}_l\, \overline{AB} = AB\cos\alpha = AB\cos(\varphi+\pi) = -AB\cos\varphi։$$

Հաշվի առնելով, որ այս դեպքում մեծ $\overline{AB} = -AB$, կստանանք

$$\text{պր}_l\, \overline{AB} = \text{մեծ}\, \overline{AB} \cos\varphi։$$

Այսպիսով, (10) հավասարությունը լրիվ ապացուցվեց։

Այժմ վերցնենք մի կամայական բեկյալ գիծ՝ ABCDEF (գծ. 19)։ Այդ բեկյալը մենք կդիտարկենք որպես հետագիծ մի M կետի, որը հաջորդաբար գծում է այդ բեկյալի բոլոր օղակները (հատվածները)՝ նրա A սկզբնակետից մինչև F ծայրակետը: Այդ ժամանակ բեկյալի վրա սահմանվում է շարժման ուղղություն, իսկ նրա օղակները կարող են դիտվել որպես ուղղությամբ օժտված հատվածներ: Այդպիսի բեկյալը կանվանենք ուղղությամբ օժտված բեկյալ[1]: A, B, C, D, E և F կետերը հաջորդաբար միացնող ուղղությամբ օժտված բեկյալը կնշանակենք $\overline{ABCDEF}$:



Գծ. 19

Երբ M կետը շարժվի $\overline{ABCDEF}$ բեկյալի վրայով, նրա m պրոյեկցիան առանցքի վրա կշարժվի a կետից, որն A կետի պրոյեկցիան է, մինչև f կետը, որն F կետի պրոյեկցիան է: Առանցքի ուղղությամբ օժտված $\overline{af}$ հատվածը կոչվում է $\overline{ABCDEF}$ բեկյալի երկրաչափական պրոյեկցիա առանցքի վրա:

Բեկյալի երկրաչափական պրոյեկցիայի մեծությունն անվանում են բեկյալի պրոյեկցիա: Այսպիսով, ուղղությամբ օժտված բեկյալի պրոյեկցիա առանցքի վրա կոչվում է այդ առանցքի այն հատվածի մեծությունը, որի սկիզբը պրոյեկտվող բեկյալի սկզբնակետի պրոյեկցիան է, իսկ ծայրը՝ այդ բեկյալի ծայրակետի պրոյեկցիան:

Նկատենք, որ ուղղությամբ օժտված բեկյալի պրոյեկցիան առանցքի վրա՝ թիվ է:

Հեշտ է ցույց տալ, որ ուղղությամբ օժտված բեկյալի պրոյեկցիան հավասար է նրա հատվածների պրոյեկցիաների գումարին: Իրոք, առանցքի վրա պրոյեկտելով $\overline{ABCDEF}$ բեկյալի յուրաքանչյուր օղակը (գծ. 19), կստանանք (գլ. I. §1)՝

$$\text{մեծ}\,\overline{af}=\text{մեծ}\,\overline{ab}+\text{մեծ}\,\overline{bc}+\text{մեծ}\,\overline{cd}+\text{մեծ}\,\overline{de}+\text{մեծ}\,\overline{ef},$$

կամ, բեկյալի պրոյեկցիան նշանակելով պր $\overline{ABCDEF}$, կունենանք՝

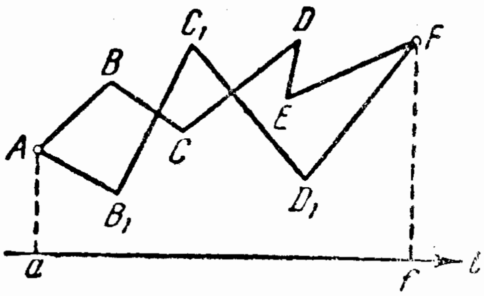
$$\text{պր}\,\overline{ABCDEF}=\text{պր}\,\overline{AB}+\text{պր}\,\overline{BC}+\text{պր}\,\overline{CD}+\text{պր}\,\overline{DE}+\text{պր}\,\overline{EF}: \qquad (11)$$

Այնուհետև պարզ է, որ ուղղությամբ օժտված բեկյալի պրոյեկցիան նրա ձևից կախված չէ, այլ կախված է միայն նրա

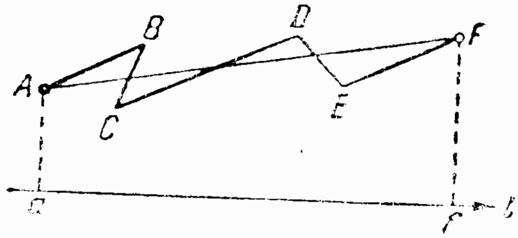
[1] Հետագայում ուղղությամբ օժտված բեկյալն ուղղակի անվանելու ենք բեկյալ, բաց թողնելով «ուղղությամբ օժտված» բառերը, եթե այդ թյուրիմացության առիթ չի տա:

սկզբնակետի և ծայրակետի դիրքից: Հետևաբար, ընդհանուր սկզբնակետ և ընդհանուր ծայրակետ ունեցող բեկյալների պրոյեկցիաները միմյանց հավասար են *(գծ. 20)*։

Բեկյալ գծի փակող հատված *անվանենք ուղղությամբ օժտված այն հատվածը, որի սկիզբն այդ բեկյալի սկզբնակետն է, իսկ ծայրը՝ նրա ծայրակետը։ Ակներևաբար,* բեկյալի պրոյեկցիան հավասար է նրա փակող հատվածի պրոյեկցիային *(գծ. 21)*։



Գծ. 20



Գծ. 21

Եթե բեկյալը փակ *է, այսինքն՝ նրա սկզբնակետն ու ծայրակետը համընկնում են, ապա* նրա պրոյեկցիան հավասար է զրոյի։

§ **9. Ուղղությամբ օժտված հատվածի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա։** *Այս պարագրաֆում մենք ամենից առաջ կստանանք բանաձևեր, որոնք արտահայտում են ուղղությամբ օժտված հատվածի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա։*

Դիցուք հայտնի են $\overline{AB}$ *հատվածի* d *երկարությունը և* Ox *առանցքով ու այդ հատվածով կազմված* α *անկյունը (գծ. 22)։*

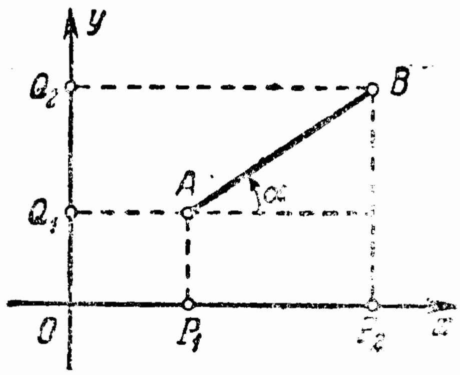
$\overline{AB}$ *հատվածի պրոյեկցիան* Ox *առանցքի վրա կստանանք ուղղակի § 8-ի (9) բանաձևից՝* $պր_x\,\overline{AB}=d\cos\alpha$։ $\overline{AB}$ *հատվածի պրոյեկցիան* Oy *առանցքի վրա ստանալու համար նկատենք, որ* Oy *առանցքի և* $\overline{AB}$ *հատվածի միջև կազմված անկյունը հավասար է* $\alpha-\frac{\pi}{2}$. *իսկապես, եթե* Oy *առանցքը նախ պտտենք* $-\frac{\pi}{2}$ *անկյունով, հետո՝* α *անկյունով, ապա նրա դրական ուղղությունը կհամընկնի* $\overline{AB}$ *հատվածի ուղղության հետ։ Այդ դեպքում* $պր_y\,\overline{AB}=$ $=d\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=d\sin\alpha$։ *Այսպիսով ստացանք՝*

$$\left.\begin{aligned} պր_x\overline{AB}&=d\cos\alpha,\\ պր_y\overline{AB}&=d\sin\alpha\text{։}\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Այժմ ենթադրենք, թե $\overline{AB}$ հատվածը գտնվում է մի u առանցքի վրա։ Այդպիսի դեպքում այդ հատվածի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա կարելի է արտահայտել նաև իր մեծությամբ և Ox առանցքով ու u առանցքով կազմված φ անկյունով։ Ըստ (10) բանաձևի կունենանք՝

$$\left.\begin{aligned} \text{պր}_x\,\overline{AB} &= \text{մեծ}\,\overline{AB}\cos\varphi, \\ \text{պր}_y\,\overline{AB} &= \text{մեծ}\,\overline{AB}\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

քանի որ Oy և u առանցքներով կազմված անկյունը հավասար է $\varphi-\dfrac{\pi}{2}$ և $\cos\left(\varphi-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\varphi$։



Գծ. 22

Իսկ եթե $\overline{AB}$ հատվածը տրված է իր $A(x_1, y_1)$ սկզբի և $B(x_2, y_2)$ ծայրի կոորդինատների միջոցով, ապա հատվածի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա կարելի է արտահայտել նրա ծայրակետերի կոորդինատների միջոցով։

$\overline{AB}$ հատվածի պրոյեկցիան Ox առանցքի վրա հավասար է Ox առանցքի $\overline{P_1P_2}$ հատվածի մեծությանը (գծ. 22)։ Քանի որ մեծ $\overline{P_1P_2}=x_2-x_1$ (գլ. 1, § 3), ուստի $\text{պր}_x\overline{AB}=x_2-x_1$։ Ճիշտ այդպես էլ՝ $\text{պր}_y\overline{AB}=y_2-y_1$։ Այսպիսով, ստացանք՝

$$\left.\begin{aligned} \text{պր}_x\,\overline{AB} &= x_2-x_1, \\ \text{պր}_y\,\overline{AB} &= y_2-y_1: \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Նկատենք, որ կոորդինատների սկզբնակետը $M(x, y)$ կամայական կետի հետ միացնող հատվածը պրոյեկտելով կոորդինատային առանցքների վրա, (14) բանաձևերով կստանանք՝

$$\left.\begin{aligned} \text{պր}_x\,\overline{OM} &= x, \\ \text{պր}_y\,\overline{OM} &= y: \end{aligned}\right\} \qquad (14')$$

Այսպիսով, M կետի x և y կոորդինատները կարելի է դիտարկել որպես $\overline{OM}$ հատվածի պրոյեկցիաներ կոորդինատային առանցքների վրա։

Հետագայում մեզ հարկավոր է լինելու մի բանաձև, որը Ox առանցքով և $\overline{AB}$ հատվածով կազմված անկյան տանգենսն արտահայտում է այդ հատվածի ծայրակետերի կոորդինատների միջոցով։ Այդ բանաձևը հեշտությամբ կստացվի, եթե օգտվենք մեր ստացած բանաձևերից։ Իրոք, միմյանց հետ բազմապատկելով (12) և (14) բանաձևերը, կստանանք՝

$$\left.\begin{aligned} d\cos\alpha &= x_2 - x_1 \\ d\sin\alpha &= y_2 - y_1 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

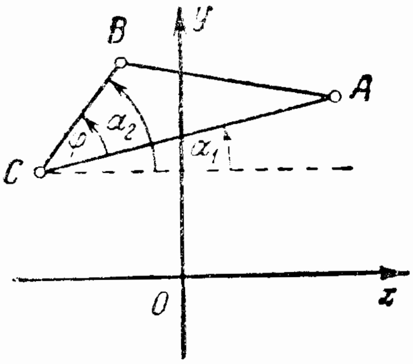
որտեղից

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{16}$$

Այս բանաձևը որոշում է Ox *առանցքով և ուղղությամբ օժտված* $\overline{AB}$ *հատվածով կազմված անկյան տանգենսը։*

Եթե հատվածի ուղղությունը փոխենք իր հակադիր ուղղությամբ, այսինքն՝ դիտարկենք $\overline{BA}$ *հատվածը, ապա* Ox *առանցքի և հատվածի միջև կազմված անկյունը կփոխվի* π*-ով, իսկ անկյան տանգենսը, ակներևաբար, կպահպանի նախկին արժեքը և, հետևաբար, կորոշվի նույն (16) բանաձևով։*

§ **10. Եռանկյան մակերեսը։** *Տրված են եռանկյան գագաթները՝* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ *(գծ. 23)։ Եռանկյան մակերեսն արտահայտենք նրա գագաթների կոորդինատների միջոցով։*



Գծ. 23

Դիցուք $CA = d_1$, $CB = d_2$, *իսկ* φ*-ն՝* $\overline{CA}$ *և* $\overline{CB}$ *հատվածներով կազմված անկյունն է (այսինքն՝ այն անկյունը, որով պետք է պտտել* $\overline{CA}$ *հատվածը* C *կետի շուրջը, որպեսզի այն համընկնի* $\overline{CB}$ *հատվածի ուղղության հետ. անկյունը, ինչպես սովորաբար, վերցնելու ենք իր նշանով)։*

Ինչպես հայտնի է, եռանկյան մակերեսը՝

$$S = \left| \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi \right|.$$

Բայց, քանի որ $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, *որտեղ* α_1*-ը և* α_2*-ը՝* Ox *առանցքով և* $\overline{CA}$ *ու* $\overline{CB}$ *հատվածներով կազմված անկյուններն են, ուստի՝*

$$\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) =$$

$$= \frac{1}{2} (d_1\cos\alpha_1 d_2\sin\alpha_2 - d_2\cos\alpha_2 d_1\sin\alpha_1).$$

Նախորդ պարագրաֆի (15) բանաձևերի համաձայն՝

$$d_1\cos\alpha_1 = x_1 - x_3, \qquad d_1\sin\alpha_1 = y_1 - y_3,$$
$$d_2\cos\alpha_2 = x_2 - x_3, \qquad d_2\sin\alpha_2 = y_2 - y_3.$$

Տեղադրելով այս արժեքները եռանկյան S մակերեսի վերոհիշյալ արտահայտության մեջ, կստանանք՝

$$S = \frac{1}{2}\left|(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_3)\right| : \qquad (17)$$

Օգտվելով դետերմինանտի գաղափարից (գլ. VI, § 1), ստացված բանաձևը կարելի է հետևյալ տեսքով գրել՝

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix} : \qquad (17')$$

Այստեղ պետք է վերցնել + կամ − նշանը, նայած թե դետերմինանտն ինքը դրակա՞ն է, թե բացասական:

Մասնավորապես, երբ գագաթներից մեկը, օրինակ՝ C-ն, գտնվի կոորդինատների սկզբնակետում, կունենանք $x_3=y_3=0$ և հետևաբար՝

$$S = \pm\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1) = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} : \qquad (17'')$$

Օրինակ: Հաշվել այն ABC եռանկյան մակերեսը, որի գագաթներն են՝ $A(1, 2)$, $B(-2, 3)$, $C(0, 5)$:

Այստեղ $x_1=1$, $y_1=2$, $x_2=-2$, $y_2=3$, $x_3=0$, $y_3=5$: Հետևաբար, (17) բանաձևի համաձայն, ABC եռանկյան մակերեսի համար կստանանք՝

$$S = \frac{1}{2}\left|(1-0)(3-5)-(-2-0)(2-5)\right| = 4 \text{ քառ. միավոր:}$$

Եթե A, B, C երեք կետերը գտնվում են մեկ ուղիղի վրա՝ ապա ABC եռանկյունը հատված է դառնում և ունի զրո մակերես՝ $S=0$: Այդպիսի դեպքում (17) բանաձևը վերածվում է հետևյալ հավասարությանը՝

$$0 = \frac{1}{2}\left[(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_3)\right],$$

կամ՝

$$(x_1-x_3)(y_2-y_3) = (x_2-x_3)(y_1-y_3), \qquad (18)$$

որը կարելի է գրել նաև համեմատության ձևով՝

$$\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3} = \frac{y_1-y_3}{y_1-y_3} : \qquad (18')$$

Այս հավասարությունը միմյանց հետ կապում է A, B, C երեք կետերի կոորդինատները այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ կետերը գտնվում են մեկ ուղիղի վրա: Հետևաբար, դրած համեմատությունն արտահայտում է երեք կետերի մեկ ուղիղի վրա գտնվելու պայմանը։

Օ ր ի ն ա կ 1. Իմանալ, թե A(1, 2), B(2, 3), C(3, 4) *կետերը գտնըվո՞ւմ են արդյոք մեկ ուղիղի վրա։*

Այստեղ $x_1=1$, $y_1=2$, $x_2=2$, $y_2=3$, $x_3=3$, $y_3=4$։ *(18′) պայմանը դառնում է՝*

$$\frac{1-3}{2-3}=\frac{2-4}{3-4}, \text{ այսինքն՝ } 2=2$$

և, հետևաբար, բավարարվում է։ Ուրեմն տված երեք կետերը գտնվում են մեկ ուղիղի վրա։

Օ ր ի ն ա կ 2. Ինչպիսի՞ պայմանի դեպքում $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ *կետերը և կոորդինատների սկզբնակետը կգտնվեն մեկ ուղիղի վրա։*

Այստեղ երրորդ կետի x_3, y_3 *կոորդինատները հավասար են զրոյի, և (18′) պայմանը դառնում է այսպիսին՝*

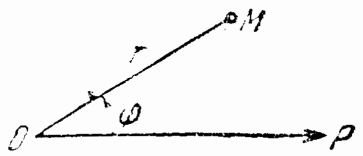
$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2},$$

այսինքն՝ երկու կետեր կգտնվեն կոորդինատների սկզբնակետի հետ միասին մեկ ուղիղի վրա, եթե նրանց կոորդինատները համեմատական լինեն։

Դ ի տ ո ղ ու թ յ ու ն։ (18) հավասարությունից (18′)-ին անցնել կարելի է միայն այն դեպքում, երբ x_2-x_3 *և* y_2-y_3 *թվերից ոչ մեկը հավասար չէ զրոյի։ Սակայն, քանի որ հիշելու համար (18′) հավասարությունն ավելի հարմար է, ուստի պայմանավորվենք այդ գրել նաև այն դեպքում, երբ հայտարարները զրո են դառնում։ Այսպիսի դեպքերում, իհարկե, գրության այդ ձևը պետք է տառացիորեն չհասկանալ, այլ պայմանականորեն։ Պետք է ընդունենք, որ (18′) հավասարությունը միշտ ա՛յն է նշանակում, ինչ որ (18)-ը, այսինքն՝ որ արտաքին անդամների* $(x_1-x_3)(y_2-y_3)$ *արտադրյալը հավասար է ներքին անդամների* $(x_2-x_3)(y_1-y_3)$ *արտադրյալին։ Օրինակ,* $\frac{x_1}{0}=\frac{y_1}{1}$ *նշանակում է, որ* $x_1 . 1=y_1 . 0$, *այսինքն՝* $x_1=0$։

§ **11. Բևեռային կոորդինատներ։** *Հարթության վրա կետի դիրքը որոշելու համար, բացի կոորդինատների՝ վերևում դիտարկված դեկարտյան ուղղանկյուն սիստեմից, բավական հաճախ է օգտագործվում նաև կոորդինատների բևեռային սիստեմը։*

Դիցուք հարթության վրա տրված են մի O *կետ (որ կանվանենք* բևեռ*) և այդ կետով անցնող մի* OP *առանցք (որ կանվանենք* բևեռային առանցք*), ինչպես և՝ ընտրված է մասշտաբի միավոր (գծ. 24)։ Հարթության ցանկացած* M *կետի դիրքը որոշենք բևեռի և բևեռային առանցքի նկատմամբ։* M *կետի* r=OM հեռավորությունը բևեռից անվանենք նրա բևեռային շառավիղ, իսկ բևեռային առանցքով և $\overline{OM}$ ուղղությամբ օժտված հատվածով կազմված φ-անկյունը՝ բևեռային անկյուն. պայմանավորվենք φ անկյունը վերցնել $-\pi<\varphi\leqslant\pi$ սահմաններում: Այդ դեպքում, ակներևաբար, հարթության յուրաքանչյուր M կետին կհամապատասխանի r և φ թվերի միայն մեկ զույգ (բացառություն է կազմում բևեռը, որի համար $r=0$, իսկ φ-ն ցանկացած արժեք ունի):



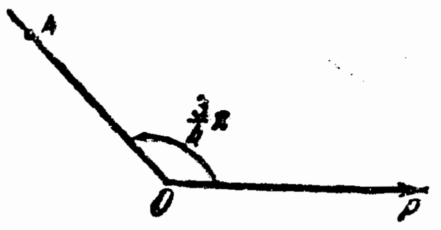
Գծ. 24

Հակադարձաբար, r և φ թվերի յուրաքանչյուր զույգին ($r\geqslant 0, -\pi<\varphi\leqslant\pi$) համապատասխանում է հարթության միայն մեկ կետ, որի համար r-ը բևեռային շառավիղ է, իսկ φ-ն՝ բևեռային անկյուն: Կետի բևեռային շառավիղն ու բևեռային անկյունը կոչվում են այդ կետի բևեռային կոորդինատներ: Պայմանավորվում ենք կետի բևեռային կոորդինատները գրել կետը նշանակող տառից հետո՝ փակագծերում, ցույց տալով նախ r-ը, ապա φ-ն՝ $M(r, \varphi)$:

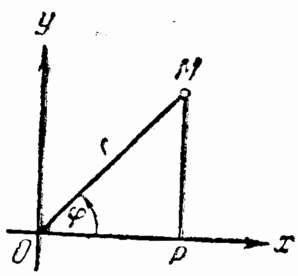
Օ ր ի ն ա կ: Բևեռային սիստեմում կառուցել $A\left(2, \frac{3}{4}\pi\right)$ կետը:

O բևեռից տանենք մի առանցք, որը բևեռային առանցքի հետ կազմի $\frac{3}{4}\pi$ անկյուն (այլ խոսքով՝ բևեռային առանցքը պտտենք $\frac{3}{4}\pi$ անկյունով) և այդ առանցքի վրա դրական ուղղությամբ O բևեռից սկսած վերցնենք OA հատվածը, որի երկարությունը հավասար է 2 միավորի: Այդ հատվածի A ծայրը կլինի որոնելի կետը (գծ. 25):

Կարելի է կապ հաստատել միևնույն կետի դեկարտյան և բևեռային կոորդինատների միջև: Դիցուք տված են կոորդինատների դեկարտյան սիստեմ և բևեռային սիստեմ այնպես, որ բևեռը



Գծ. 25



Գծ. 26

գտնվում է դեկարտյան սիստեմի սկզբնակետում, իսկ բևեռային առանցքը համընկնում է աբսցիսների առանցքի հետ (գծ. 26):

Հարթության M կամայական կետի դեկարտյան կոորդինատները նշանակենք x, y, բևեռային կոորդինատները՝ r, φ։ Մենք գիտենք (գլ. I, § 9 (14′) բանաձևեր), որ՝

$$x=\text{պր}_x\overline{OM},$$

$$y=\text{պր}_y\overline{OM},$$

իսկ մյուս կողմից (նույն տեղը, (12) բանաձևեր)՝

$$\text{պր}_x\overline{OM}=r\cos\varphi,$$

$$\text{պր}_y\overline{OM}=r\sin\varphi։$$

Հետևաբար՝

$$\left.\begin{array}{l} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi։ \end{array}\right\} \tag{19}$$

Այս բանաձևերն M կետի դեկարտյան կոորդինատներն արտահայտում են նույն կետի բևեռային կոորդինատների միջոցով։ Բևեռային կոորդինատները դեկարտյան կոորդինատներով արտահայտելու համար (19) հավասարումներից յուրաքանչյուրի երկու մասերը քառակուսի բարձրացնենք և ապա անդամ առ անդամ գումարենք։ Կստանանք՝

$$x^2+y^2=r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi),$$

այսինքն՝

$$r^2=x^2+y^2,$$

որտեղից՝

$$r^2=\sqrt{x^2+y^2}\,։ \tag{20}$$

Այնուհետև նույն (19) հավասարումներից ստանում ենք՝

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}\,։ \tag{21}$$

Այս բանաձևով որոշվում է φ բևեռային անկյունը, ընդ որում φ-ի համար ստացվում է երկու արժեք (հիշենք, որ $-\pi<\varphi\leqslant\pi$), որոնք գտնվում են տարբեր քառորդներում։ Քանի որ $y=r\sin\varphi$, ուստի φ անկյան այդ երկու արժեքներից պետք է ընտրել այն, որի համար սինուսը կունենա նույն նշանը, ինչ որ ունի y-ը։

Օրինակ։ Տված են M կետի դեկարտյան կոորդինատները՝ $x=1$, $y=-1$։ Գտնել այդ կետի բևեռային կոորդինատները։

Ըստ (20) և (21) բանաձևերի ունենք՝

$$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},\qquad \operatorname{tg}\varphi=-1։$$

$\varphi=\frac{3}{4}\pi$ և $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ երկու արժեքներից պետք է վերցնել $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ արժեքը, քանի որ sin φ-ն այդ դեպքում պետք է ունենա բացասական նշան: Այդպիսով, բևեռային կոորդինատները կլինեն՝

$$r=\sqrt{2}, \qquad \varphi=-\frac{\pi}{4}:$$

Դիտողություն: Մեր մուծած բևեռային կոորդինատների համար $r\geqslant 0, -\pi<\varphi\leqslant\pi$: Սակայն այդպիսի սահմանափակումը երբեմն ձեռնտու չէ, ուստի հետագայում մենք կենթադրենք, որ r-ը և φ-ն կարող են ցանկացած արժեքներ ստանալ $-\infty$-ից մինչև $+\infty$: Այդ դեպքում r և φ բևեռային կոորդինատների օգնությամբ կետի կառուցումը պայմանավորվում ենք կատարել հետևյալ ձևով:

O բևեռով տանում ենք մի առանցք, որը բևեռային առանցքի հետ կազմի φ անկյուն (այլ խոսքով, բևեռային առանցքը պտտում ենք φ անկյունով, հարկ եղած դեպքում մի քանի լրիվ պըտույտներ կատարելով): Այնուհետև, կառուցած առանցքի վրա, բևեռից սկսած, վերցնում ենք $|r|$ երկարությամբ OM հատված՝ առանցքի դրական ուղղությամբ, եթե $r>0$, և բացասական ուղղությամբ, եթե $r<0$: Այդ հատվածի M ծայրը կլինի որոնելի կետը: Ակներև է, որ այսպիսի կառուցման դեպքում M կետի բևեռային շառավիղը հավասար է այն $\overline{OM}$ հատվածի մեծությանը, որը գտնվում է բևեռային առանցքի հետ φ անկյուն կազմող առանցքի վրա: Ճական է, որ ցանկացած r և φ իրական թվերի զույգին համապատասխանում է միայն մեկ M կետ: Հենց այդ պատճառով էլ այդ թվերը ծառայում են որպես կետի կոորդինատներ:

Նկատենք, որ (19) բանաձևերն իրավացի են մնում ոչ միայն $r\geqslant 0$, $-\pi<\varphi\leqslant\pi$ դեպքում, այլև ընդհանուր դեպքում: Այդ ապացուցելու համար կարելի է օգտվել § 9-ի (13) բանաձևերից, որոնք $\overline{OM}$ հատվածի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա արտահայտում են նրա r մ ե ծ ու թ յ ա ն և Ox առանցքով ու այն առանցքով կազմված φ անկյունով, որի վրա գտնվում է $\overline{OM}$ ուղղությամբ օժտված հատվածը: Այդ ժամանակ $r^2=x^2+y^2$ բանաձևից r-ը գտնելիս արմատը կարելի է վերցնել ցանկացած նշանով՝

$$r=\pm\sqrt{x^2+y^2}, \qquad (20')$$

որից հետո φ անկյունը կարելի է գտնել (21) բանաձևով, ընդ որում այնպես, որպեսզի $\sin\varphi$-ն ունենա նույն նշանը, ինչ որ $\frac{y}{r}$ կոտորակը (քանի որ $y=r\sin\varphi$):

Վարժություններ[1]

1. Կառուցել այն կետերը, որոնք տվյալ մասշտաբի դեպքում որոշվում են հետևյալ կոորդինատներով՝

$$x=2, \quad y=5, \qquad\qquad x=3, \quad y=-3,$$

$$x=0, \quad y=4, \qquad\qquad x=3, \quad y=-4,$$

$$x=-3, \quad y=0, \qquad\qquad x=\sqrt{2}, \quad y=-1:$$

2. Տրված է մի կետ, որը որոշվում է $x=5$, $y=-2$ կոորդինատներով։ Գտնել այն կետի կոորդինատները, որը տվածին սիմետրիկ է աբսցիսների առանցքի նկատմամբ։

3. Գտնել այն B կետը, որը սիմետրիկ է $A(2, -4)$ կետին I և III կոորդինատային անկյունների կիսորդի նկատմամբ։

4. Գտնել այն կետի կոորդինատները, որը սիմետրիկ է $A(a, b)$ կետին՝ աբսցիսների առանցքի նկատմամբ։

5. Գտնել այն կետի կոորդինատները, որը սիմետրիկ է $A(a, b)$ կետին՝ օրդինատների առանցքի նկատմամբ։

6. Գտնել այն կետի կոորդինատները, որը սիմետրիկ է $A(a, b)$ կետին՝ կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ։

7. Ցույց տալ, որ այն A_2 կետը, որը I և III կոորդինատային անկյունների կիսորդի նկատմամբ սիմետրիկ է $A_1(a, b)$ կետին, ունի (b, a) կոորդինատները։

8. Տված է մի քառակուսի, որի կողմը հավասար է 2 միավորի։ Ինչի՞ հավասար կլինեն այդ քառակուսու գագաթների կոորդինատները, եթե որպես կոորդինատային առանցքներ ընտրենք նրա՝ իրար ո՛չ զուգահեռ որևէ երկու կողմերը։

9. Տված է մի քառակուսի, որի կողմը հավասար է 2 միավորի։ Ինչի՞ հավասար կլինեն նրա գագաթների կոորդինատները, եթե որպես կոորդինատային առանցքներ ընտրենք այդ քառակուսու անկյունագծերը։

10. Տված է մի շեղանկյուն (ռոմբ), որի կողմը հավասար է 5 միավորի, իսկ անկյունագծերից մեկը՝ 6 միավորի։ Ինչի՞ հավասար կլինեն նրա գագաթների կոորդինատները, եթե որպես կոորդինատային առանցքներ ընդունենք այդ շեղանկյան անկյունագծերը։

11. Գտնել a միավոր կողմ ունեցող կանոնավոր վեցանկյան գագաթների կոորդինատները, եթե կոորդինատների սկզբնակետը գտնվում է վեցանկյան կենտրոնում և աբսցիսների առանցքն անցնում է երկու հակադիր գագաթներով։

12. Կետը, շարժվելով ուղիղ գծով, $A(-3, -2)$ կետից տեղափոխվել է $B(4, 5)$ կետը։ Գտնել անցած ճանապարհի երկարությունը և այն α անկյունը, որ շարժման ուղղությունը կազմում է Ox առանցքի հետ։

13. $A(1, 1)$, $B(-1, 2)$ և $C(3, 3)$ գագաթներ ունեցող եռանկյան ներքին անկյունների թվում կա՞ արդյոք բութ անկյուն։

---

1 Վարժությունների պատասխանները բերված են գրքի վերջում. աստղիկով նշված խնդիրների համար տրված են նաև լուծումները։

14. Ապացուցել, որ A(3, 2), B(6, 5), C(1, 10) *գագաթներ ունեցող եռանկյունը ուղղանկյուն է։*

15. Գտնել A(2, 3), B(—3, 3), C(0, —1) *գագաթներ ունեցող եռանկյան պարագիծը։*

16. Գտնել A(2, 1), B(—2, 3), C(0, 3) *գագաթներ ունեցող եռանկյան միջնագծերի երկարությունները։*

17. Տրված է մի հատված (1, —1) կետից մինչև (—4, 5) կետը։ Նույն ուղղությամբ մինչև ո՞ր կետը պետք է շարունակել այդ հատվածը, որպեսզի նրա երկարությունը եռապատկվի։

18. Աբսցիսների առանցքի վրա գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացած կոորդինատների սկզբնակետից և (—5, 3) կետից։

19. Գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացած կոորդինատային առանցքներից և (3, 6) կետից։

20. Գտնել այն կետը, որը գտնվում է 10 միավոր հեռավորության վրա աբսցիսների առանցքից և (—5, 2) կետից։

21. Ուղիղ գիծն անցնում է A(2, 4) *և* B(5, 1) *կետերով։ Նրա վրա գտնել այն կետը, որի աբսցիսը հավասար է —3-ի։*

22. (x, 5) *և* (—2, y) *կետերի հեռավորությունը (1, 1) կետում կիսվում է։ Գտնել այդ կետերը։*

23. (0, 2) և (8, 0) կետերը միացնող հատվածը բաժանել նույն հարաբերությամբ, ինչ հարաբերություն որ կա այդ կետերի՝ սկզբնակետից ունեցած հեռավորությունների միջև։

24. Տված են եռանկյան երկու գագաթների կոորդինատները՝ $x_1=3$, $y_1=7$ *և* $x_2=-2$, $y_2=5$*։ Երրորդ գագաթը գտնել այնպես, որպեսզի նրանով անցնող կողմերի միջնակետերը գտնվեն կոորդինատային առանցքների վրա։*

25. Եռանկյան հիմքը հավասար է a*-ի, բարձրությունը* h*-ի, իսկ մյուս երկու կողմերից մեկը՝* b*-ի։ Հիմքն ու բարձրությունն ընդունելով որպես կոորդինատային առանցքներ, գտնել երրորդ կողմի միջնակետի կոորդինատները։*

26. Գտնել այն եռանկյան միջնագծերի հատման կետը, որի գագաթներն են՝* A(1, 2), B(0, 5), C(—2, 3)*։*

27. Եռանկյան գագաթներն են՝ (5, 0), (3, —8), (1, —4)։ Գտնել այն կետերը, որտեղ եռանկյան միջնագծերը բաժանվում են երեք հավասար մասերի։

28. Եռանկյան ծանրության կենտրոնի կոորդինատներն արտահայտել նրա գագաթների կոորդինատների միջոցով։

29. Ցույց տալ, որ եթե սիստեմը բաղկացած է n *նյութական կետերից՝* $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, . . ., $A_n(x_n, y_n)$*, որտեղ կենտրոնացած են համապատասխանաբար* m_1, m_2, . . . m_n *զանգվածներ, ապա այդ սիստեմի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները կորոշվեն հետևյալ բանաձևերով՝*

$$x=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}, \qquad y=\frac{y_1m_1+y_2m_2+\ldots+y_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}.$$

30. Գտնել այն եռանկյան մակերեսը, որի գագաթներն են՝ A(0, 1), B (3, 4), C(—1, —1)*։*

31. Հաշվել այն քառանկյան մակերեսը, որի գագաթներն են՝ A(—2,—3), B(—1, 4), C(3, 3) *և* D(6,—1)*։*

32. Իմանալ, գտնվո՞ւմ են արդյոք մեկ ուղիղի վրա (2, 3), (5, 7), (11, 15) կետերը։

33. Որոշել P ուժի մեծությունը և ուղղությունը, գիտենալով, որ կոորդինատային առանցքների վրա նրա պրոյեկցիաները հավասար են՝ $P_x=5$, $P_y=12$։

34. Գտնել լարից պատրաստած եռանկյան ծանրության կենտրոնը, եթե եռանկյան գագաթներն են՝ $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(3, 4)$։

35. Համասեռ տախտակն ունի ուղղանկյուն սեղանի ձև, որի մեծ հիմքը հավասար է a-ի, փոքր հիմքը՝ b-ի, իսկ բարձրությունը h-ի։ Գտնել նրա ծանրության կենտրոնի կոորդինատները (հաստությունը հաշվի չառնել)։

36. Գտնել այն կետերի դեկարտյան կոորդինատները, որոնց բևեռային կոորդինատներն են՝

$$A\left(\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right),\qquad B\left(4,\ \frac{\pi}{3}\right),$$

$$C\left(4\sqrt{2},\ \frac{3\pi}{4}\right),\qquad D\left(2,\ -\frac{\pi}{6}\right),\qquad E\left(-3,\ \frac{2\pi}{3}\right)։$$

37. Գտնել այն կետերի բևեռային կոորդինատները, որոնց դեկարտյան կոորդինատներն են՝

$$A(3, -2),\quad B(-1, -1),\quad C(3, 0),\quad D(0, -4)։$$

ԳԼՈՒԽ II

ԳԾԵՐ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

§ **1. Տրված գծերի հավասարումները կազմելը։** *Նախորդ գլխում ցույց տրվեց, որ հարթության յուրաքանչյուր կետին համապատասխանում է թվերի մի կարգավորված զույգ և, հակադարձաբար, թվերի յուրաքանչյուր կարգավորված զույգին համապատասխանում է հարթության մի որոշակի կետ։*

Այժմ ցույց տանք, որ հարթության վրա գծերին համապատասխանում են հավասարումներ երկու փոփոխականներով։ Գծերի և հավասարումների միջև հաստատվող այդ կապը հնարավորություն կտա գծերի երկրաչափական հատկությունների ուսումնասիրությունը հանգեցնել նրանց համապատասխանող հավասարումների անալիտիկ հատկությունների հետազոտությանը։

Անալիտիկ երկրաչափության մեջ ամեն մի գիծ դիտարկում են որպես կետերի երկրաչափական տեղ։ Գծի, որպես կետերի երկրաչափական տեղի, սահմանման մեջ պարունակվում է այն հատկությունը, որն ընդհանուր է նրա բոլոր կետերի համար։ Այսպես, օրինակ, C *կենտրոն և* R *շառավիղ ունեցող շրջանագիծը կարելի է դիտել որպես հարթության այնպիսի կետերի երկրաչափական տեղ, որոնք* C *կետից* R *հեռավորության վրա են գտնվում։ Այդ նշանակում է, որ շրջանագծի վրա գտնվող յուրաքանչյուր* M *կետի համար* $MC=R$, *իսկ եթե* M *կետը շրջանագծի վրա չի գտնըվում, ապա նրա համար* $MC\neq R$։

Հարթության վրա վերցնենք մի որևէ գիծ, այդ հարթության մեջ ընտրենք կոորդինատների դեկարտյան սիստեմ և դիտարկենք մեր վերցրած գծի ցանկացած կետը։ Եթե այդ կետը շարժվի տըրված գծի վրայով, ապա նրա x *և* y *կոորդինատները կփոփոխվեն, մնալով, սակայն, միմյանց հետ կապված մի որոշ պայմանով, որը բնութագրում է տված գծի կետերը։ Այսպիսով, մենք* x*-ի և* y*-ի* միջև կստանանք մի որոշ առնչություն, որը տեղի կունենա միայն ա՛յն դեպքում, երբ կետը շարժվի տված գծի վրայով, և կխախտվի՛, եթե կետը գծից դուրս գա:

Հետևաբար, հարթության վրա գծին համապատասխանում է մի որոշ հավասարում x և y երկու փոփոխականներով:

x և y փոփոխականների միջև այնպիսի հավասարումը, որին բավարարում են տրված գծի վրա գտնվող յուրաքանչյուր կետի կոորդինատներ և չեն բավարարում այդ գծի վրա չգտնվող և ո՛չ մի կետի կոորդինատներ, կոչվում է այդ գծի հավասարում:

Գծի կամայական կետի x և y կոորդինատները, որ մտնում են այդ հավասարման մեջ, կոչվում են ընթացիկ կոորդինատներ:

Դիտարկենք մի քանի պարզագույն օրինակներ տրված գծերի հավասարումները կազմելու վերաբերյալ:

Օ ր ի ն ա կ 1. Գտնել $A(1, 2)$ և $B(-3, 4)$ կետերը միացնող հատվածի միջնուղղահայացի հավասարումը:

Այդ ուղիղը մենք դիտարկենք որպես A և B կետերից հավասարապես հեռացած կետերի երկրաչափական տեղ: Դիցուք $M(x, y)$-ը կամայական կետ է այդ ուղղի վրա: Այդպիսի բոլոր կետերի ընդհանուր հատկությունը կարտահայտի հետևյալ հավասարումը՝

$$AM = BM \tag{1}$$

(իսկ եթե M-ը չգտնվի նշված ուղղի վրա, ապա $AM \neq BM$): Ուղղի հավասարումը կազմելու համար մնում է AM և BM հեռավորություններն արտահայտել M կետի կոորդինատներով և ստացված արտահայտությունները տեղադրել (1) հավասարության մեջ: Այդ ժամանակ՝

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}:$$

Այս էլ հենց տված ուղղի հավասարումն է: Նրա երկու մասերը քառակուսի բարձրացնելուց և պարզեցումներից հետո կստանանք՝

$$2x - y + 5 = 0:$$

Օ ր ի ն ա կ 2. Կազմել R շառավիղ ունեցող շրջանագծի հավասարումը:

Կոորդինատային առանցքներն ընտրենք կամայապես: Այդ դեպքում շրջանագծի C կենտրոնը կունենա որոշ a և b կոորդինատներ: Շրջանագծի M կամայական կետի կոորդինատները նշանակելով x և y, այդ բոլոր M կետերի համար ընդհանուր հատկությունն արտահայտենք անալիտիկորեն: Շրջանագծի սահմանումից հետևում է, որ M կետի հեռավորությունը C կենտրոնից (գծ. 27) հաստատուն մեծություն է և հավասար է R-ի, այսինքն՝

$$CM = R: \tag{2}$$

CM-ը որոշելով որպես C և M կետերի հեռավորություն (գլ. I, § 5), մենք (2) հավասարությունը կարտահայտենք M կետի ընթացիկ կոորդինատների միջոցով, այն է՝

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R: \tag{2'}$$

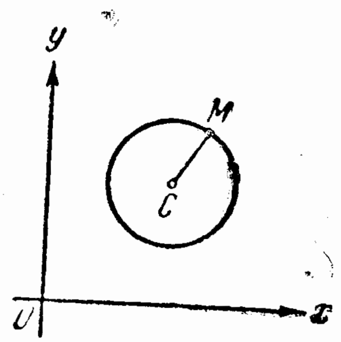
Այս հավասարության երկու մասերը քառակուսի բարձրացնելով և արմատից ազատելով, շրջանագծի հավասարումը կստանանք հետևյալ վերջնական տեսքով՝

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\text{։} \qquad (3)$$

Այս հավասարման մեջ a *և* b *հաստատունները շրջանագծի կենտրոնի կոորդինատներն են,* R*-ը՝ շառավիղն է, իսկ* x *և* y *փոփոխականները շրջանագծի կամայական կետի կոորդինատներն են։*

Մասնավորապես, երբ որպես կոորդինատների սկզբնակետ ընտրված է շրջանագծի կենտրոնը, կունենանք $a=b=0$*, և (3) հավասարումն ավելի պարզ տեսք կընդունի՝*

$$x^2+y^2=R^2\text{։}$$



Գծ. 27

§ 2. Հավասարումների երկրաչափական իմաստը։ *Մենք տեսանք, որ յուրաքանչյուր գիծ, որ դիտարկվում է որպես կետերի երկրաչափական տեղ, որոշվում է մի հավասարումով նրա կետերի կոորդինատների միջև։ Հակադարձաբար, յուրաքանչյուր հավասարում* x *և* y *երկու փոփոխականների միջև, ընդհանրապես ասած, որոշում է մի գիծ՝ որպես այնպիսի կետերի երկրաչափական տեղ, որոնց* x *և* y *կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը։*

Իրոք, դիտարկենք մի որևէ հավասարում x *և* y *փոփոխականների միջև։ Նրա բոլոր անդամները տեղափոխելով ձախ մասը, հավասարումը կգրենք այսպիսի տեսքով՝*

$$F(x,\ y)=0, \qquad (4)$$

որտեղ F*-ը երկու փոփոխականների ֆունկցիայի նշանն է։ Դիցուք, օրինակ,* x*-ի յուրաքանչյուր տված թվային արժեքի դեպքում, (4) հավասարումը, որպես* y *անհայտի նկատմամբ գրված հավասարում, ունի երկու իրական արմատ։* x *փոփոխականին տանք* $x=a$ *կամայական թվային արժեքը և (4) հավասարումից գտնենք* y*-ի համապատասխան արժեքները։* y*-ը որոշելու համար ստանում ենք մեկ անհայտով հավասարում՝*

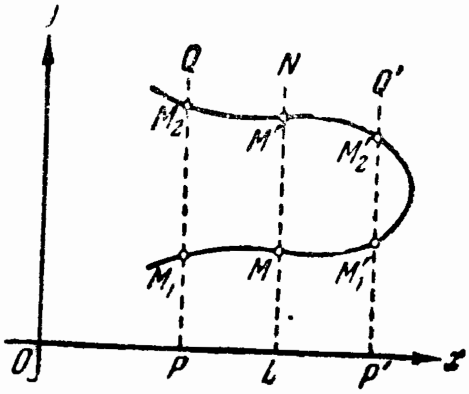
$$F(a,\ y)=0\text{։} \qquad (5)$$

Դիցուք այս հավասարումն ունի $y=b_1$ *և* $y=b_2$ *արմատները։ 28-րդ գծագրում նշենք* M_1 *և* M_2 *կետերը, որոնց* (a, b_1) *և* (a, b_2) *կոորդինատները բավարարում են տված (4) հավասարմանը։*

Այժմ x *փոփոխականին տանք մի այլ՝* $x=a'$ *թվային արժեք և* y*-ի համապատասխան արժեքները որոշենք*

$$F(a',y)=0 \qquad (5')$$

հավասարումից։ Թող այս հավասարման արմատները լինեն՝ $y=b'_1$ և $y=b'_2$։ Գծագրում նշենք M'' և M'_2 կետերը, որոնց (a', b'_1) և (a', b'_2) կոորդինատները բավարարում են տված հավասարմանը։ Եթե x փոփոխականը անընդհատ փոփոխենք a արժեքից մինչև a_1 արժեքը, ապա LN ուղիղն ինքն իրեն զուգահեռ կտեղափոխվի, ելնելով PQ դիրքից և հասնելով P'Q' դիրքը, ընդ որում յուրաքանչյուր դիրքում նրա վրա կգտնվեն երկու կետեր, որոնց կոորդինատները կբավարարեն տված (4) հավասարմանը։ Այսպիսով, M և M' կետերը կգծեն մի գիծ։ Այդ գիծն ստացվում է որպես երկու շարժումների արդյունք. մի կողմից՝ LN ուղիղի ինքն իրեն զուգահեռ շարժվելու (x-ի փոփոխության) մյուս կողմից՝ M և M' կետերի՝ այդ ուղիղի վրա շարժվելու (y-ի փոփոխության) արդյունք։

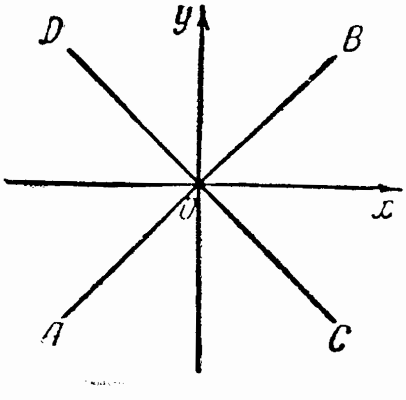


Գծ. 28

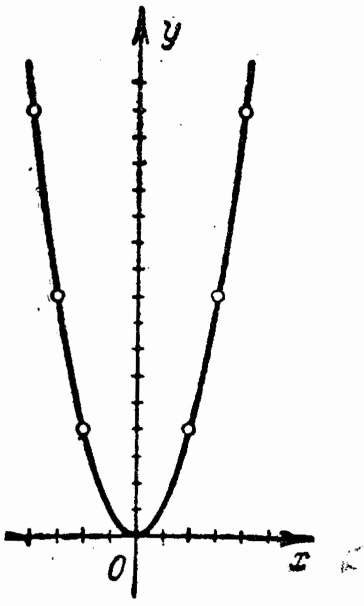
Ուրեմն, x և y կոորդինատների միջև գրված (4) հավասարումը որոշում է մի գիծ՝ որպես այնպիսի կետերի երկրաչափական տեղ, որոնց կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը։

Դիտարկենք մի քանի օրինակներ իրենց հավասարումներով տրված գծերի կառուցման վերաբերյալ։

Օրինակ 1. Կառուցել այն գիծը, որը որոշվում է $x-y=0$ հավասարումով։



Գծ. 29



x	y
—4	16
—3	9
—2	4
—1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Գծ. 30

Հավասարումը կարելի է արտագրել այսպես՝

$$y=x։$$

Ակներևորեն, այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց համար աբսցիսը հավասար է օրդինատին, իրենից ներկայացնում է I և III կոորդինատային անկյունների AB կիսորդը (գծ. 29)։ Հետևաբար, $x-y=0$ հավասարումը որոշում է հենց այդ կիսորդը։

Օ ր ի ն ա կ 2. Կառուցել այն գիծը, որը որոշվում է $x+y=0$ հավասարումով։

Հեշտ է տեսնել, որ այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց համար $y=-x$, կլինի II և IV կոորդինատային անկյունների CD կիսորդը։ Հետևաբար, $x+y=0$ հավասարումը՝ այդ կիսորդի հավասարումն է (գծ. 29)։

Օ ր ի ն ա կ 3. Կառուցել այն գիծը, որը որոշվում է $x^2-y=0$ հավասարումով։

Այս հավասարման կոորդինատներից մեկն արտահայտենք մյուսով, օրինակ՝ y-ն արտահայտենք x-ով՝ $y=x^2$։ x-ին տանք զանազան կամայական արժեքներ, օրինակ՝ -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 և գտնենք y-ի համապատասխան արժեքները։ Այսպիսով, մենք կստանանք մի շարք կետեր։ Այդ կետերը նշենք հարթության վրա և անընդհատ գծով միացնենք (գծ. 30)։ Կըստանանք որոնելի կորը։

Դիտարկենք նաև հավասարումների մի քանի հատուկ տեսակներ։

1) Հավասարումը կարող է պարունակել կոորդինատներից միայն մեկը և, այնուամենայնիվ, որոշել մի որոշակի գիծ։

Դիցուք տված է $y-2=0$ կամ $y=2$ հավասարումը։ Այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց օրդինատները հավասար են 2-ի, ակներևորեն կլինի այն ուղիղը, որը զուգահեռ է OX առանցքին և վերջինից ունի 2 միավոր հեռավորություն։

Դրա նման, $x+1=0$ հավասարումը որոշում է մի ուղիղ, որը զուգահեռ է OY առանցքին և նրանից ունի -1 միավոր հեռավորություն։

2) Եթե $F(x, y)=0$ հավասարման ձախ մասը արտադրիչների է վերլուծվում, ապա յուրաքանչյուր արտադրիչն առանձին հավասարեցնելով զրոյի, կստանանք մի քանի նոր հավասարումներ, որոնցից ամեն մեկը կարող է որոշել մի գիծ։ Օրինակ, $x^2-y^2=0$ կամ $(x+y)(x-y)=0$ հավասարումը վերածվում է երկու հավասարումների՝ $x+y=0$ և $x-y=0$, որոնցից ամեն մեկը, ինչպես վերևում տեսանք, մի ուղիղ գիծ է. դրանք կոորդինատային անկյունների կիսորդներն են։

3) Մասնավոր դեպքում կարող է պատահել, որ x և y կոորդինատների միջև տված $F(x, y)=0$ հավասարումը որոշի այնպիսի երկրաչափական տեղ, որը բաղկացած է մեկ կամ մի քանի

առանձին կետերից։ Այսպես, օրինակ, $x^2+y^2=0$ հավասարումով որոշվում է միայն $O(0, 0)$ կետը, իսկ

$$(x^2-1)^2+(y^2-4)^2=0$$

հավասարումով՝

$$(1, 2),\ (1, -2),\ (-1, 2),\ (-1, -2)$$

չորս կետերից բաղկացած երկրաչափական տեղը։

4) Կարող է, վերջապես, պատահել, որ $F(x, y)=0$ հավասարումը կետերի ոչ մի երկրաչափական տեղ չորոշի, այսինքն՝ ոչ մի կետի կոորդինատներ չբավարարեն այդ հավասարմանը։ Այսպես, օրինակ՝

$$x^2+y^2+1=0$$

հավասարումը չի բավարարվում x և y կոորդինատների ոչ մի զույգ իրական արժեքներով։

Եթե հավասարումը բավարարվում է, ինչպես վերջին օրինակում, միայն այն դեպքում, երբ x և y փոփոխականներից թեկուզ մեկը կեղծ արժեք ունի, ապա ասում են, որ այդպիսի հավասարմանը համապատասխանում է կետերի կեղծ տեղ։

§ **3. Երկու հիմնական խնդիր.** 1 և 2 §-ներում շարադրվածից ծագում են հետևյալ երկու հիմնական խնդիրները։

I. Տրված է մի գիծ, որպես կետերի երկրաչափական տեղ։ Կազմել այդ գծի հավասարումը։

II. Տրված է հավասարումը x և y կոորդինատների միջև։ Կառուցել այդ հավասարումով որոշվող գիծը։

Հաջորդ գլխում մենք դիտարկելու ենք թե՛ մեկ և թե՛ մյուս խնդրի ընդհանուր լուծումը ուղիղ գծի համար։

§ **4. Երկու գծերի հատումը.** Երկրաչափական շատ խնդիրների թվում ամենակարևորներից մեկը՝ տված երկու գծերի հատման կետերը գտնելու խնդիրն է։ Դիցուք այդ գծերը որոշվում են հետևյալ հավասարումներով՝

$$f(x, y)=0 \text{ և } \varphi(x, y)=0.$$

Եթե գոյություն ունի դրանց հատման կետ, ապա նա, ակներևորեն, գտնվում է թե՛ մեկ և թե՛ մյուս գծի վրա։ Հետևաբար, այդպիսի կետի կոորդինատները պետք է բավարարեն այդ հավասարումներից յուրաքանչյուրին։ Հակադարձաբար, ամեն մի կետ, որի կոորդինատները բավարարում են այդ երկու հավասարումներին միաժամանակ, գտնվում է երկու կորի վրա էլ։ Այստեղից հետևում է, որ տված երկու գծերի հատման կետերը գտնելու համար, պետք է այդ գծերի հավասարումները միատեղ լուծել: Հավասարումների այդ սիստեմի յուրաքանչյուր իրական լուծումը կտա հատման մի կետ: Իսկ եթե պարզվի, որ հավասարումների այդ սիստեմը համատեղ սիստեմ չէ, կամ նրա բոլոր լուծումների մեջ x և y թվերից թեկուզ մեկը կեղծ է, ապա այդ կնշանակի, որ տված գծերը չեն հատվում:

Օրինակ: Այս գլխի § 1-ում մենք արտածեցինք այն շրջանագծի հավասարումը, որի շառավիղը հավասար է R-ի և կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, այն է՝

$$x^2+y^2=R^2:$$

Եթե վերցնենք $R=5$, ապա այդ շրջանագծի հավասարումը կլինի՝

$$x^2+y^2=25:$$

Նույն պարագրաֆի 1-ին օրինակում արտածեցինք մի ուղիղի հավասարում՝

$$2x-y+5=0:$$

Գտնենք այս երկու գծերի հատման կետերը:

Դրա համար պետք է լուծել հետևյալ հավասարումների սիստեմը՝

$$x^2+y^2=25,$$

$$2x-y+5=0:$$

Վերջին հավասարումից ունենք՝

$$y=2x+5:$$

Տեղադրելով y-ի այս արտահայտությունը առաջին հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$x^2+(2x+5)^2=25:$$

Պարզեցումից հետո կունենանք՝

$$x^2+4x=0,$$

որտեղից՝

$$x_1=0 \text{ և } x_2=-4:$$

x-ի այս արժեքները տեղադրելով y-ի համար գտած արտահայտության մեջ, կստանանք՝

$$y_1=5 \text{ և } y_2=-3:$$

Հետևաբար, տված գծերն ունեն հատման երկու կետ՝ $(0,5)$ և $(-4, -3)$

§ 5. Գծերի պարամետրական հավասարումները: Որոշ դեպքերում, գծի հավասարումը կազմելիս, ոչ թե ընթացիկ կոորդինատներն են միմյանց հետ կապում մեկ հավասարմով, այլ յուրաքանչյուր կոորդինատն առանձին արտահայտում են որպես նոր փոփոխականի, օրինակ՝ t-ի ֆունկցիա, ստանալով այսպիսի հավասարումներ՝

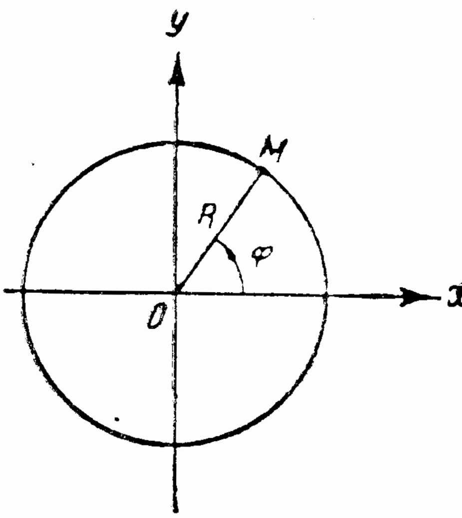
$$\begin{aligned} x&=\varphi(t), \\ y&=\psi(t): \end{aligned} \tag{6}$$

Այս հավասարումները կազմում են այնպես, որ t-ի միևնույն արժեքին համապատասխանող x և y արժեքները հանդիսանան տված գծի վրա գտնվող կետի կոորդինատներ։ t-ն փոփոխելիս, փոփոխվում են նաև x, y կոորդինատները, հետևաբար՝ նրանց համապատասխանող կետը շարժվում է տված գծի վրա։ (6) հավասարումները կոչվում են գծի **պարամետրական հավասարումներ**, իսկ t-ն՝ **փոփոխական պարամետր**։

Եթե (6) հավասարումներից t պարամետրն արտաքսենք, կստանանք հավասարում x և y կոորդինատների միջև՝ $F(x, y)=0$ տեսքով։

Օ ր ի ն ա կ։ Կազմենք R շառավիղ ունեցող այն շրջանագծի պարամետրական հավասարումները, որի կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում (գծ. 31)։ Հեշտ է տեսնել, որ շրջանագծի կետի ընթացիկ կոորդինատներն այն φ անկյան ֆունկցիաներ են, որն այդ կետից տարված շառավիղը կազմում է Ox առանցքի հետ։ Հետևաբար, կարող ենք այդ φ անկյունն ընդունել որպես փոփոխական պարամետր և x, y ընթացիկ կոորդինատներն արտահայտել նրա միջոցով։ Շրջանագծի վրա M կետի ամեն մի դիրքում տեղի կունենան հետևյալ հավասարությունները (գլ. I, § 9)՝

$$x=R\cos\varphi,$$
$$y=R\sin\varphi։$$



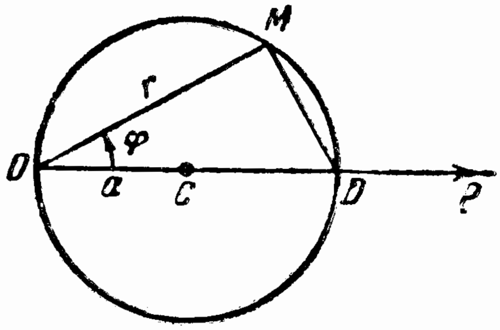
Գծ. 31

Հենց սրանք էլ կլինեն շրջանագծի պարամետրական հավասարումները։ Եթե ցանկանանք, սրանցից կարելի է ստանալ շրջանագծի հավասարումը նախորդից մեզ հայտնի տեսքով։ Դրա համար պետք է φ-ն արտաքսել։ Հավասարումների երկու մասերը քառակուսի բարձրացնելով և գումարելով, կստանանք մեզ արդեն ծանոթ հավասարումը՝

$$x^2+y^2=R^2։$$

§ 6. Գծերի հավասարումները բևեռային կոորդինատներով։ Մենք դիտարկել ենք գծերի հավասարումները դեկարտյան կոորդինատներով, սակայն կարելի է խոսել նաև գծերի՝ բևեռային կոորդինատներով հավասարումների մասին։ Կոորդինատների բևեռային սիստեմում գծի հավասարում մենք անվանելու ենք այնպիսի հավասարումը r և φ փոփոխականների միջև, որին բավարարում են տված գծին պատկանող ամեն մի կետի կոորդինատներ և որին չեն բավարարում այդ գծին չպատկանող ոչ մի կետի կոորդինատներ։ Դիտարկենք տված գծի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով գտնելու մի օրինակ։

Դիցուք պահանջվում է գտնել այն շրջանագծի հավասարումը, որն անցնում է բևեռով, ունի a շառավիղ և որի C կենտրոնը գտնըվում է բևեռային առանցքի վրա։ Շրջանագծի M կամայական կետն ուղիղ հատվածներով միացնենք O բևեռի և բևեռով անցնող տրամագծի D ծայրակետի հետ (գծ. 32)։ M կետի կոորդինատները կլինեն՝ φ անկյունը և OM հատվածի r երկարությունը։ Հիշենք, որ շրջանագիծը իր տրամագծի վրա հենվող ուղիղ անկյունների գագաթների երկրաչափական տեղն է։ Հետևաբար, OMD եռանկյունն ուղղանկյուն եռանկյուն է, ուստի և կստանանք՝



Գծ. 32

$$r = 2a\cos\varphi\text{։}$$

Հենց սա էլ շրջանագծի մեր որոնած հավասարումն է[1]։

Նկատենք, որ տված գծի հավասարման տեսքը կախված է բևեռի և բևեռային առանցքի ընտրությունից։ Այսպես, եթե բևեռն ընտրենք a շառավիղ ունեցող շրջանագծի կենտրոնում, ապա շրջանագծի բոլոր կետերի (և միայն այդ կետերի) համար բևեռային շառավիղը կունենա միևնույն a արժեքը՝ $r=a$. այս հավասարումն էլ հենց կլինի այն շրջանագծի հավասարումը, որն ունի a շառավիղ և որի կենտրոնը գտնվում է բևեռում։ Բևեռային φ անկյունը չի մտնում այս հավասարման մեջ, մնալով կամայական։

Գծի ձևն իր հավասարման օգնությամբ հետազոտելիս հաճախ է կարիք լինելու օգտվել բևեռային կոորդինատներից։ Այդպես է հարմար ամեն անգամ, երբ գծի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով ավելի պարզ է, քան դեկարտյան կոորդինատներով։ Որպես օրինակ դիտարկենք երկու գիծ, որոնք կիրառություններում հաճախ են հանդիպում։

Օրինակ 1. Արքիմեդի սպիրալ (գալարագիծ) կոչվող գիծը բևեռային կոորդինատներով որոշվում է հետևյալ հավասարումով՝

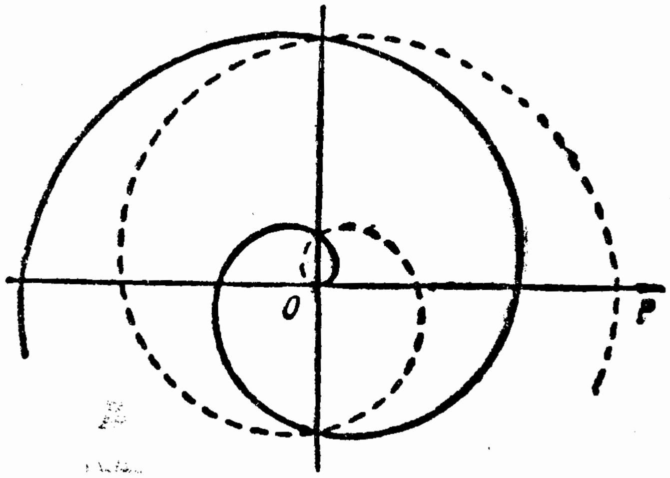
$$r = a\varphi,$$

որտեղ a-ն դրական հաստատուն է։ Այդ գիծը գծելու համար, φ-ին տանք

[1] Այս հավասարումն արտածելիս r-ը դրական ենք համարել։ Սակայն, φ-ի որոշ արժեքների դեպքում հավասարումից r-ի համար կստացվեն նաև բացասական արժեքներ։ Այնուամենայնիվ, հեշտությամբ կարելի է ստուգել, որ այդ դեպքում ևս ստացվող կետերը գտնվում են նույն շրջանագծի վրա։

կամայական արժեքներ և գտնենք r-ի համապատասխան արժեքները։ Տված հավասարմանը բավարարող (r, φ) արժեքների ստորև բերված աղյուսակը ցույց է տալիս, որ երբ φ անկյունն աճում է $\frac{\pi}{2}$ տարբերություն ունեցող թվաբանական պրոգրեսիայով, r բևեռային շառավիղը նույնպես աճում է թվաբանական պրոգրեսիայով, որի տարբերությունը հավասար է $a\frac{\pi}{2}$-ի։ Բացի դրանից, նկատենք, որ այդ գծի դրական կոորդինատներ ունեցող յուրաքանչյուր (r, φ) կետին նույն գծի վրա համապատասխանում է (—r, —φ) կետ, այսինքն՝ Արքիմեդի սպիրալը սիմետրիկ դասավորություն ունի բևեռով անցնող և բևեռային առանցքին ուղղահայաց ուղիղի նկատմամբ։ Գծ. 33-ում

γ	r
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}a$
π	πa
$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi a$
2π	$2\pi a$



Գծ. 33

անընդհատ գծով պատկերված է φ-ի դրական արժեքներին համապատասխանող ճյուղը, իսկ կետագծով՝ բացասական արժեքներին համապատասխանող ճյուղը։

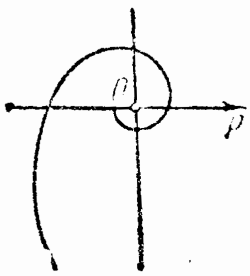
Օրինակ 2. Բևեռային կոորդինատներով՝

$$r = ae^{k\varphi}$$

հավասարումով որոշվող գիծը, որտեղ a-ն և k-ն դրական հաստատուններ են, կոչվում է լոգարիթմական սպիրալ։

Այդ գիծը գծելու համար φ-ին կամայական արժեքներ տանք և հաշվենք r-ի համապատասխան արժեքները։ Տված հավասարմանը բավարարող (r, φ) արժեքների ստորև բերված աղյուսակը ցույց է տալիս, որ երբ φ անկյունն աճում է $\frac{\pi}{2}$ տարբերություն ունեցող թվաբանական պրոգրեսիայով, r բևեռային շառավիղն այս անգամ աճում է երկրաչափական պրոգրեսիայով, որի հայտարարը հավասար է $e^{k\cdot\frac{\pi}{2}}$-ի։ Երբ φ անկյունն անվերջորեն աճում է, r-ը նույնպես անվերջորեն աճում է։ Երբ φ անկյունը ձգտում է բացասական անվերջության, բևեռային շառավիղը ձգտում է զրոյի և կորն անսահմանորեն մոտենում է O բևեռին, փաթաթվելով նրա շուրջը։ Այդ պատճառով O կետը կոչվում է լոգարիթմական սպիրալի ասիմպտոտական կետ (գծ. 34)։

Երբեմն կարիք է լինում գծի դեկարտյան կոորդինատներով տրված հավասարումից ստանալ նույն գծի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով կամ ընդհակառակը: Այդպիսի դեպքերում պետք է օգտագործել դեկարտյան և բևեռային կոորդինատների կապն արտահայտող բանաձևերը (գլ. I, § 11):



φ	r
$-\pi$	$ae^{-k\pi}$
$-\frac{\pi}{2}$	$ae^{-k\pi/2}$
0	a
$\frac{\pi}{2}$	$ae^{k\pi/2}$
π	$ae^{k\pi}$

Գծ. 34

Օ ր ի ն ա կ: Շրջանագծի

$$r=2a\cos\varphi$$

բևեռային կոորդինատներով հավասարումը գրել դեկարտյան կոորդինատներով:

r-ը և $\cos\varphi$-ն արտահայտենք x-ով ու y-ով՝

$$r=\pm\sqrt{x^2+y^2},\quad \cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}:$$

Այս արտահայտությունները տեղադրելով տված հավասարման մեջ, որոշ պարզեցումներից հետո կստանանք՝

$$x^2+y^2-2ax=0:$$

Վարժություններ

1*. Կառուցել $x^2y=4a^2(2a-y)$ հավասարումով տրված կորը: (Այս կորը կոչվում է Անյեզիի գանգուր):

2*. Կառուցել $r=10\sin 2\varphi$ հավասարումով տրված կորը: (Այս կորը կոչվում է քառաթերթ վարդ):

3. Կառուցել հետևյալ հավասարումներով տրված կորերը՝

ա) $y=x^3$, բ) $y=x^5$, գ) $y=x^4$,

դ) $y=x^3+2$, ե) $y=\frac{1}{2}x^4-5$, զ) $y^2=x^3$:

4. Կառուցել այն կորերը, որոնք բևեռային կոորդինատներով տրված են հետևյալ հավասարումներով՝

ա) $r=a\sin 3\varphi$, բ) $r=a\cos 3\varphi$,

գ) $r=a\cos 2\varphi$, դ) $r=a(1-\cos\varphi)$:

5. *Կառուցել այն կորերը, որոնք բևեռային կոորդինատներով տրված են հետևյալ հավասարումներով՝*

ա) $r=2-\cos\varphi$, *բ)* $r=3-2\sin 2\varphi$, *գ)* $r=2-\sin 3\varphi$։

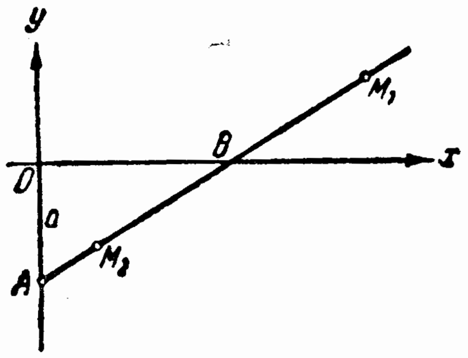
6. *Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարապես են հեռացած կոորդինատների սկզբնակետից և* $A(-5, 3)$ *կետից։*

7. *Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարապես են հեռացած* Ox *առանցքից և* $F(0, 4)$ *կետից։ Կառուցել այդ կորը։*

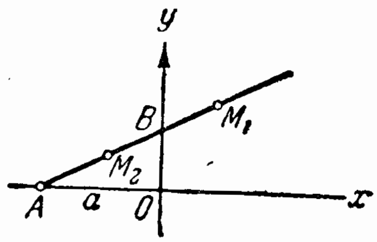
8. *Որոշել այն* M *կետի հետագիծը, որն այնպես է շարժվում, որ նրա հեռավորությունն* $A(3, 0)$ *կետից երկու անգամ փոքր է մնում* $B(-6, 0)$ *կետից ունեցած հեռավորությունից։*

9. *Որոշել այն* M *կետի հետագիծը, որն այնպես է շարժվում, որ նրա հեռավորությունն* $F(-1, 0)$ *կետից երկու անգամ փոքր է մնում* $x=-4$ *ուղղից ունեցած հեռավորությունից։*

10*. *Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որի՝ տված* P *և* Q *երկու կետերից ունեցած հեռավորությունների արտադրյալը հաստատուն մեծություն է և հավասար է* m^2*-ու։* P *և* Q *կետերի միջև հեռավորությունը հավասար է* $2n$*-ի։ (Կետերի այս երկրաչափական տեղը կոչվում է* Կասսինիի օվալ*)։ Կառուցել այդ գիծը։*



Գծ. 35



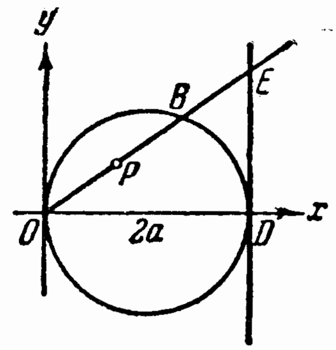
Գծ. 36

11*. *Կասսինիի օվալը (տե՛ս նախորդ վարժությունը)* $m=n$ *դեպքում կոչվում է* Բեռնուլիի լեմնիսկատ*։ Գտնել լեմնիսկատի հավասարումը՝ ա) դեկարտյան կոորդինատներով, բ) բևեռային կոորդինատներով։ Կառուցել այդ կորը։*

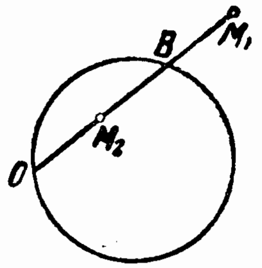
12. *Տրված է* Ox *ուղիղը և նրանից* a *հեռավորության վրա գտնվող* A *կետը (գծ. 35)։ Եթե* AB *ուղիղը պտտվի* A *կետի շուրջը, ապա այդ ուղիղի վրա գտնվող այն* M_1 *և* M_2 *կետերը, որոնք* AB *ուղիղի և* Ox *հիմնական ուղիղի հատման* B *կետից ունեն տրված* b *հեռավորությունը, կգծեն մի որոշ գիծ։ Այդ գիծը կոչվում է* Նիկոմեդի կոնխոիդ *(կոնքակերպ)։ Գտնել կոնխոիդի հավասարումը և կառուցել այն՝* $a>b$, $a=b$ *և* $a<b$ *դեպքերում։*

13*. *Տրված է* Oy *ուղիղը և նրանից* a *հեռավորության վրա գտնվող* A *կետը (գծ. 36)։* A *կետի շուրջը պտտվում է* AB *ճառագայթը, որի վրա, ճառագայթի և* Oy *առանցքի հատման* B *կետի տարբեր կողմերում, վերցրած են* M_1 *և* M_2 *կետերն այնպես, որ* BM_1 *և* BM_2 *փոփոխական հատվածների երկարությունները միշտ հավասար լինեն* OB*-ին։* M_1 *և* M_2 *կետերի գծած կորը կոչվում է* ստրոֆոիդ*։ Կազմել այդ կորի հավասարումը և կառուցել կորը։*

14*. *Տրված են* OD=2a *տրամագիծ ունեցող շրջանագիծը և նրա* DE *շոշափողը (գծ. 37)։* D *կետին տրամագծորեն հակադիր* O *կետից տարված է* OE *ճառագայթը և նրա վրա վերցրած է* OP *հատվածը՝ շրջանագծի և շոշափողի միջև գտնվող* BE *հատվածին հավասար։ Երբ* OE *ճառագայթը պտտվի* O *կետի շուրջը,* P *կետը կգծի մի կոր, որը կոչվում է* Դիոկլեսի ցիսոիդ*։ Գտնել այդ կորի հավասարումը և կառուցել կորը։*



Գծ. 37



Գծ. 38

15*. *Տրված է* a *շառավիղ ունեցող մի շրջանագիծ և նրա վրա* O *կետը (գծ. 38)։ Երբ* OB *ուղիղը պտտվի* O *կետի շուրջը, այդ ուղիղի վրա գտնվող և ուղիղի ու շրջանագծի հատման* B *կետից տրված* m *հեռավորությունը պահպանող* M_1 *և* M_2 *կետերը կգծեն մի կոր, որը կոչվում է* Պասկալի խխունջ[1]*։ Գտնել այդ կորի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով և կառուցել կորը՝* $m>2a$, $m=2a$ *և* $m<2a$ *դեպքերում։*

16. *Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարապես են հեռացած տված երկու կետերից։*

17. *Երկու ուղիղներ պտտվում են երկու անշարժ կետերի շուրջը, միշտ մնալով միմյանց ուղղահայաց։ Գտնել նրանց հատման կետի գծած կորի հավասարումը։*

18. M *կետից* R *և* r *շառավիղներ ունեցող երկու շրջանագծերին տարված են հավասար երկարություն ունեցող շոշափողներ։ Գտնել այդպիսի* M *կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, եթե շրջանագծերի կենտրոնների միջև հեռավորությունը հավասար է* 2d*-ի։*

19. 2a *հաստատուն երկարություն ունեցող հատվածն իր ծայրերով սահում է ուղիղ անկյան կողմերի վրայով։ Ուղիղ անկյան գագաթից այդ հատվածին իջեցրած է* OM *ուղղահայացը։ Գտնել այդ ուղղահայացների հիմքերի երկրաչափական տեղի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով և կառուցել կորը։*

20. *Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնց՝ տրված քառակուսու կողմերից ունեցած հեռավորությունների քառակուսիների գումարը հավասար է հաստատուն մեծության։*

21. *Ցիսոիդի* $x^3=y^2(2a-x)$ *հավասարումը գրել բևեռային կոորդինատներով։*

---

[1] *Մասնավոր դեպքում, երբ* $m=2a$, *այդ գիծը կոչվում է* կարդիոիդ *(սրտակոր)։*

22. Հետևյալ կորերի հավասարումները գրել դեկարտյան կոորդինատներով՝

ա) $r=m+2a\cos\varphi$ (Պասկալի խխունջ),

բ) $r=a\sin 2\varphi$ (քառաթերթ վարդ)։

23*. a շառավիղ ունեցող շրջանը գլորվում է աբսցիսների առանցքի վրայով։ Շրջանագծի այն կետը, որը շրջանի սկզբնական դիրքի ժամանակ գտնվում էր կոորդինատների սկզբնակետում, շրջանը գլորվելիս գծում է մի կոր (ցիկլոիդ)։ Գտնել այդ կորի պարամետրական հավասարումները։

24. Մարմինը v արագությամբ նետված է դեպի վեր՝ հորիզոնի նկատմամբ α անկյան տակ։ Օդի դիմադրությունը հաշվի չառնելով, գտնել մարմնի հետագծի պարամետրական հավասարումները (որպես պարամետր ընդունել ժամանակը)։

ԳԼՈՒԽ III

ՈՒՂԻՂ ԳԻԾ

§ 1. Ուղիղի անկյունային գործակիցը։ *Նախորդ գլխում ցույց տրվեց, որ հարթության վրա ընտրելով կոորդինատների մի որոշ սիստեմ, մենք կարող ենք տրված գծի կետերը բնորոշող երկրաչափական հատկությունն անալիտիկորեն արտահայտել մի հավասարումով ընթացիկ կոորդինատների միջև։ Այդպիսով, մենք ստանում ենք գծի հավասարումը։ Ներկա գլխում մենք դիտարկելու ենք ուղիղ գծերի հավասարումները։*

Ուղիղի հավասարումը դեկարտյան կոորդինատներով կազմելու համար հարկավոր է որևէ կերպ տալ այն պայմանները, որոնք որոշում են ուղիղի դիրքը կոորդինատային սիստեմի նկատմամբ։

Նախապես մենք մուծենք ուղիղի անկյունային գործակցի գաղափարը՝ որը հարթության վրա ուղիղի դիրքը որոշող մեծություններից մեկն է։

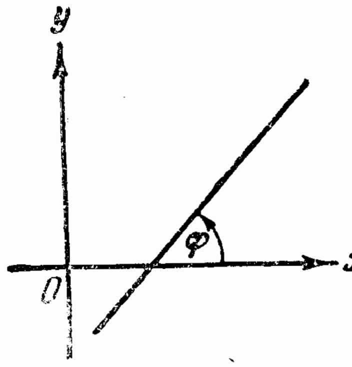
Ox առանցքի նկատմամբ ուղիղի թեքման անկյուն *անվանենք այն անկյունը, որով պետք է Ox առանցքը պտտել, որպեսզի նա համընկնի տված ուղիղի հետ (կամ նրան զուգահեռ դառնա)։ Ինչպես սովորաբար, անկյունը դիտարկելիս հաշվի ենք առնելու նրա նշանը (նշանը որոշվում է պտտման ուղղությամբ, նայած թե ժամացույցի սլաքի հակառա՞կ ուղղությամբ է պտտվում, թե՞ սլաքի ուղղությամբ)։ Քանի որ Ox առանցքի լրացուցիչ պտույտը $180°$-ով նորից կհամատեղի նրան տված ուղիղի հետ, ուստի ուղիղի թեքման անկյունը Ox առանցքի նկատմամբ կարող է միարժեքորեն չընտրվել (կընտրվի π-ին բազմապատիկ գումարելիի ճշտությամբ)։*

Ուղղի՝ Ox առանցքի նկատմամբ թեքման անկյան տանգենսը **կոչվում է** ուղիղի անկյունային գործակից։

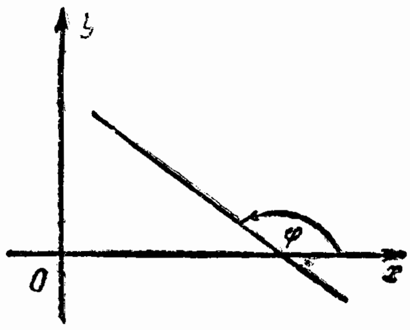
Քանի որ անկյունը π-ով փոփոխելիս նրա տանգենսը չի փո-

փոխվում, հետևաբար, ուղղի անկյունային գործակիցը որոշվում է միարժեքորեն:

Անկյունային գործակիցը բնորոշում է ուղղի ուղղությունը (մենք այստեղ իրարից չենք տարբերում ուղղի երկու միմյանց հակադիր ուղղությունները): Եթե ուղղի անկյունային գործակիցը հավասար է զրոյի, ապա ուղիղը զուգահեռ է աբսցիսների առանցքին: Մենք պայմանավորվենք միշտ դիտարկել ուղղի թեքման անկյան փոքրագույն դրական արժեքը: Այդ դեպքում, եթե անկյունային գործակիցը դրական է, ապա թեքման անկյունը սուր կլինի (գծ. 39). ընդ որում անկյունային գործակիցը մեծանալիս մեծանում է նաև թեքման անկյունը: Իսկ եթե անկյունային գոր-



Գծ. 39



Գծ. 40

ծակիցը բացասական է, ապա թեքման անկյունը բութ կլինի (գծ. 40): Նկատենք, որ Ox առանցքին ուղղահայաց ուղիղը անկյունային գործակից չունի, քանի որ ուղիղ անկյան տանգենս գոյություն չունի:

§ 2. Ուղիղ գծի հավասարումն անկյունային գործակցով: Դիտարկենք այնպիսի ուղիղ, որը զուգահեռ չէ օրդինատների առանցքին: Նրա դիրքը հարթության վրա լիովին որոշ կլինի, եթե տրված լինեն ուղղի թեքման անկյունն աբսցիսների առանցքի նկատմամբ և օրդինատների առանցքի վրա ուղղի կտրած հատվածի մեծությունը, այսինքն՝ օրդինատների առանցքի վրա ուղղությամբ օժտված այն հատվածի մեծությունը, որի սկիզբը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, իսկ ծայրը՝ ուղղի և Oy առանցքի հատման կետում:

Ուղղի թեքման անկյունն Ox առանցքի նկատմամբ նշանակենք φ, իսկ Oy առանցքից ուղղի կտրած $\overline{OB}$ հատվածի մեծությունը՝ b: Դիցուք $M(x, y)$-ը կամայական կետ է ուղղի վրա, (գծ. 41): Երբ M կետը շարժվում է տված ուղղի վրա, նրա x և y կոորդինատները, փոփոխվելով հանդերձ, միշտ միմյանց հետ կապված են մնում մի որոշ պայմանով։ Տեսնենք, թե ո՞րն է այդ պայմանը։

Դիտարկենք $\overline{BM}$ ուղղությամբ օժտված հատվածը։ Գիտենալով նրա սկզբի և ծայրի կոորդինատները՝

$$B(0,\ b),\quad M(x,\ y),$$

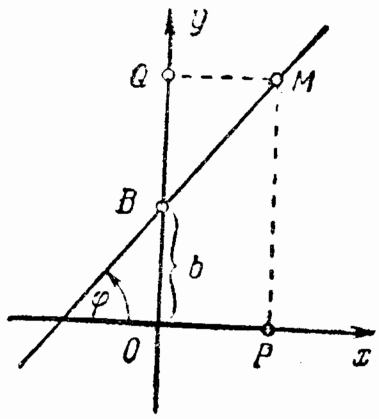
կարող ենք գտնել նրա պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա (գլ. 1, § 9)՝

$$пр_x\overline{BM}=x,\quad пр_y\,\overline{BM}=y-b\text{։}$$

Այդ դեպքում, I գլ. § 9-ի (16) բանաձևի համաձայն՝

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y-b}{x},$$

որտեղից՝



Գծ. 41

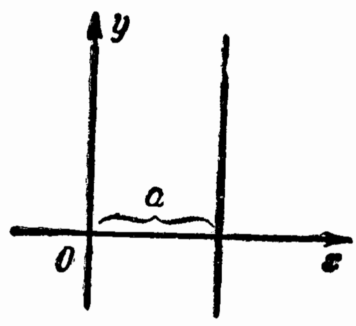
$$y-b=x\operatorname{tg}\varphi, \text{ կամ } y=x\operatorname{tg}\varphi+b\text{։}$$

Նշանակելով $\operatorname{tg}\varphi=k$, վերջնականապես կստանանք՝

$$y=kx+b\text{։} \qquad (1)$$

Այս հավասարմանը բավարարում են միայն դիտարկվող ուղիղի կետերի կոորդինատները. այն կխախտվի, եթե կետը չգտնվի այդ ուղիղի վրա։ Այսպիսով, ստացված (1) հավասարումը տված ուղիղի հավասարումն է։

Ուղիղի (1) տեսքի հավասարումը կոչվում է ուղիղի հավասարում անկյունային գործակցով։



Գծ. 42

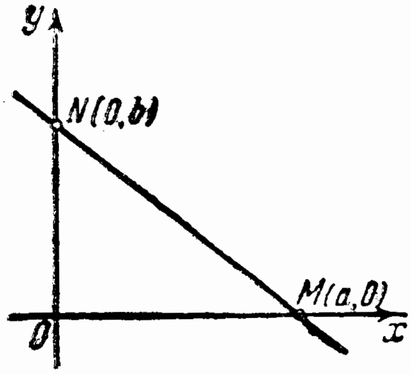
(1) հավասարումն ստանալիս մենք ենթադրեցինք, որ ուղիղը զուգահեռ չէ Oy առանցքին։ Այժմ տեսնենք, թե ինչպիսի հավասարում կունենա Oy առանցքին զուգահեռ ուղիղը։ Դիցուք a-ն՝ այդ ուղիղի և Ox առանցքի հատման կետի աբսցիսն է (գծ. 42)։ Ակներև է, որ այդ ուղիղի ամեն մի կետի աբսցիս հավասար է a-ի, իսկ եթե կետը չի գտնվում այդ ուղիղի վրա, ապա նրա աբսցիսն a-ից տարբեր է։ Հետևաբար՝ այդ ուղիղն ունի հետևյալ հավասարումը՝

$$x=a\text{։} \qquad (2)$$

Այսպես, ուրեմն, եթե տված ուղիղը զուգահեռ չէ Oy *առանցքին, նրա հավասարումը կարելի է գրել (1) տեսքով, իսկ եթե ուղիղը զուգահեռ է* Oy *առանցքին, ապա նրա հավասարումը կարելի է գրել (2) տեսքով։ Քանի որ (1) և (2) հավասարումները* x *և* y *փոփոխականների նկատմամբ առաջին աստիճանի են, ապա մենք դրանով ապացուցեցինք, որ կոորդինատների դեկարտյան սիստեմում* յուրաքանչյուր ուղիղ կարելի է ներկայացնել առաջին աստիճանի հավասարումով։

Մասնավորապես, եթե ուղիղն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով, ապա $b=0$ *և այդպիսի ուղիղի հավասարումը հետևյալ տեսքը կունենա՝*

$$y=kx\text{։} \qquad (3)$$



Գծ. 43

Եթե ուղիղը զուգահեռ է Ox *առանցքին, նրա անկյունային գործակիցը՝* $k=0$ *և այդպիսի ուղիղի հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը՝*

$$y=b\text{։} \qquad (4)$$

Օ ր ի ն ա կ։ Կազմել այն ուղիղի հավասարումը, որն աբսցիսների առանցքի նկատմամբ թեքված է 45° անկյան տակ և օրդինատների առանցքից կտրում է —2 մեծություն ունեցող հատված։

Այստեղ՝ $k=\operatorname{tg} 45^\circ=1$ *և* $b=-2$*։ Հետևաբար, ուղիղի հավասարումը կլինի՝*

$$y=x-2\text{։}$$

§ 3. Երկու փոփոխականների միջև առաջին աստիճանի հավասարման երկրաչափական իմաստը։ *Նախորդ պարագրաֆում ցույց տրվեց, որ կոորդինատների դեկարտյան սիստեմում յուրաքանչյուր ուղիղ կարող է ներկայացվել առաջին աստիճանի հավասարումով։ Այժմ բնական կլինի հակադարձ հարցը դնել՝ արդյո՞ք ամեն մի առաջին աստիճանի հավասարում* x *և* y *փոփոխականների նկատմամբ ուղիղ գիծ է որոշում։ Այս հարցին պատասխանելու համար դիտարկենք առաջին աստիճանի հավասարումը ընդհանուր տեսքով և պարզենք, թե ինչպիսին է հարթության այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց* (x, y) *կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը։ Ցույց տանք, որ այդ կետերի երկրաչափական տեղն ուղիղ գիծ է։*

x*-ի և* y*-ի նկատմամբ առաջին աստիճանի ընդհանուր հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝*

$$Ax+By+C=0. \qquad (5)$$

Այստեղ A-*ն*, B-*ն*, C-*ն ցանկացած թվեր են, ընդ որում, փոփոխականների* A *և* B *գործակիցները, իհարկե, միաժամանակ զրո լինել չեն կարող (այլապես (5) հավասարումն այդ դեպքում* x *և* y *փոփոխականներ չէր պարունակի և հավասարում չէր լինի)։*

Ենթադրելով, որ $B \neq 0$, *(5) հավասարումը լուծենք* y-*ի նկատմամբ, կստանանք՝*

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

կամ, նշանակելով՝ $-\frac{A}{B}=k$, $-\frac{C}{B}=b$, *կունենանք՝*

$$y=kx+b. \qquad (1)$$

Բայց մենք նախորդ պարագրաֆում արդեն տեսանք, որ (1) հավասարումը պատկերում է մի ուղիղ գիծ, որն ունի k *անկյունային գործակից և օրդինատների առանցքից կտրում է* b *մեծությամբ հատված։*

Մենք ենթադրեցինք, որ $B \neq 0$, *իսկ եթե* $B=0$, *ապա (5) հավասարումը կստանա հետևյալ տեսքը՝*

$$Ax+C=0.$$

Քանի որ $A \neq 0$, *ապա այս հավասարումը լուծելով* x-*ի նկատմամբ, կստանանք՝*

$$x=-\frac{C}{A},$$

կամ, նշանակելով $-\frac{C}{A}=a$, *կգրենք՝*

$$x=a. \qquad (2)$$

Սակայն մենք արդեն տեսել ենք (§ 1), որ (2)-ը Oy *առանցքին զուգահեռ ուղղի հավասարում է։*

Այսպիսով, ներկա պարագրաֆի սկզբում դրված հարցը լուծվեց. մենք ցույց տվեցինք, որ բնթացիկ կոորդինատների նկատմամբ առաջին աստիճանի յուրաքանչյուր հավասարում որոշում է ուղիղ գիծ։ *Սրան համապատասխան, (5) հավասարումը կոչվում է* ուղիղի ընդհանուր հավասարում։

Այս գլխի § 1-ում և § 2-ում շարադրվածն ամփոփելով, կարող ենք ասել, որ ուղիղ գիծը և միայն ուղիղ գիծը կարող է կոորդինատների դեկարտյան սիստեմում ներկայացվել առաջին աստիճանի հավասարումով x և y ընթացիկ կոորդինատների նկատմամբ։

Դիտողություն։ Առաջին աստիճանի (5) ընդհանուր հավասարումը (1) տեսքին բերելու համար, պետք է այն լուծել y-ի նկատմամբ։ Այդ դեպքում x-ի մոտ ստացվող գործակիցը կլինի ուղիղի անկյունային գործակիցը, իսկ ազատ անդամը՝ օրդինատների առանցքից ուղիղի կտրած հատվածի մեծությունը։ Ուղիղի հավասարումն այդ տեսքով առանձնապես կարևոր է։ Վերը շարադրվածից հետևում է, որ x-ի գծային ֆունկցիայի (այսինքն՝ x-ի նկատմամբ առաջին աստիճանի բազմանդամի) գրաֆիկն ուղիղ գիծ է, ինչպես և, հակադարձաբար, եթե x-ի մի որևէ ֆունկցիայի գրաֆիկն ուղիղ գիծ է, ապա այդ ֆունկցիան կարելի է գրել x-ի նկատմամբ առաջին աստիճանի բազմանդամի տեսքով։ Այստեղից է ծագում գծային («ուղղագիծ») ֆունկցիա անունը։

Օրինակ։ Ուղիղ գիծը տված է $2x+3y+7=0$ հավասարումով։ Գրել նրա հավասարումն անկյունային գործակցով։

Տված հավասարումն y-ի նկատմամբ լուծելով, կստանանք՝

$$y=-\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\text{։}$$

Այստեղից երևում է, որ ուղիղի անկյունային գործակիցը՝ $k=-\frac{2}{3}$, իսկ՝ օրդինատների առանցքից կտրած հատվածի մեծությունը՝ $b=-\frac{7}{3}$։

4. $Ax+By+C=0$ առաջին աստիճանի ընդհանուր հավասարման հետազոտումը։ Ինչպես մենք տեսանք, առաջին աստիճանի

$$Ax+By+C=0 \qquad (5)$$

ընդհանուր հավասարումը որոշում է ուղիղ գիծ։ Տեսնենք, թե այդ ուղիղը կոորդինատային առանցքների նկատմամբ ինչպիսի՞ դիրք է գրավում, երբ (5) հավասարման մեկ կամ երկու գործակիցը զրո են դառնում։

1. $C=0$։ Այս դեպքում (5) հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$Ax+By=0$$

և որոշում է կոորդինատների սկզբնակետով անցնող ուղիղ, քանի որ բավարարվում է $x=y=0$ արժեքներով։

2. $A=0$։ Այս դեպքում (5) հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$By+C=0,$$

կամ, նշանակելով՝ $-\frac{C}{B}=b$, հետևյալ տեսքը՝

$$y=b:$$

Այսպիսի ուղիղի բոլոր կետերի համար օրդինատը հաստատուն արժեք ունի, այսինքն՝ ուղիղը զուգահեռ է Ox առանցքին և գտնվում է նրանից $|b|$ հեռավորության վրա. Ox առանցքից վերև, եթե $b>0$, և ներքև, եթե $b<0$:

3. $B=0$: Այս դեպքում (5) հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$Ax+C=0:$$

կամ, նշանակելով $-\frac{C}{A}=a$, հետևյալ տեսքը՝

$$x=a$$

և որոշում է Oy առանցքին զուգահեռ ուղիղ:

4. $C=0$, $B=0$: Այս դեպքում (5) հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$Ax=0,$$

կամ՝

$$x=0:$$

Ուղիղը համընկնում է Oy առանցքի հետ:

5. $C=0$, $A=0$: Այս դեպքում (5) հավասարումը բերվում է

$$y=0$$

տեսքի: Ուղիղը համընկնում է Ox առանցքի հետ:

§ 5. Ուղիղ գծի հավասարումը հատվածներով: Մենք արդեն տեսել ենք, որ կոորդինատային առանցքների նկատմամբ ուղիղ գծի դիրքը կարելի է որոշել տարբեր եղանակներով: Ուղիղի դիրքը որոշող տվյալներից կախված մենք նրա հավասարումը կստանանք տարբեր ձևերով:

Դիտարկենք մի ուղիղ, որը հատում է երկու կոորդինատային առանցքներն էլ և չի անցնում կոորդինատների սկզբնակետով: Ուղիղի դիրքը կարելի է որոշել, եթե տրվեն Ox և Oy առանցքներից ուղիղի կտրած հատվածների a և b մեծությունները (գծ. 43-ում $a=$մեծ $\overline{OM}$, $b=$մեծ $\overline{ON}$): Գտնենք այդ ուղիղի հավասարումը:

Այդպիսի ուղիղի հավասարումը կարելի է գրել ընդհանուր տեսքով՝

$$Ax+By+C=0, \tag{5}$$

որտեղ A, B, C գործակիցներից ոչ մեկը զրոյի հավասար չէ: Ըրնում է գտնել այդ գործակիցները, այսինքն՝ դրանք արտահայտել տված a և b թվերի միջոցով։

Քանի որ $M(a,^\circ)$ կետը գտնվում է տված ուղղի վրա, ուստի նրա կոորդինատները բավարարում են (5) հավասարմանը՝

$$Aa+C=0,$$

որտեղից՝

$$A=-\frac{C}{a}: \tag{6}$$

Նման ձևով, $N(o,b)$ կետի կոորդինատները ևս պիտի բավարարեն (5) հավասարմանը, որը կտա՝

$$Bb+C=0,$$

որտեղից՝

$$B=-\frac{C}{b}: \tag{7}$$

A-ի և B-ի արժեքները (6)-ից և (7)-ից տեղադրելով ուղղի (5) հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$-C\frac{x}{a}-C\frac{y}{b}+C=0:$$

Հավասարման երկու մասերը բաժանելով C-ի վրա (պայմանի համաձայն $C\neq 0$), կգտնենք՝

$$-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+1=0,$$

կամ՝

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1: \tag{8}$$

Ուղղի (8) տեսքի հավասարումը կոչվում է ուղղի հավասարում հատվածներով։

Օ ր ի ն ա կ։ Ուղղի $2x-3y+2=0$ հավասարումը գրել հատվածներով։

Քանի որ $(a,0)$ կետը գտնվում է այդ ուղղի վրա, ապա նրա կոորդինատները բավարարում են ուղղի հավասարմանը։ Հետևաբար՝

$$2a+2=0, \text{ որտեղից՝ } a=-1:$$

Նման ձևով, հավասարման մեջ տեղադրելով $(0,b)$ կետի կոորդինատները, կգտնենք՝

$$-3b+2=0, \text{ որտեղից՝ } b=\frac{2}{3}:$$

Ուրեմն, ուղղի հավասարումը հատվածներով կլինի՝

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{\frac{2}{3}}=1։ \qquad (8')$$

Այս (8′) հավասարումը կարելի է ստանալ նաև տրված հավասարումը հանրահաշվական ձևափոխությունների ենթարկելով։ Իրոք, տված հավասարման ազատ անդամը տեղափոխելով աջ մասը, կստանանք՝

$$2x-3y=-2։$$

Հավասարության երկու մասերը բաժանենք —2-ի, կունենանք՝

$$-\frac{2x}{2}+\frac{3y}{2}=1։$$

Այժմ կարելի է այս հավասարումը գրել (8) տեսքով՝

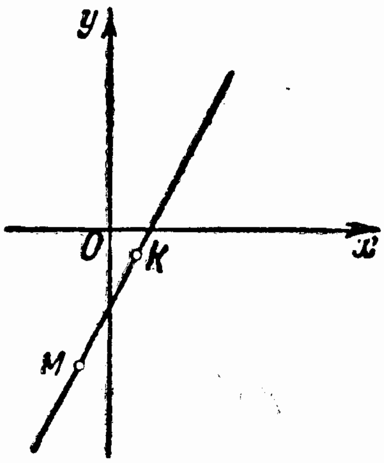
$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{\frac{2}{3}}=1։$$

§ 6. Ուղղի կառուցումը տրված հավասարումով։ *Ուղիղ գիծը կառուցելու համար բավական է գծագրի վրա նշել նրա որևէ երկու կետ։ Ուղղի վրա գտնվող որևէ կետի կոորդինատները գտնելու համար, կոորդինատներից մեկին տալիս ենք կամայական արժեք և ուղղի հավասարումից գտնում մյուս կոորդինատի համապատասխան արժեքը։*

Օրինակ 1. Տված է ուղղի հավասարումը՝

$$2x-y-3=0։$$

Կառուցել ուղիղը։



Գծ. 44

Հավասարման մեջ դնենք, օրինակ, $x=1$. այդ դեպքում՝ $2-y-3=0$, որտեղից՝ $y=-1$։ Հետևաբար, $K(1,-1)$ կետը գտնվում է ուղղի վրա։ Այնուհետև, ընդունելով, օրինակ, $x=-1$, կգտնենք $M(-1,-5)$ կետը, որը նույնպես գտնվում է ուղղի վրա։ Գտած երկու կետերով լրիվ որոշվում է ուղիղը (գծ. 44)։

Օրինակ 2. Կառուցել $2x+3y=0$ ուղիղը։

Քանի որ հավասարման մեջ ազատ անդամը բացակայում է, ուրեմն նրանով որոշվող ուղիղն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով։ Մնում է գտնել մի երկրորդ կետ, սկզբնակետից տարբեր։ Դրա համար հավասարման մեջ դնենք, օրինակ, $x=1$. այդ դեպքում՝ $2+3y=0$, որտեղից՝ $y=-\frac{2}{3}$։ Հետևաբար, $\left(1,-\frac{2}{3}\right)$ կետը գտնվում է ուղղի վրա։ Մնում է ուղիղ անցկացնել այդ կետով և կոորդինատների սկզբնակետով։

Դիտողություն։ Գործնականում ուղիղը կառուցելիս հարմար է օգտագործել հատվածներով տված հավասարումը, կամ գտնել ուղիղի հատման կետերը կոորդինատային առանցքների հետ (որի համար հավասարման մեջ պետք է դնել $x=0$ և գտնել b-ն, ապա դնել $y=0$ և գտնել a-ն)։

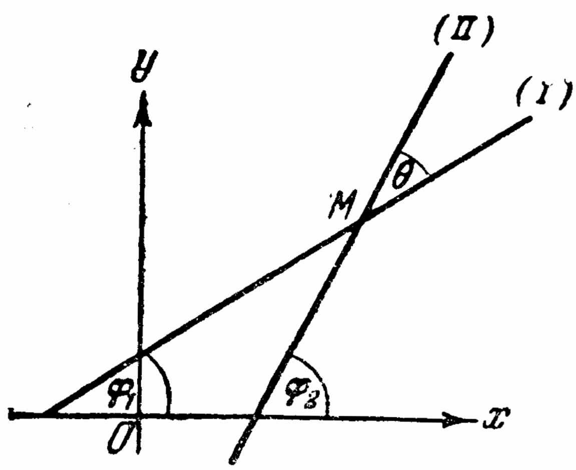
§ **7. Երկու ուղիղներով կազմված անկյունը**։ Դիցուք տված են երկու ուղիղներ՝ (I) և (II)։ Այդ ուղիղները դիտարկելով նշված դասավորությամբ, նրանցով կազմված անկյուն ասելով հասկանում ենք այն անկյունը, որով պետք է պտտել (I) ուղիղը, որպեսզի այն համընկնի (II) ուղիղի հետ (կամ նրան զուգահեռ դառնա)։ Անկյան նշանը որոշվում է սովորական կանոնով։ Քանի որ լրացուցիչ կերպով π անկյունով պտտելու հետևանքով ուղիղը նորից կգրավի իր սկզբնական դիրքը, ապա պարզ է, որ (I) և (II) ուղիղներով կազմված անկյունը միարժեքորեն չի որոշվի (այլ π-ի բազմապատիկ գումարելիի ճշգրտությամբ)։ Անկյան արժեքներից մեկը միշտ կարելի է այնպես ընտրել, որպեսզի նա լինի ոչ բացասական և π-ից փոքր։ Գործնականում անկյան հենց այդ արժեքն էլ սովորաբար նկատի են ունենում։

Դիցուք (I) և (II) ուղիղների հավասարումները տված են անկյունային գործակիցներով՝

$$y=k_1x+b_1, \tag{I}$$

$$y=k_2x+b_2\text{։} \tag{II}$$

(I) և (II) ուղիղների թեքման անկյուններն Ox առանցքի նկատմամբ նշանակենք համապատասխանորեն φ_1 և φ_2, իսկ (I) և (II) ուղիղներով կազմված անկյունը՝ θ։



Գծ. 45

Այդ դեպքում, ակներևորեն, կունենանք (գծ. 45)՝

$$\varphi_1+\theta=\varphi_2,$$

որտեղից՝

$$\theta=\varphi_2-\varphi_1\text{։}$$

Եթե (I) և (II) ուղիղներն ուղղահայաց չեն, ապա, երկրաչափության հայտնի բանաձևի համաձայն՝

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_2\operatorname{tg}\varphi_1}\text{։}$$

Նկատելով, որ $\operatorname{tg}\varphi_1=k_1$ և $\operatorname{tg}\varphi_2=k_2$, կստանանք՝

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}; \qquad (9)$$

Դ ի տ ո ղ ու թ յ ու ն 1. (9) բանաձևը որոշում է այն անկյան տանգեսը, որն առաջանում է K_1 անկյունային գործակից ունեցող ուղիղն M կետի շուրջը պտտելով՝ մինչև նրա համընկնելը K_2 անկյունային գործակից ունեցող ուղիղի հետ։ Այդ կարելի է հիշել, բանաձևը գրելով այսպես՝

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2};$$

Դ ի տ ո ղ ու թ յ ու ն 2. Եթե խոսքը երկու ուղիղներով կազմված անկյան մասին է և չի նշվում ուղիղների դասավորությունը մեկը մյուսի նկատմամբ, ապա կամայապես կարելի է որոշել նրանց դասավորությունը։ Ակներևորեն, ուղիղների դասավորությունը փոխելիս կփոփոխվի անկյան տանգենսի նշանը։

Դ ի տ ո ղ ու թ յ ու ն 3. Եթե ուղիղներից թեկուզ մեկը զուգահեռ է Oy առանցքին, ապա (9) բանաձևն իմաստ չունի։ Այդպիսի դեպքում, ընդունելով, օրինակ, որ Oy առանցքին զուգահեռ է երկրորդ ուղիղը, երկու ուղիղներով կազմված անկյունը կորոշենք հետևյալ բանաձևով՝

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi_1:$$

Օ ր ի ն ա կ 1. Գտնել $y=2x-3$ և $3x+y-2=0$ ուղիղներով կազմված անկյունը։

Եթե ուղիղները համարակալենք նույն կարգով, ինչ կարգով նրանց հավասարումները գրված են, այդ դեպքում (I) ուղիղի համար անկյունային գործակիցը կլինի՝ $k_1=2$, իսկ (II) ուղիղի համար՝ $k_2=-3$։ Այժմ (9) բանաձևով կստանանք՝

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{-3-2}{1-2\cdot 3} = 1, \text{ որտեղից՝ } \theta = 45^\circ:$$

Օ ր ի ն ա կ 2. Գտնել հետևյալ ուղիղներով կազմված անկյունը՝

$$x-2y+3=0 \text{ և } x-3=0:$$

Այստեղ $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$։ Առաջին ուղիղի անկյունային գործակիցը հավասար է $\frac{1}{2}$-ի, իսկ նրա թեքման անկյունը (Ox առանցքի նկատմամբ) հավասար է $\varphi_1 = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{2}$։ Համաձայն 3-րդ դիտողության՝

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{2}:$$

§ 8. Երկու ուղիղների զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները: *Ուղիղները զուգահեռ են այն և միայն այն դեպքում, երբ* Ox *առանցքի նկատմամբ նրանց թեքման անկյունների տանգենսները հավասար են՝*

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\operatorname{tg}\varphi_2,$$

կամ՝

$$k_1=k_2: \qquad (10)$$

Այսպիսով, ուղիղների զուգահեռության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը նրանց անկյունային գործակիցների հավասարությունն է:

Երկու ուղիղների զուգահեռության պայմանը կարելի է նաև ուղղակի (9) բանաձևից ստանալ:

Ուղիղների ուղղահայացության դեպքում (և միայն այդ դեպքում) կարելի է համարել՝

$$\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}:$$

Այստեղից հետևում է, որ՝

$$\varphi_2=\varphi_1+\frac{\pi}{2},$$

կամ՝

$$\operatorname{tg}\varphi_2=\operatorname{tg}\left(\varphi_1+\frac{\pi}{2}\right)=-\cot\varphi_1,$$

որտեղից՝

$$\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2=-1,$$

կամ, վերջնականապես՝

$$k_1k_2=-1: \qquad (11)$$

Այսպիսով, երկու ուղիղների ուղղահայացության անհրաժեշտ և բավարար պայմանն այն է, որ նրանց անկյունային գործակիցների արտադրյալը հավասար լինի −1-ի:

Օրինակ 1. Հետևյալ ուղիղները՝

$$2x-3y+1=0 \text{ և } 4x-6y-5=0$$

զուգահեռ են: Իսկապես, այդ ուղիղների անկյունային գործակիցները կլինեն՝ $k_1=\frac{2}{3}$, $k_2=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, *ուրեմն՝* $k_1=k_2$, *այսինքն՝ տեղի ունի զուգահեռության պայմանը:*

Օրինակ 2. k *գործակցի ինչպիսի՞ արժեքի դեպքում* $y=kx+1$ *հավասարումը կորոշի այնպիսի ուղիղ, որն ուղղահայաց լինի* $y=2x-1$ *ուղիղին:*

Երկրորդ ուղիղի անկյունային գործակիցը՝ $k_2=2$: *Ուղղահայացության պայմանը տալիս է՝* $2k=-1$, *որտեղից՝* $k=-\frac{1}{2}$:

§ 9. Տվյալ կետով անցնող և տվյալ ուղղությունն ունեցող ուղիղի հավասարումը: *Դիցուք տված են* $A(x_1, y_1)$ *կետը և* k *անկյունային գործակիցը, որը որոշում է* A *կետով անցնող* ուղիղի ուղղությունը: Այդ ուղիղի հավասարումը մենք կորոնենք

$$y=kx+b \qquad (12)$$

տեսքով, որտեղ b անհայտը պետք է որոշել այնպես, որպեսզի ուղիղն անցնի $A(x_1, y_1)$ կետով: Քանի որ A կետը գտնվում է տված ուղիղի վրա, ապա նրա կոորդինատները պետք է բավարարեն (12) հավասարմանը: Այդ հավասարման մեջ ընթացիկ կոորդինատների տեղ դնելով x_1, y_1, կստանանք՝

$$y_1=kx_1+b: \qquad (13)$$

Այս (13) պայմանից պետք է b-ն որոշել և գտած արժեքը տեղադրել (12) հավասարման մեջ: Այլ խոսքով, պետք է b-ն արտաքսել (12) և (13) հավասարություններից, որ մենք կկատարենք, (12)-ից հանելով (13)-ը: Այդպիսով, կստանանք՝

$$y-y_1=k(x-x_1), \qquad (14)$$

որը և կլինի (x_1, y_1) կետով անցնող և k անկյունային գործակցով որոշվող ուղղությունն ունեցող ուղիղի հավասարումը:

Պարզ է, որ (14) տեսքով կարելի է գրել ամեն մի ուղիղի հավասարում, որը զուգահեռ չէ Oy առանցքին: Տված $A(x_1, y_1)$ կետով անցնող և Oy առանցքին զուգահեռ ուղիղի հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը (գլ. III, § 2)՝

$$x=x_1:$$

Դ ի տ ո ղ ու թ յ ու ն: Հարթության մի որոշ կետով անցնող բոլոր ուղիղների համախումբը կոչվում է **ուղիղների փունջ**, իսկ նրանց ընդհանուր կետը՝ **փնջի կենտրոն**:

Եթե (14) հավասարման մեջ k-ի տակ հասկանանք այնպիսի մեծություն, որն ընդունում է ամեն հնարավոր արժեքներ, ապա այդ հավասարումը կորոշի $A(x_1, y_1)$ կետով անցնող բոլոր ուղիղները, այսինքն՝ $A(x_1, y_1)$ կենտրոնն ունեցող ուղիղների փունջը [(14) ձևով կարելի է գրել փնջի յուրաքանչյուր ուղիղի հավասարում, բացի մեկից՝ Oy առանցքին զուգահեռ ուղիղի հավասարումից]:

Օ ր ի ն ա կ 1. Կազմել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $(-3, 4)$ կետով և Ox առանցքի նկատմամբ թեքված է 135° անկյան տակ:

Հավասարումը կարելի է գրել (14) տեսքով: Այստեղ՝ $x_1=-3$, $y_1=4$, $k=\operatorname{tg} 135°=-1$: Հետևաբար, որոնելի հավասարումը կլինի՝

$$y-4=-1(x+3),$$

կամ՝

$$x+y-1=0:$$

Օրինակ 2. Կազմել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է (1, 2) կետով և զուգահեռ է $2x-3y+1=0$ ուղիղին։

Տված ուղիղի անկյունային գործակիցը՝ $k_1=\frac{2}{3}$։ Որոնելի ուղիղը զուգահեռ է տված ուղիղին, հետևաբար, նրա անկյունային գործակիցը՝ $k_2=k_1=\frac{2}{3}$։ Այսպիսով, (14) հավասարման մեջ պետք է դնել՝ $k=\frac{2}{3}$, $x_1=1$, $y_1=2$, որ կտա՝

$$y-2=\frac{2}{3}(x-1),$$

որտեղից՝

$$3y-6=2(x-1), \text{ կամ՝ } 3y-6=2x-2$$

և վերջնականապես՝

$$2x-3y+4=0։$$

Օրինակ 3. Կազմել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է (−1, 1) կետով և ուղղահայաց է $3x-y+2=0$ ուղիղին։

Որոնելի ուղիղի անկյունային գործակիցը նշանակենք k_1, իսկ տված ուղիղինը՝ k_2։ Հավասարումից երևում է, որ $k_2=3$, իսկ ուղղահայացության $k_1k_2=-1$ պայմանը մեզ կտա՝

$$3k_1=-1, \text{ որտեղից՝ } k_1=-\frac{1}{3}։$$

Այսպիսով, որոնելի հավասարումը կլինի՝

$$y-1=-\frac{1}{3}(x+1), \text{ կամ՝ } 3y-3=-x-1$$

և վերջնականապես՝

$$x+3y-2=0։$$

Օրինակ 4. Կազմել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է (2, −1) կետով և $5x-2y+3=0$ ուղիղի հետ կազմում է 45° անկյուն։

Այն ուղիղի անկյունային գործակիցը, որի հավասարումը պետք է կազմենք, գտնենք § 7-ի (9) բանաձևով։

Քանի որ խնդրի պայմանում չի տված, թե ո՞ր ուղիղից պետք է հաշվել անկյունը, ապա առաջադրված խնդիրը երկու լուծում ունի։

Առաջին լուծումն ստանալու համար (9) բանաձևում ընդունենք $k_1=\frac{5}{2}$ (տված ուղիղի համար), $\theta=45°$, իսկ k_2-ը կլինի որոնելի ուղիղի անկյունային գործակիցը։ Այդ դեպքում կունենանք՝

$$1=\frac{k_2-\frac{5}{2}}{1+\frac{5}{2}k_2}, \text{ որտեղից՝ } k_2=-\frac{7}{3}$$

և որոնելի հավասարումը կլինի՝

$$y+1=-\frac{7}{3}(x-2),$$

որը պարզեցումներից հետո կդառնա՝

$$7x+3y-11=0\text{:}$$

Մյուս լուծումը կստանանք, եթե (9) բանաձևում ընդունենք $k_2=\frac{5}{2}$, $=45°$ և գտնենք k_1-ը։ Այդ դեպքում կունենանք $k_1=\frac{3}{7}$ և որոնելի հավասարումը կլինի՝

$$y+1=\frac{3}{7}(x-2),$$

կամ՝

$$3x-7y-13=0\text{:}$$

Նկատենք հետևյալը. քանի որ գտած ուղիղներից յուրաքանչյուրը տրված ուղիղի հետ կազմում է 45° անկյուն, ուստի նրանք պետք է միմյանց ուղղահայաց լինեն։ Իրոք, այդ ուղիղների անկյունային գործակիցները հավասար են $-\frac{7}{3}$-ի և $\frac{3}{7}$-ի։

§ 10. Երկու ուղիղների փոխադարձ դիրքը հարթության վրա։

Եթե երկու ուղիղներ գտնվում են մի հարթության վրա, ապա նրանց փոխադարձ դասավորության երեք տարբեր դեպքեր են հնարավոր՝ 1) ուղիղները հատվում են (այսինքն՝ ունեն մեկ ընդհանուր կետ), 2) ուղիղները զուգահեռ են և չեն համընկնում, 3) ուղիղները համընկնում են։

Պարզենք, ինչպե՞ս իմանալ, թե այդ երեք դեպքերից ո՞րը տեղի ունի, եթե ուղիղները տված են իրենց հավասարումներով ընդհանուր տեսքով՝

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1&=0, \\ A_2x+B_2y+C_2&=0\text{:} \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Եթե ուղիղները հատվում են, այսինքն՝ ընդհանուր կետ ունեն, ապա այդ կետի կոորդինատները պետք է բավարարեն (15)-ի երկու հավասարումներին էլ։ Հետևաբար, ուղիղների հատման կետի կոորդինատները գտնելու համար, պետք է նրանց հավասարումները համատեղ լուծել։ Այդ նպատակով, նախ արտաքսենք x անհայտը, որի համար առաջին հավասարումը բազմապատկենք A_2-ով, իսկ երկրորդը՝ A_1-ով և երկրորդ հավասարումից հանենք առաջինը։ Կստանանք՝

$$(A_1B_2-A_2B_1)y+C_2A_1-C_1A_2=0\text{:} \qquad (15')$$

(15) հավասարումներից y անհայտն արտաքսելու համար առաջին հավասարումը բազմապատկենք B_2-ով, իսկ երկրորդը՝ B_1-ով և առաջինից հանենք երկրորդ հավասարումը։ Կստանանք՝

$$(A_1B_2-A_2B_1)x+C_1B_2-C_2B_1=0: \qquad (15'')$$

Եթե $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$, ապա (15') և (15'') հավասարումներից կըստանանք (15) սիստեմի լուծումը՝

$$x=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}, \quad y=\frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}: \qquad (16)$$

(16) բանաձևերը տալիս են երկու ուղիղների հատման կետի x և y կոորդինատները։

Այսպիսով, եթե $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$, ապա ուղիղները հատվում են։

Եթե $A_1B_2-A_2B_1=0$, ապա (16) բանաձևերն իմաստ չունեն։ Ինչպե՞ս են այդ դեպքում դասավորված ուղիղները։ Հեշտ է տեսնել, որ այդ դեպքում ուղիղները զուգահեռ են։ Իրոք A_1B_2- $-A_2B_1=0$ պայմանից բխում է, որ $-\frac{A_1}{B_1}=-\frac{A_2}{B_2}$, այսինքն՝ $k_1=k_2$։ Իսկ եթե $B_1=B_2=0$, ապա ուղիղները զուգահեռ են Oy առանցքին և, հետևաբար, նաև միմյանց։

Այսպես, ուրեմն, եթե $A_1B_2-A_2B_1=0$, *ապա ուղիղները զուգահեռ են։* Այդ պայմանը կարելի է գրել նաև այսպես՝

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}:$$

Այս դեպքում կարելի է ասել, որ **եթե ուղիղների հավասարումների մեջ ընթացիկ կոորդինատների համապատասխան գործակիցները համեմատական են, ապա ուղիղները զուգահեռ են**։

Զուգահեռ ուղիղները, մասնավորապես, կարող են և համընկնել։ Պարզենք, թե ո՞րն է ուղիղների համընկնելու անհրաժեշտ պայմանը։ Դրա համար դիտարկենք (15') և (15'') հավասարումները։ Եթե այդ հավասարումների ազատ անդամները երկուսն էլ հավասար լինեն զրոյի, այսինքն՝ $C_2A_1-C_1A_2=0$ և $C_1B_2-C_2B_1=0$, ապա՝

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2},$$

այսինքն՝ (15) հավասարումներում համապատասխան անհայտների գործակիցները և ազատ անդամները համեմատական են։ Այդպի-

որ դեպքում սիստեմի հավասարումներից մեկն ստացվում է մյուսից՝ նրա բոլոր անդամները բազմապատկելով մի ընդհանուր բազմապատկիչով, այսինքն՝ (15) հավասարումները համարժեք են։ Հետևաբար, տված զուգահեռ ուղիղները համընկնում են։

Իսկ եթե (15′) և (15″) հավասարումների ազատ անդամներից թեկուզ մեկը հավասար չլինի զրոյի (կամ՝ $C_2A_1-C_1A_2\neq0$, *կամ՝* $C_1B_2-C_2B_1\neq0$*), այսինքն՝*

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2},$$

ապա (15′) և (15″) հավասարումները, նշանակում է՝ նաև (15) հավասարումները, լուծումներ չեն ունենա [(15′) կամ (15″) հավասարումներից առնվազն մեկն անհնար կլինի]։ Այդ դեպքում զուգահեռ ուղիղները չեն համընկնի։

Այսպես, ուրեմն, **երկու ուղիղների համընկնելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանը՝ նրանց հավասարումներում համապատասխան գործակիցների համեմատականությունն է՝**

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}։$$

Օրինակ 1. Գտնել հետևյալ ուղիղների հատման կետը՝

$$2x-3y-1=0 \text{ և } 3x-y-2=0։$$

Հավասարումները համատեղ լուծենք. երկրորդը բազմապատկենք 3-ով՝

$$2x-3y-1=0,\quad 9x-3y-6=0,$$

երկրորդից հանենք առաջինը, կստանանք՝

$$7x-5=0, \text{ որտեղից՝ } x=\frac{5}{7}։$$

Այնուհետև, առաջին հավասարումը բազմապատկելով 3-ով, երկրորդը՝ 2-ով և երկրորդից հանելով առաջինը, կստանանք՝

$$7y-1=0, \text{ որտեղից՝ } y=\frac{1}{7}։$$

Այսպիսով, երկու տված ուղիղների հատման կետի կոորդինատները կլինեն՝

$$x=\frac{5}{7},\quad y=\frac{1}{7}։$$

Օրինակ 2. Հետևյալ ուղիղները՝

$$2x-y+2=0 \text{ և } 4x-2y-1=0$$

զուգահեռ են (ընդհանուր կետ չունեն), որովհետև՝

$$\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{2}{-1}։$$

Հետևյալ երկու ուղիղները՝

$$3x+y-2=0 \text{ և } 6x+2y-4=0$$

համընկնում են, որովհետև՝

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}.$$

§ 11. Ուղիղների փնջի հավասարումը։ § 9-ում (դիտողությունը) դիտարկեցինք այն ուղիղների փնջի հավասարումը, որի կենտրոնը տված $A(x_1, y_1)$ կետն է։ Երբեմն ուղիղների փնջի կենտրոնն անմիջականորեն չի տրվում, այլ որոշվում է փնջին պատկանող երկու ուղիղներով։ Այդպիսի դեպքում փնջի կենտրոնի կոորդինատները կարելի է գտնել տված ուղիղների հավասարումները համատեղ լուծելով։ Սակայն փնջի կենտրոնի կոորդինատները հաշվելուց կարելի է խուսափել, եթե օգտվենք ուղիղների փնջի հավասարման մի այլ ձևից։

Դիցուք՝

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ և } A_2x+B_2y+C_2=0$$

ուղիղները հատվում են (x_1, y_1) կետում։ Կազմենք հետևյալ հավասարումը՝

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0, \qquad (17)$$

որտեղ λ-ն կամայական պարամետր է։

λ-ի ամեն մի արժեքի դեպքում (17) հավասարումն ուղիղ գիծ է որոշում, քանի որ այն առաջին աստիճանի է x և y փոփոխականների նկատմամբ։ Հեշտ է ցույց տալ, որ այդ ուղիղն անցնում է (x_1, y_1) կետով։ Իրոք, քանի որ (x_1, y_1) կետը պատկանում է տված ուղիղներից յուրաքանչյուրին, ապա՝

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1=0 \text{ և } A_2x_1+B_2y_1+C_2=0,$$

որտեղից նաև՝

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1+\lambda(A_2x_1+B_2y_1+C_2)=0։$$

Հետևաբար, տված երկու ուղիղների հատման կետի կոորդինատները բավարարում են (17) հավասարմանը։

Այսպիսով, (17) հավասարումը λ-ի տարբեր արժեքների դեպքում որոշում է տարբեր ուղիղներ, որոնք պատկանում են (x_1, y_1) կենտրոնն ունեցող փնջին։

Մնում է պարզել, թե արդյոք կարելի՞ է (17) հավասարումից λ-ի հարմար ընտրությամբ ստանալ փնջի ցանկացած ուղիղի հավասարումը։

Դիցուք (α, β)-ն հարթության վրա կամայական կետ է՝ (x_1, y_1)-ից տարբեր։ (17) հավասարումով որոշվող ուղիղը այդ կետով կանցնի, եթե նրա կոորդինատները բավարարեն (17) հավասարմանը, այսինքն՝ եթե

$$A_1\alpha+B_1\beta+C_1+\lambda(A_2\alpha+B_2\beta+C_2)=0\text{։}$$

Այստեղից հետևում է, որ երբ

$$\lambda=-\frac{A_1\alpha+B_1\beta+C_1}{A_2\alpha+B_2\beta+C_2},$$

ապա (17) հավասարումը կպատկերի փնջի այն ուղիղը, որն անցնում է հարթության կամայապես ընտրած (α, β) կետով։

λ պարամետրը չի կարելի հարմար կերպով ընտրել միայն այն դեպքում, երբ (α, β) կետը գտնվի $A_2x+B_2y+C_2=0$ ուղիղի վրա (այդպիսի դեպքում λ-ն որոշող բանաձևն իմաստը կորցնում է)։ Հետևաբար, (17) հավասարումը λ-ի տարբեր արժեքների դեպքում կորոշի փնջի բոլոր ուղիղները, բացի մեկից (տված ուղիղներից՝ երկրորդը)։ Իսկ այս վերջին հավասարումն էլ, ակներևորեն, կստացվի հետևյալ հավասարումից՝

$$\mu(A_1x+B_1y+C_1)+A_2x+B_2y+C_2=0,$$

$\mu=0$ *դեպքում։*

(17) տեսքի հավասարումն անվանում են ուղիղների փնջի հավասարում:

Օ ր ի ն ա կ։ Կազմել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է

$$2x-3y-1=0 \text{ և } 3x-y-2=0$$

ուղիղների հատման կետով և ուղղահայաց է $y=x$ *ուղիղին։*

Ա ռ ա ջ ի ն ե ղ ա ն ա կ։ $2x-3y-1=0$ *և* $3x-y-2=0$ *հավասարումները համատեղ լուծելով, գտնում ենք ուղիղների հատման կետի կոորդինատները (տե՛ս § 10, օրինակ 1)՝*

$$x=\frac{5}{7},\quad y=\frac{1}{7}\text{։}$$

Ուղիղների ուղղահայացության պայմանից կգտնենք որոնելի ուղիղի անկյունային գործակիցը՝ $k=-1$։ *Հետևաբար, որոնելի հավասարումը կլինի՝*

$$y-\frac{1}{7}=-1\left(x-\frac{5}{7}\right),$$

որն աստիճանաբար պարզեցնելով, կստանանք՝

$$y-\frac{1}{7}=-x+\frac{5}{7}, \text{ կամ՝ } 7y-1=-7x+5,$$

վերջնականապես՝

$$7x+7y-6=0։$$

Երկրորդ եղանակ։ Որոնելի հավասարումը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$2x-3y-1+\lambda(3x-y-2)=0, \qquad (17')$$

կամ՝

$$(2+3\lambda)x+(-3-\lambda)y-1-2\lambda=0։$$

Այս հավասարումով որոշվող ուղիղի անկյունային գործակիցը հավասար կլինի՝

$$k=\frac{2+3\lambda}{3+\lambda}։$$

Որպեսզի այն ուղիղը, որի հավասարումը պետք է գտնել, ուղղահայաց լինի $y=x$ ուղիղին, պետք է ընդունել $k=-1$։ Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\frac{2+3\lambda}{3+\lambda}=-1,$$

որտեղից՝

$$2+3\lambda=-3-\lambda, \quad 4\lambda=-5,$$

այսինքն՝

$$\lambda=-\frac{5}{4}։$$

λ-ի համար գտած այս արժեքը տեղադրելով (17') հավասարման մեջ, պարզեցումներից հետո կստանանք որոնելի ուղիղի հավասարումը՝

$$7x+7y-6=0։$$

§ 12. Տրված երկու կետերով անցնող ուղիղի հավասարումը

Դիցուք տված են $A(x_1, y_1)$ և $B(x_2, y_2)$ կետերը։ Գտնենք այդ երկու կետերով անցնող ուղիղի հավասարումը։

$A(x_1, y_1)$ կետով անցնող ուղիղների փնջի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$y-y_1=k(x-x_1), \qquad (18)$$

որտեղ k-ն կամայական պարամետր է։ Որպեսզի այդ փնջից առանձնացնենք այն ուղիղը, որն անցնում է $B(x_2, y_2)$ կետով, պետք է պահանջենք, որ այդ կետի կոորդինատները բավարարեն (18) հավասարմանը՝

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1)։ \qquad (19)$$

Այս հավասարումից պետք է որոշել k պարամետրի արժեքը և տեղադրել (18) հավասարման մեջ։ Այլ խոսքով, պետք է (18) հավասարումից և (19) հավասարությունից արտաքսել k-ն, որ մենք կկատարենք, (18)-ը բաժանելով (19)-ի վրա։

Այսպիսով, կստանանք $A(x_1, y_1)$ *և* $B(x_2, y_2)$ *կետերով անցնող ուղղի հավասարումը՝*

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\text{։} \qquad (20)$$

Եթե տված A *և* B *կետերը գտնվում են* Ox *առանցքին զուգահեռ* $(y_2-y_1=0)$ *կամ* Oy *առանցքին զուգահեռ* $(x_2-x_1=0)$ *ուղղի վրա, այդ դեպքում ուղղի հավասարումը կունենա, համապատասխանորեն՝* $y=y_1$ *կամ* $x=x_1$ *տեսքը։*

Դիտողություն. (19) առնչությունից կարող ենք գրել հետևյալ բանաձևը՝

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \qquad (19')$$

որն ուղղի անկյունային գործակիցն արտահայտում է ուղղի երկու կետերի կոորդինատների միջոցով։

Օրինակ 1. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $A(1, 2)$ *և* $B(-1, 1)$ *կետերով։*

(20) հավասարման մեջ տեղադրելով՝ $x_1=1$, $y_1=2$, $x_2=-1$, $y_2=1$, *կստանանք՝*

$$\frac{y-2}{1-2}=\frac{x-1}{-1-1}, \quad \text{կամ՝} \quad \frac{y-2}{1}=\frac{x-1}{2},$$

որտեղից

$$2y-4=x-1$$

և, վերջնականապես՝

$$x-2y+3=0\text{։}$$

Օրինակ 2. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $x+y-1=0$ *և* $x-y+2=0$ *ուղիղների հատման կետով և (2, 1) կետով։*

Առաջին եղանակ։ Գտնում ենք տված երկու ուղիղների հատման կետի կոորդինատները, որի համար տրված հավասարումները համատեղ լուծում ենք։ Հավասարումները գումարելով, գտնում ենք՝

$$2x+1=0, \quad \text{որտեղից՝} \quad x=-\frac{1}{2}\text{։}$$

Առաջին հավասարումից հանելով երկրորդը, գտնում ենք՝

$$2y-3=0, \quad \text{որտեղից՝} \quad y=\frac{3}{2}\text{։}$$

Այնուհետև մնում է կազմել $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ *և (2, 1) կետերով անցնող ուղղի հավասարումը, որ կլինի՝*

$$\frac{y-\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}}=\frac{x+\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}}, \quad \text{կամ՝} \quad \frac{y-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}},$$

որտեղից՝

$$5y-\frac{15}{2}=-x-\frac{1}{2},\quad \text{կամ՝}\quad x+5y-7=0:$$

Երկրորդ եղանակ։ Կազմենք այն ուղիղների փնջի հավասարումը, որի կենտրոնը տված երկու ուղիղների հատման կետն է՝

$$x+y-1+\lambda(x-y+2)=0: \qquad (17'')$$

Որպեսզի այս փնջից անջատենք (2, 1) կետով անցնող ուղիղը, պահանջենք, որ այդ կետի կոորդինատները բավարարեն (17'') հավասարմանը՝

$$2+1-1+\lambda(2-1+2)=0.$$

այստեղից կգտնենք λ պարամետրի արժեքը՝

$$2+3\lambda=0,\quad \lambda=-\frac{2}{3}:$$

(17'') հավասարման մեջ դնելով $\lambda=-\frac{2}{3}$, կստանանք՝

$$x+y-1-\frac{2}{3}(x-y+2)=0,$$

որտեղից՝

$$x+5y-7=0:$$

§ **13. Տված երեք կետերի՝ մեկ ուղիղի վրա գտնվելու պայմանը։** Դիցուք տված են երեք կետեր՝

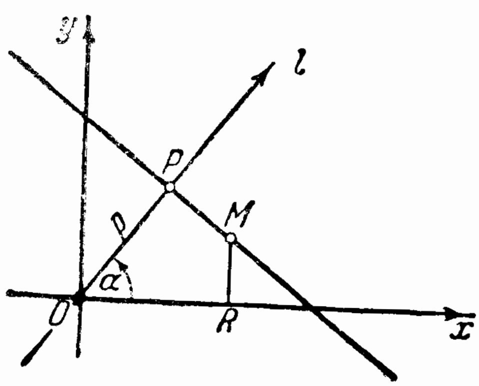
$$A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2),\ C(x_3, y_3):$$

A և B կետերով անցնող ուղիղի հավասարումը գրենք (20) տեսքով։ C կետը կգտնվի այդ ուղիղի վրա այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա x_3, y_3 կոորդինատները բավարարեն այդ ուղիղի հավասարմանը, այսինքն՝ եթե

$$\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}, \qquad (21)$$

որը և կլինի պահանջվող պայմանը։

§ **14. Ուղիղ գծի նորմալ հավասարումը։** Դիցուք հարթության վրա տված է մի որևէ ուղիղ։ Կոորդինատների սկզբնակետից տանենք ուղղահայաց այդ ուղիղին. այդ l-ի ուղղահայացի վրա դրական ուղղությունն ընտրենք սկզբնակետից դեպի տվյալ ուղիղը (եթե տվյալ ուղիղն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով, ապա l-ի ուղղությունը կարելի է



Գծ. 46

կամայապես ընտրել)։ Կոորդինատային առանցքների նկատմամբ տված ուղիղի դիրքը կարելի է բնորոշել, տալով նրա p հեռավորությունը կոորդինատների սկզբնակետից և Ox առանցքով ու l առանցքով կազմված α անկյունը (գծ. 46)։ Գտնենք այդ ուղիղի հավասարումը։

Դիցուք $M(x, y)$-ը ուղիղի կամայական կետ է։ Կառուցենք M կետի կոորդինատային հատվածները և դիտարկենք $\overline{ORMP}$ բեկյալը։ Այդ բեկյալը պրոյեկտենք l առանցքի վրա։ Քանի որ բեկյալի պրոյեկցիան հավասար է նրա փակող հատվածի պրոյեկցիային (գլ. I, § 8), ապա

$$\text{պր}\ \overline{ORMP}=\text{պր}\ \overline{OP}\text{։} \tag{22}$$

Մյուս կողմից, բեկյալի պրոյեկցիան հավասար է իր հատվածների պրոյեկցիաների գումարին (գլ. I, § 8), այսինքն՝

$$\text{պր}\ \overline{ORMP}=\text{պր}\ \overline{OR}+\text{պր}\ \overline{RM}+\text{պր}\ \overline{MP}\text{։} \tag{22'}$$

Բաղդատելով (22) և (22') հավասարությունները, կստանանք՝

$$\text{պր}\ \overline{OR}+\text{պր}\ \overline{RM}+\text{պր}\ \overline{MP}=\text{պր}\ \overline{OP}\text{։} \tag{22''}$$

Քանի որ ուղղությամբ օժտված հատվածի պրոյեկցիան առանցքի վրա հավասար է այդ հատվածի մեծությանը՝ բազմապատկած պրոյեկցիաների առանցքով և այն առանցքով կազմված անկյան կոսինուսով, որի վրա գտնվում է հատվածը (գլ. I, § 8), ապա՝

$$\text{պր}\ \overline{OR}=x\cos(-\alpha)=x\cos\alpha,$$

$$\text{պր}\ \overline{RM}=y\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=y\sin\alpha,$$

$$\text{պր}\ \overline{OP}=p\text{։}$$

Հաշվի առնելով նաև, որ՝

$$\text{պր}\ \overline{MP}=0,$$

և գտած արժեքները տեղադրելով (22'') հավասարության մեջ, կստանանք՝

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p,$$

կամ՝

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0\text{։} \tag{23}$$

Այս հավասարմանը բավարարում են դիտարկվող ուղիղի ցանկացած կետի x, y կոորդինատները։ Իսկ եթե կետը տված ուղիղի վրա չի գտնվում, ապա նրա կոորդինատներն այդ հավասարմանը չեն բավարարի, որովհետև այդ դեպքում համապատասխան բեկյալի պրոյեկցիան l առանցքի վրա հավասար չի լինի p-ի: Հետևաբար, (23) հավասարումը՝ տված ուղիղի հավասարումն է:

(23) տեսքի հավասարումը կոչվում է ուղիղի նորմալ հավասարում:

Նկատենք, որ ուղիղի նորմալ հավասարումը բնորոշվում է երկու առանձնահատկությամբ՝

1) նրա ազատ անդամը՝ $-p \leq 0$,

2) ընթացիկ կոորդինատների գործակիցների քառակուսիների գումարը հավասար է 1-ի՝

$$\cos^2 + \sin^2\alpha = 1:$$

Ինչպես էլ որ ուղիղը դասավորված լինի կոորդինատային առանցքների նկատմամբ, նրա հավասարումը միշտ կարելի է նորմալ տեսքով գրել:

§ 15. Առաջին աստիճանի ընդհանուր հավասարման բերումը նորմալ տեսքի: Դիցուք տված է առաջին աստիճանի հավասարում ընդհանուր տեսքով՝

$$Ax + By + C = 0: \qquad (24)$$

Ցույց տանք, որ այդպիսի հավասարումը կարելի է նորմալ տեսքի բերել:

Այդ նպատակով, տված հավասարման երկու մասերը բազմապատկենք M հաստատուն բազմապատկիչով, ընտրելով այդ բազմապատկիչն այնպես, որպեսզի հավասարումն ընդունի (23) տեսքը: (24) հավասարումը կգրվի այսպես՝

$$MAx + MBy + MC = 0: \qquad (24')$$

Որպեսզի այս հավասարումն ունենա (23) տեսքը, պետք է ընդունել, որ՝

$$MA = \cos\alpha, \quad MB = \sin\alpha, \quad MC = -p: \qquad (25)$$

Այս հավասարություններից հեշտությամբ կգտնենք M, α և p անհայտները՝ արտահայտված A, B, C հայտնի գործակիցներով: Իսկապես, (25) հավասարություններից առաջին երկուսը քառակուսի բարձրացնելով և գումարելով, կստանանք՝

$$M^2A^2 + M^2B^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

կամ՝

$$M^2(A^2 + B^2) = 1,$$

որտեղից՝

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} : \qquad (26)$$

Այստեղ պետք է նշանն ընտրել C ազատ անդամի նշանին հակադիր, ինչպես այդ երևում է (25)-ի վերջին հավասարությունից։ C=0 դեպքում արմատի նշանը կարելի է կամայապես ընտրել։

M-ի համար գտած արժեքը տեղադրելով (25) հավասարությունների մեջ, cos α*-ի,* sin α*-ի և* p*-ի համար կստանանք հետևյալ բանաձևերը՝*

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \\ \sin\alpha &= \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \\ p &= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} : \end{aligned}\right\} \qquad (25')$$

Այսպես ուրեմն, (24) հավասարումը նորմալ տեսքի է բերվում (26) բանաձևով որոշվող M բազմապատկիչով բազմապատկելու միջոցով։ Այդ M բազմապատկիչը կոչվում է նորմավորող բազմապատկիչ*։*

Օրինակ։ *Ուղիղի* $3x-4y-5=0$ *հավասարումը բերել նորմալ տեսքի։ Նորմավորող բազմապատկիչը հավասար կլինի՝* $M = +\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{5}$*։* *Տված հավասարումը բազմապատկելով այդ թվով, կստանանք՝*

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 1 = 0 :$$

Հետևաբար, տված ուղիղի համար կունենանք՝

$$p=1, \quad \cos\alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin\alpha = -\frac{4}{5} :$$

§ 16. Տված կետի հեռավորությունը տված ուղիղից: *Պայմանավորվենք* տված կետի շեղում տված ուղիղից *անվանել այն* d *թիվը, որը հավասար է այդ կետից ուղիղին իջեցրած ուղղահայացի երկարությանը՝ վերցրած պլյուս նշանով, երբ կետը և կոորդինատների սկզբնակետը գտնվում են տված ուղիղի տարբեր կողմերում, և մինուս նշանով, երբ այդ կետերը գտնվում են ուղիղի միևնույն կողմում։ Ուղիղի վրա գտնվող կետերի համար շեղումը հավասար է զրոյի։*

Ակներևաբեն, կետի հեռավորությունն ուղիղից՝ կետի d շեղման d| բացարձակ մեծությունն է։

Դիցուք տված են ուղիղ գիծն իր նորմալ հավասարումով՝

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (27)$$

և $A(x_1, y_1)$ *կետը: Գտնենք* A *կետի շեղումը տված ուղիղից:*

Դիտարկենք $\overline{ORAKP}$ *բեկյալը (գծ. 47) և այն պրոյեկտենք* l *առանցքի վրա: Քանի որ բեկյալի պրոյեկցիան հավասար է փակող հատվածի պրոյեկցիային (գլ. I, § 8), ապա՝*

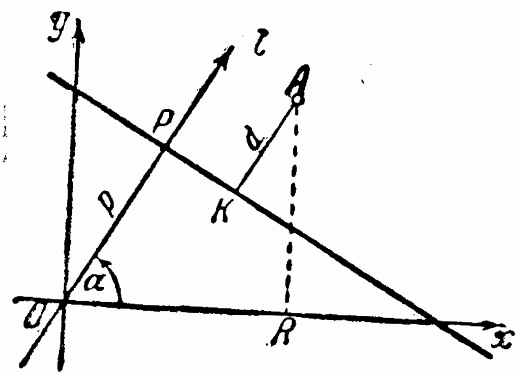
$$\text{պր}\ \overline{ORAKP} = \text{պր}\ \overline{OP} = p: \qquad (28)$$

Մյուս կողմից, բեկյալի պրոյեկցիան հավասար է նրա հատվածների պրոյեկցիաների գումարին (գլ. I, § 8), այսինքն՝

$$\text{պր}\ \overline{ORAKP} = \text{պր}\ \overline{OR} + \text{պր}\ \overline{RA} + \text{պր}\ \overline{AK} + \text{պր}\ \overline{KP}:$$

Հետևաբար, (28) հավասարումը կգրվի այսպես՝

$$\text{պր}\ \overline{OR} + \text{պր}\ \overline{RA} + \text{պր}\ \overline{AK} + \text{պր}\ \overline{KP} = p: \qquad (28')$$



Գծ. 47

Քանի որ ուղղությամբ օժտված հատվածի պրոյեկցիան հավասար է այդ հատվածի մեծությանը, բազմապատկած պրոյեկցիաների առանցքով և այն առանցքով կազմված անկյան կոսինուսով, որի վրա գտնվում է տված հատվածը (գլ. I, § 8), ապա՝

$$\text{պր}\ \overline{OR} = x_1\cos(-\alpha) = x_1\cos\alpha,$$

$$\text{պր}\ \overline{RA} = y_1\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = y_1\sin\alpha:$$

Հաշվի առնելով նաև, որ՝

$$\text{պր}\ \overline{AK} = -d, \quad \text{պր}\ \overline{KP} = 0, \quad \text{պր}\ \overline{OP} = p$$

և գտած արժեքները տեղադրելով (28′) հավասարության մեջ, կունենանք՝

$$x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - d = p,$$

որտեղից՝

$$d = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p: \qquad (29)$$

***Հետևաբար,* որպեսզի ստանանք** $A(x_1, y_1)$ **կետի շեղումը տվյալ ուղիղից, պետք է այդ ուղիղի նորմալ հավասարման ձախ մասում ընթացիկ կոորդինատների տեղը դնել տված կետի** x_1, y_1 **կոորդինատները:**

կետի հեռավորության համար, որը շեղման բացարձակ մեծությունն է, կունենանք հետևյալ բանաձևը՝

$$|d|=|x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p|: \qquad (29')$$

Օրինակ։ Գտնել (—1, 1) կետի հեռավորությունը $3x-4y+10=0$ ուղիղից։

Տված հավասարումը նորմալ տեսքի բերենք, բազմապատկելով այն նորմավորող բազմապատկիչով, որը տվյալ դեպքում կլինի՝ $M=-\dfrac{1}{\sqrt{9+16}}=-\dfrac{1}{5}$։ Ստանանք ուղիղի նորմալ հավասարումը՝

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0:$$

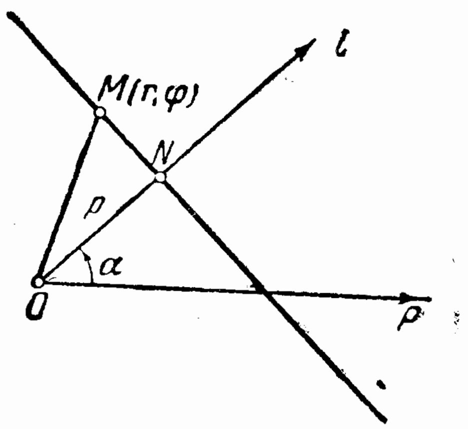
Տված (—1, 1) կետի շեղումը այդ ուղիղից հավասար է՝

$$d=-\frac{3}{5}\cdot(-1)+\frac{4}{5}\cdot 1-2=\frac{7}{5}-2=-\frac{3}{5}:$$

d-ի համար ստացված բացասական նշանը ցույց է տալիս, որ տված կետը և կոորդինատների սկզբնակետը գտնվում են ուղիղի միևնույն կողմում։ Կետի հեռավորությունն ուղիղից կլինի՝ $|d|=\dfrac{3}{5}$։

§ 17. Ուղիղի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով:

Հարթության վրա ուղիղի դիրքը լիովին կորոշվի, եթե տրվեն նրա p հեռավորությունն O բևեռից և բևեռային առանցքով ու այն l առանցքով կազմված α անկյունը, որն անցնում է բևեռով և ուղղահայաց է տված ուղիղին (գծ. 48)։ l առանցքի վրա դրական ուղղությունը համարում ենք բևեռից դեպի տվյալ ուղիղը (եթե ուղիղն անցնում է բևեռով, ապա l առանցքի ուղղությունը կարելի է կամայապես ընտրել)։



Գծ. 48

Ակներևորեն, տված ուղիղի բոլոր կետերը և միայն նրանք ունեն հետևյալ հատկությունը՝ O բևեռը ուղիղի վրա գտնվող M կետի հետ միացնող $\overline{OM}$ հատվածի պրոյեկցիան l առանցքի վրա հավասար է p-ի։ Ուղիղի կամայական M կետի բևեռային կոորդինատները նշանակելով r և φ, նշված հատկությունը կարող ենք այսպես գրել՝

$$r\cos(\varphi-\alpha)=p\text{։}$$

Այս էլ հենց ուղիղի հավասարումն է բևեռային կոորդինատներով։

Վարժություններ

1. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն Oy *առանցքից կտրում է 5 միավոր հատված և* Ox *առանցքի նկատմամբ թեքված է՝ ա) 45°, բ) 60°, գ) 135°, դ) 180° անկյունով։*

2. Գրել այն ուղիղի հավասարումը, որն Ox *առանցքի նկատմամբ թեքված է 30° անկյունով և* Oy *առանցքից կտրում է մի հատված, որի մեծությունը հավասար է —3-ի։*

3. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և Ox *առանցքի նկատմամբ թեքված է՝ ա) 45°, բ) 135°, գ) 180° անկյունով։*

4. Հետևյալ ուղիղների հավասարումները բերել անկյունային գործակցով տեսքի՝

ա) $x-y-1=0$, բ) $4x-2y+3=0$, գ) $3x+2y-5=0$,

դ) $2x+5y=0$, ե) $3y-7=0$։

5. Գրել այն ուղիղի հավասարումը, որն Ox *և* Oy *առանցքներից կտրում է համապատասխանորեն 3 և —4 մեծությունների հատվածներ։*

6. Հետևյալ ուղիղների հավասարումները գրել հատվածներով՝

ա) $3x+2y-6=0$, բ) $y=6x-3$,

գ) $y=x-1$, դ) $2x-3y+7=0$։

7. Գտնել $x-y-5=0$ *ուղիղի թեքման անկյունն* Ox *առանցքի նկատմամբ։*

8. Կառուցել հետևյալ հավասարումներով որոշվող ուղիղները՝

$$3x-5y+15=0,\quad 5x+3y=0,\quad 2x+3=0,\quad 3y-7=0\text{։}$$

9. Ինչպիսի՞ դիրք ունեն կոորդինատային առանցքների նկատմամբ հետևյալ հավասարումներով որոշվող չորս ուղիղները՝

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1,\quad \frac{x}{3}-\frac{y}{5}=1,\quad -\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1,\quad -\frac{x}{3}-\frac{y}{5}=1\text{։}$$

10. Շեղանկյան (ռոմբի) անկյունագծերը, որոնք ունեն 8 և 6 միավոր երկարություններ, ընդունված են որպես կոորդինատային առանցքներ։ Գտնել այդ շեղանկյան կողմերի հավասարումները։

11. Որոշել այն եռանկյան մակերեսը, որը գտնվում է կոորդինատային առանցքների և $2x+5y-20=0$ *ուղիղի միջև։*

12. Գտնել այն եռանկյան մակերեսը, որը սահմանափակված է հետևյալ ուղիղներով՝

$$y-2=0,\quad 3x-2y+4=0,\quad x-2y-7=0\text{։}$$

13. Ինչպիսի՞ կախում պետք է լինի a *և* b *գործակիցների միջև, որպեսզի* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ *ուղիղը* Ox *առանցքի նկատմամբ թեքված լինի՝ ա) 45°, բ) 60°, գ) 135° անկյունով։*

14. *Հետազոտել հետևյալ ուղիղների դիրքը կոորդինատային առանցքների նկատմամբ, կառուցել այդ ուղիղները՝*

ա) $x-2y=0$, *բ)* $x-1=0$, *գ)* $y+1=0$, *դ)* $x-y=0$,

ե) $x+y=0$, *զ)* $5x=0$, *է)* $3y=0$, *ը)* $3x+2y-6=0$։

15. *Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է (2, 3) կետով և աբսցիսների առանցքի նկատմամբ թեքված է 45° անկյունով։*

16. *Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է (2, —3) կետով և զուգահեռ է (1, 2) ու (—1, —5) կետերը միացնող ուղիղին։*

17. *Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է (1, 2) կետով և ուղղահայաց է (4, 3) ու (—2, 1) կետերը միացնող ուղիղին։*

18. *Տված են* ABCD *քառանկյան գագաթները՝* A(2, 2), B(5, 1), C(3, 6), D(0, 3)։ *Գտնել նրա անկյունագծերի հատման կետը։*

19. *Հաշվել հետևյալ ուղիղներով կազմված անկյունը՝*

ա) $y=\frac{1}{2}x+2$, *բ)* $y=3x-4$, *գ)* $y=3x-1$,

$y=3x-7$, $y=3x+5$, $y=-\frac{1}{3}x+4$,

դ) $2x+3y-1=0$, *ե)* $\sqrt{3}x-y-1=0$, *զ)* $\frac{y}{12}-\frac{x}{3}=1$,

$4x+6y+2=0$, $\sqrt{3}x-3y+6=0$, $\frac{x}{25}-\frac{y}{15}=1$,

է) $2x-y+5=0$, *ը)* $4x+3y-1=0$, *թ)* $x+4y+3=0$,

$x+3y-2=0$, $x+2y=0$, $5y+7=0$։

20. *Գտնել* $3x-2y+7=0$ *և* $2x+3y-5=0$ *ուղիղներով կազմված անկյունը։*

21. *(3, 3) կետով տանել այնպիսի ուղիղներ, որոնք* $5x-4y-1=0$ *ուղիղի հետ կազմում են 45° անկյուն։*

22. *Գտնել այն եռանկյան ներքին անկյունները, որի կողմերն արտահայտվում են հետևյալ հավասարումներով՝*

$x-y-3=0$, $x-3y-4=0$, $4x+2y+3=0$։

23. *Գտնել* A(2, 1), B(3, 1), C(1, 2) *գագաթներ ունեցող եռանկյան կողմերի երկարությունները և ներքին անկյունները։*

24. *Տված են եռանկյան երկու գագաթները՝* A(2, 2), B(3, 0) *և միջնագծերի հատման կետը՝* D(3, 1)։ *Գտնել երրորդ գագաթը։*

25. *Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և՝ ա) զուգահեռ է* $y=2x+3$ *ուղիղին, բ) ուղղահայաց է* $y=\frac{1}{3}x-1$ *ուղիղին, գ)* $y=3x+5$ *ուղիղի հետ կազմում է 45° անկյուն։*

26. *Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է (—2, 3) կետով և՝ ա) զուգահեռ է* Ox *առանցքին, բ) զուգահեռ է* I *կոորդինատային* անկյան կիսորդին, գ) զուգահեռ է $y=4x-7$ ուղղին, դ) $y=2x-1$ ուղղի հետ կազմում է 60° անկյուն, ե) ուղղահայաց է $y=\frac{1}{2}x+8$ ուղղին։

27. Գտնել $y=5x+1$ ուղղին՝ կոորդինատային առանցքների հետ նրա հատման կետերում կանգնեցրած ուղղահայացների հավասարումները։

28. $x-y-3=0$ և $2x+3y-11=0$ ուղիղների հատման կետով տանել $5x-4y-17=0$ ուղղին զուգահեռ ուղիղ։

29. $3x-y-3=0$ և $4x+3y-4=0$ ուղիղների հատման կետով տանել դրանցից առաջինին ուղղահայաց ուղիղ։

30. Տանել ուղիղ՝ կոորդինատների սկզբնակետով և $11x-17y-9=0$ ու $12x+13y-5=0$ ուղիղների հատման կետով։

31. $x+y-6=0$ և $2x-y-3=0$ ուղիղների հատման կետով տանել մի ուղիղ, որը $3x-5=0$ ուղղի հետ կազմի 45° անկյուն։

32. Գտնել այն ուղիղը, որն անցնում է (2, −3) կետով և Ox առանցքի հետ կազմում է այնպիսի անկյուն, որը երկու անգամ մեծ է նույն առանցքի հետ $y=\frac{1}{2}x+3$ ուղղի կազմած անկյունից։

33. $x-2y-5=0$ և $2x-3y-8=0$ ուղիղների հատման կետով տանել $3x-2y+2=0$ ուղղին զուգահեռ ուղիղ։

34. $2x-3y+5=0$ և $x-4y+5=0$ ուղիղների հատման կետով տանել մի ուղիղ, որը $2x-3=0$ ուղղի հետ կազմի 45° անկյուն (անկյունը հաշվում ենք $2x-3=0$ ուղղից)։

35. Եռանկյան կողմերն արտահայտվում են հետևյալ հավասարումներով՝

$$x+3y-2=0, \qquad 2x+y+5=0, \qquad 3x-4=0։$$

Գտնել այդ եռանկյան բարձրությունների հավասարումները։

36. Եռանկյան գագաթներն են՝ (0, 5), (1, −2), (−6, 5)։ Գտնել եռանկյան կողմերի միջնուղղահայացների հավասարումները և նրանց հատման կետը։

37. Եռանկյան գագաթներն են՝ (0, 1), (1, 0), (1, 1)։ Գտնել եռանկյան միջնագծերի հավասարումները։

38. Եռանկյան գագաթներն են՝ (2, 1), (0, 7), (−4, −1)։ Գտնել միջնագծերի հավասարումները և նրանց հատման կետը։

39*. Եռանկյան կողմերի հավասարումներն են՝ $y=4x+4$, $y=-x+4$, $4y=x+1$։ Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և այդ եռանկյան միջնագծերի հատման կետով։

40. Եռանկյան կողմերի հավասարումներն են՝ $x-y-4=0$, $2x-11y+37=0$, $2x+7y-17=0$։ Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և այդ եռանկյան միջնագծերի հատման կետով։

41*. $4x+3y-12=0$ ուղղի վրա գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացած (−1, −2) և (1, 4) կետերից։

42. $3x+2y-5=0$ ուղղի վրա գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացած (−1, −1) և (3, 3) կետերից։

43. Գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացած (2, 3), (4, 2) և (−1, 0) կետերից։

44. Տված են զուգահեռագծի երկու կողմերի հավասարումները՝

$$x+y-1=0, \qquad 3x-y+4=0$$

և նրա անկյունագծերի հատման կետը՝ (3, 3)։ Գտնել զուգահեռագծի մյուս երկու կողմերի հավասարումները։

45. Տված են ABC հավասարակողմ եռանկյան երկու գագաթները՝ $A(2, 1)$, $B(2, 5)$։ Գտնել երրորդ գագաթը։

46. Հետևյալ ուղիղների հավասարումներից որո՞նք ունեն նորմալ տեսք՝

ա) $4x-7y+9=0$, բ) $\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}y-3=0$, գ) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-1=0$,

դ) $\frac{1}{3}x+y-5=0$, ե) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y+5=0$։

47. Գտնել ուղղի հավասարումը հետևյալ պայմաններով. նրա հեռավորությունը կոորդինատների սկզբնակետից հավասար է 7 միավորի, իսկ սկզբնակետից որոնելի ուղղին իջեցրած ուղղահայացը Ox առանցքի հետ կազմում է 120° անկյուն։

48. Գրել ուղղի հավասարումը, եթե հայտնի է, որ նրա հեռավորությունն սկզբնակետից հավասար է 5 միավորի, իսկ կոորդինատների սկզբնակետից նրա վրա իջեցրած ուղղահայացը Ox առանցքի հետ կազմում է 60° անկյուն։

49. Հետևյալ ուղիղների հավասարումները բերել նորմալ տեսքի՝

ա) $3x+4y+15=0$, բ) $6x-8y-9=0$,

գ) $2x+2\sqrt{3}\,y-7=0$, դ) $x+y+5=0$։

50*. Գտնել կոորդինատների սկզբնակետից $15x-8y-51=0$ և $4x+3y+35=0$ ուղիղներին իջեցրած ուղղահայացների երկարությունները և այդ ուղղահայացների հիմքերի կոորդինատները։

51. Եռանկյան գագաթը գտնվում է (5, —3) կետում, իսկ հիմքը՝ (0, —1) և (3, 3) կետերը միացնող հատվածն է։ Գտնել եռանկյան բարձրության երկարությունը։

52. $x+3y=0$ ուղղի վրա գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացած կոորդինատների սկզբնակետից և $x+3y-2=0$ ուղղից։

53*. Տված է $3x-4y-10=0$ ուղիղը։ Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որը տվածին զուգահեռ է և նրանից ունի 3 միավոր հեռավորություն։

54. Տված է $5x+12y+2=0$ ուղիղը։ Գտնել այն ուղղի հավասարումը, որը տվածին զուգահեռ է և նրանից ունի 3 միավոր հեռավորություն։

55. Գտնել հետևյալ զուգահեռ ուղիղների միջև եղած հեռավորությունը՝

$$3x+4y-15=0 \text{ և } 3x+4y+20=0։$$

56. Գտնել հետևյալ զուգահեռ ուղիղների հեռավորությունը՝

$$5x-12y+28=0 \text{ և } 5x-12y+15=0։$$

57. Տված են սեղանի հիմքերի հավասարումները՝

$$2x+y-5=0 \text{ և } 4x+2y-7=0։$$

Գտնել սեղանի բարձրությունը։

58*. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $A(5, 2)$ կետով և $(-3, 1)$ կետից ունի 4 միավոր հեռավորություն։

59. $(1, -2)$ կետից տանել շոշափողներ այն շրջանագծին, որի շառավիղը հավասար է՝ $\frac{2}{5}\sqrt{85}$-ի, իսկ կենտրոնը գտնվում է $(3, 6)$ կետում։

60*. Գտնել $3x+4y-9=0$ և $12x+9y-8=0$ ուղիղներով կազմված անկյունների կիսորդների հավասարումները։ Ցույց տալ, որ այդ կիսորդները միմյանց ուղղահայաց են։

61. Գտնել հետևյալ ուղիղներով կազմված անկյունների կիսորդները՝

$$x+8y-26=0 \text{ և } 4x+7y+29=0\text{։}$$

62. Եռանկյան գագաթներն են՝ $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 7)$։ Գտնել A արտաքին անկյան կիսորդի հավասարումը։

63. Գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացած $M(4, -3)$ և $N(2, -1)$ կետերից և գտնվում է $4x+3y-2=0$ ուղիղից 2 միավոր հեռավորության վրա։

64. Տված են քառակուսու $C(-1, 0)$ կենտրոնը և մի կողմի հավասարումը՝

$$x+3y-5=0\text{։}$$

Գտնել մյուս կողմերի հավասարումները։

65. Ուղղանկյուն հավասարասրուն եռանկյան էլեմենտներից տված են մի էջի հավասարումը՝ $y=2x$ և ներքնաձիգի միջնակետը՝ $K(4, 2)$։ Գտնել մյուս կողմերի հավասարումները։

66. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց՝ տված երկու կետերից ունեցած հեռավորությունների քառակուսիների տարբերությունը հաստատուն մեծություն է։

67. Եռանկյան հիմքն անշարժ է, իսկ գագաթը շարժվում է տված ուղիղի վրա։ Գտնել այդ եռանկյան ծանրության կենտրոնի գծած գծի հավասարումը։

Գ Լ Ո Ւ Խ IV

ԿՈՆԱԿԱՆ ՀԱՏՈՒՅԹՆԵՐԻ ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԸ

§ **1. Նախնական դիտողություններ:** *x և y փոփոխականների նկատմամբ երկրորդ աստիճանի ընդհանուր հավասարումը կարող է պարունակել երկրորդ աստիճանի անդամներ (x^2, xy և y^2), առաջին աստիճանի անդամներ (x և y) և զրո աստիճանի անդամ (ազատ անդամ)։ Դրան համապատասխան, երկրորդ աստիճանի ընդհանուր հավասարումը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝*

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0։$$

Այստեղ A, B, C գործակիցներից գոնե մեկը պետք է զրոյից տարբեր լինի։

Այն հարցը, թե այդ հավասարումն ինչպիսի՞ գծեր կորոշի A, B, C, D, E, F գործակիցների զանազան արժեքների դեպքում, կպարզվի V գլխում։ Այս գլխում կդիտարկենք այդ հավասարման միայն մի քանի հատուկ տեսակները։

§ **2. Շրջանագիծ:** *Մենք արդեն տեսել ենք (գլ. II, § 1), որ $C(a, b)$ կենտրոն և R շառավիղ ունեցող շրջանագիծն ունի հետևյալ հավասարումը՝*

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2։ \qquad (1)$$

Փակագծերը բացելով, կստանանք՝

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-R^2)=0, \qquad (1')$$

որը կարելի է կարճ այսպես գրել՝

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0, \qquad (1'')$$

նշանակելով՝

$$D=-2a, \quad E=-2b, \quad F=a^2+b^2-R^2։$$

(1″) հավասարումը երկրորդ աստիճանի է։ Այսպիսով, շրջա-

նազիծն ունի ընթացիկ կոորդինատների նկատմամբ երկրորդ աստիճանի հավասարում:

Սակայն, ակներևաբար, երկրորդ աստիճանի ո՛չ ամեն հավասարում շրջանագիծ կորոշի։ Իրոք, (1'') հավասարումից տեսնում ենք, որ շրջանագծի հավասարման մեջ կոորդինատների քառակուսիների գործակիցները միմյանց հավասար են, իսկ կոորդինատների արտադրյալ պարունակող անդամը (xy) բացակայում է: *Հակադարձաբար, եթե այդ երկու պայմանները (x^2-ու և y^2-ու գործակիցների հավասարությունը և xy արտադրյալի բացակայությունը) տեղի ունեն, ապա հավասարումն ընդհանրապես ասած, որոշում է մի շրջանագիծ, որովհետև այդպիսի հավասարումը կբերվի (1'') տեսքին, եթե բաժանենք x^2-ու գործակցի վրա*[1]*։*

Ուրեմն, տված երկրորդ աստիճանի հավասարման տեսքով կարող ենք որոշել, թե արդյո՞ք նա շրջանագծի հավասարում է, թե՝ ոչ։

Օրինակ,

$$x^2+y^2-2x+4y-4=0$$

հավասարումը որոշում է շրջանագիծ, քանի որ նրա մեջ կոորդինատների քառակուսիների մոտ գործակիցները միմյանց հավասար են, իսկ կոորդինատների արտադրյալ պարունակող անդամ չկա։ Եթե ցանկանում ենք այդ շրջանագիծը կառուցել, ապա նախապես պետք է որոշենք նրա կենտրոնն ու շառավիղը։ Այդ նպատակով տված հավասարումը պետք է բերենք (1) տեսքին։ Այդ ձևափոխությունը ոչ այլ ինչ է նշանակում, եթե ոչ (1'') հավասարումը ներկայացնել (1) տեսքով։ Տված հավասարման մեջ վերցնենք x պարունակող անդամները, այն է՝ x^2-2x, և այդ երկանդամը ձևափոխենք այսպես՝

$$x^2-2x=(x-1)^2-1,$$

այսինքն՝ x պարունակող անդամներից առանձնացնում ենք (x—1) գծային երկանդամի լրիվ քառակուսին։

---

[1] *Քանի որ* $a=-\frac{D}{2}$, $b=-\frac{E}{2}$ *և* $R^2=a^2+b^2-F=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$, *ապա (1'') հավասարումը* $D^2+E^2-4F>0$ *դեպքում կորոշի շրջանագիծ՝* $R=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ *շառավղով,* $D^2+E^2-4F=0$ *դեպքում՝ զրո շառավղով շրջանագիծ (կետ), իսկ* $D^2+E^2-4F<0$ *դեպքում ասում են, որ (1'') հավասարումը որոշում է կեղծ շրջանագիծ։*

Այնուհետև, վերցնենք y պարունակող անդամները, այն է՝ y^2+4y և այդ երկանդամը նույնպիսի ձևափոխության ենթարկենք, կստանանք՝

$$y^2+4y=(y+2)^2-4:$$

Այդ բոլորից հետո, տված հավասարումը կգրենք այսպես՝

$$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4-4=0:$$

Ազատ անդամները տեղափոխելով հավասարման աջ մասը, կունենանք՝

$$(x-1)^2+(y+2)^2=9:$$

Այս հավասարումը բաղդատելով (1) հավասարման հետ տեսնում ենք, որ $a=1$, $b=-2$, $R=3$: Այսպիսով, շրջանագծի կենտրոնը (1, −2) կետն է, իսկ շառավիղը հավասար է 3-ի: Այս տվյալներով մենք կարող ենք կառուցել շրջանագիծը:

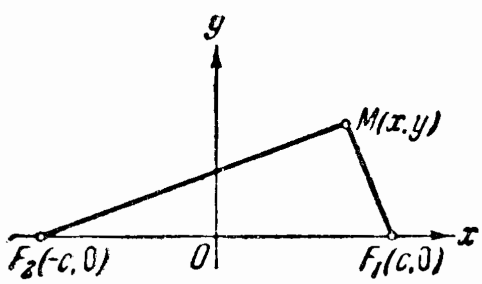
Օրինակ: Գտնել $x^2+y^2-2x=0$ շրջանագծի կենտրոնն ու շառավիղը: Հավասարումը ձևափոխում ենք այսպես՝

$$(x-1)^2-1+y^2=0 \quad \text{կամ՝} \quad (x-1)^2+y^2=1:$$

Այստեղից երևում է, որ շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է (1, 0) կետում, իսկ շառավիղը հավասար է 1-ի:

§ 3. Էլիպս: Էլիպս կոչվում է այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց՝ տված երկու կետերից ունեցած հեռավորությունների գումարը հաստատուն մեծություն[1] է: Տված կետերը կոչվում են էլիպսի ֆոկուսներ:

Էլիպսի հավասարումը կազմելու համար որպես աբսցիսների առանցք ընդունենք տված F_1 և F_2 կետերով անցնող ուղիղը, նրա վրա դրական ուղղությունը վերցնելով F_2-ից դեպի F_1-ը: Կոորդինատների սկզբնակետը վերցնենք F_2-ը և F_1-ը միացնող հատվածի միջնակետում (գծ. 49): Ֆոկուսների F_1F_2 հեռավորությունը նշանակենք $2c$: Այդ դեպքում F_1 և F_2 կետերի կոորդինատները, համապատասխանորեն, կլինեն՝ $(c, 0)$ և $(-c, 0)$: Էլիպսի կամայական M կետի կոորդինատները նշանակելով x և y, F_1M և F_2M հատվածների երկարությունները արտահայտենք երկու կետերի հեռավորության բանաձևով (գլ. I, § 5)՝



Գծ. 49

[1] Պարզ է, որ այդ հաստատուն մեծությունը չի կարող միջֆոկուսային հեռավորությունից փոքր լինել: Իսկ եթե նա հավասար լինի այդ հեռավորությանը, ապա մեր դիտարկած կետերի երկրաչափական տեղը կլինի տված կետերով (ֆոկուսներով) սահմանափակված հատվածը: Այսպիսով, մնում է ընդունել, որ տված հաստատուն մեծությունը մեծ պետք է լինի միջֆոկուսային հեռավորությունից:

$$F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$F_2M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}։$$

Էլիպսի սահմանման համաձայն F_1M+F_2M *գումարը հաստատուն մեծություն է։ Այն նշանակելով* 2a-*ով, կունենանք՝*

$$F_1M+F_2M=2a,$$

կամ՝

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a։$$

Այս էլիպսի հավասարումն է՝ կոորդինատների մեր ընտրած սիստեմում։

Որպեսզի մեր գտած հավասարմանը պարզագույն տեսք տանք, հարկավոր է այն ազատել արմատներից։ Արմատներից մեկը փոխադրելով հավասարության աջ մասը, կստանանք՝

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}։$$

Երկու մասերը քառակուսի բարձրացնելով, կգտնենք՝

$$x^2-2cx+c^2+y^2=$$

$$=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+cx+c^2+y^2,$$

կամ՝

$$-4cx=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

որտեղից՝

$$cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}։$$

Նորից քառակուսի բարձրացնելով, կստանանք՝

$$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2),$$

կամ՝

$$c^2x^2+a^4=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2,$$

որտեղից՝

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)։$$

Երկու մասերը բաժանելով $a^2(a^2-c^2)$ *վրա, կստանանք՝*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1։ \qquad (2)$$

Քանի որ $c<a$, *ապա* a^2-c^2 *տարբերությունը դրական մեծություն է. այն ընդունված է նշանակել* b^2*։ Այդ դեպքում էլիպսի հավասարումը կլինի՝*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{3}$$

որտեղ նշանակված է՝

$$b^2=a^2-c^2: \tag{4}$$

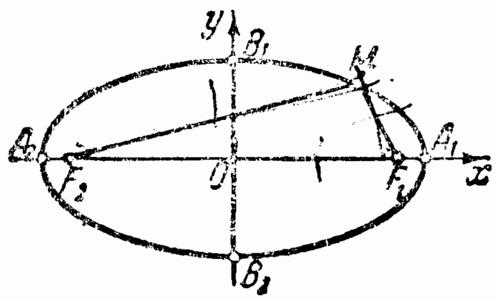
(3) հավասարումը կոչվում է էլիպսի **կանոնական** *հավասարում*[1]

Այժմ զբաղվենք էլիպսի ձևի ուսումնասիրությամբ։ Այդ հեշտ կլինի կատարել, եթե ելնենք մեր կազմած (3) հավասարումից։

1) Էլիպսի սիմետրիան։ Քանի որ (3) հավասարումը պարունակում է ընթացիկ կոորդինատների միայն քառակուսիները, ուստի եթե (x, y) *կետը էլիպսի վրա է գտնվում, ապա* $(\pm x, \pm y)$ *կետերը նույնպես գտնվում են այդ էլիպսի վրա՝ կոորդինատների նշանների ցանկացած ընտրության դեպքում։ Հետևաբար, կոորդինատային առանցքները էլիպսի համար սիմետրիայի առանցքներ են։*

Էլիպսի այն սիմետրիայի առանցքը, որի վրա գտնվում են ֆոկուսները, կոչվում է **ֆոկուսային** *(կամ* **ֆոկալ***)* **առանցք***։*

Էլիպսի սիմետրիայի առանցքների հատման կետը (սիմետրիայի կենտրոնը) կոչվում է **էլիպսի կենտրոն***։ (3) հավասարումով տրված էլիպսի ֆոկուսային առանցքը համընկնում է* Ox *առանցքի հետ, իսկ կենտրոնը՝ կոորդինատների սկզբնակետն է։*



Գծ. 50

2) Սիմետրիայի առանցքների հետ էլիպսի հատման կետերը։ Էլիպսի հատման կետերը սիմետրիայի առանցքների հետ կոչվում են **էլիպսի գագաթներ***։ Քանի որ (3) հավասարումով տրված էլիպսի սիմետրիայի առանցքները կոորդինատային առանցքներն են, ուստի այդ էլիպսի գագաթները կգտնվեն կոորդինատային առանցքների հետ էլիպսի հատման կետերում. (3) հավասարման մեջ ընդունելով* $y=0$, *կգտնենք* Ox *առանցքի հետ էլիպսի հատման կետերի աբսցիսները՝։*

---

[1] *Ակներևորեն, (3) հավասարմանը բավարարում են էլիպսի վրա գտնվող ամեն մի կետի կոորդինատները։ Կարելի է ցույց տալ, որ (3) հավասարումն էլիպսին չպատկանող «ավելորդ» կետեր չի տալիս, չնայած այն հանգամանքին, որ (3) հավասարումն ստանալու համար երկու անգամ հարկ եղավ հավասարման երկու մասերը քառակուսի բարձրացնել։*

$$\frac{x^2}{a^2}=1, \text{ որտեղից՝ } x^2=a^2 \text{ և } x=\pm a։$$

Ընդունելով $x=0$, կգտնենք Oy առանցքի հետ էլիպսի հատման կետերի օրդինատները՝

$$\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ որտեղից՝ } y^2=b^2 \text{ և } y=\pm b։$$

Հետևաբար, (3) էլիպսի գագաթներ կլինեն հետևյալ կետերը (գծ. 50)՝

$$A_1(a,\ 0),\ A_2(-a,\ 0) \text{ և } B_1(0,\ b),\ B_2(0,\ -b)։$$

Էլիպսի հակադիր գագաթները միացնող A_1A_2 և B_1B_2 հատվածները, ինչպես և նրանց $2a$ և $2b$ երկարությունները կոչվում են էլիպսի, համապատասխանորեն, **մեծ** և **փոքր առանցքներ**, a և b երկարություններն անվանում են էլիպսի, համապատասխանորեն, **մեծ** և **փոքր կիսաառանցքներ**։

3) Էլիպսի ձևը։ Էլիպսի ձևն ուսումնասիրելու համար բավական է (3) հավասարման մեջ համարել $x\geqslant 0$ և $y\geqslant 0$, որովհետև, ինչպես արդեն տեսանք, էլիպսը սիմետրիկ դասավորություն ունի կոորդինատային առանցքների նկատմամբ։ (3) հավասարումից հետևում է, որ $\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1$ կամ՝ $x\leqslant a$, այսինքն՝ x-ը կարող է փոփոխվել 0-ից մինչև a։ x-ը 0-ից մինչև a մեծանալիս, y-ը փոքրանում է b-ից մինչև 0։ Այսպիսով, էլիպսն ունի գծ. 50-ում ցույց տրված ձևը։

Էլիպսի մեխանիկական կառուցումը։ Գիտենալով F_1 և F_2 ֆոկուսները և մեծ առանցքի $2a$ երկարությունը, հեշտ է էլիպսը կառուցել մեխանիկորեն։ Հարկավոր է վերցնել $2a$ երկարությամբ թել, նրա երկու ծայրերն ամրացնել F_1 և F_2 կետերում և թելին տալով F_1MF_2 ձևը, M կետով գծել էլիպս (M կետում տեղավորելով մատիտի սուր ծայրը)։

$a=b\,(c=0)$ դեպքում (3) հավասարումն ընդունում է $x^2+y^2=a^2$ տեսքը և շրջանագիծ է որոշում։ Հետևաբար, շրջանագիծը կարելի է դիտել որպես հավասար կիսաառանցքներ ունեցող էլիպս։

§ **4. Հիպերբոլ և նրա ասիմպտոտները։** Հիպերբոլ կոչվում է այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց՝ տված երկու կետերից ունեցած հեռավորությունների տարբերությունը հաստատուն մեծություն[1] է: Այդ կետերը կոչվում են հիպերբոլի ֆոկուսներ:

Այդ հաստատուն մեծությունը նշանակենք 2a, միջֆոկուսային հեռավորությունը՝ 2c և կոորդինատային առանցքներն ընտրենք այնպես, ինչպես § 3-ում: Դիցուք M(x, y)-ը հիպերբոլի կամայական կետ է:

Հիպերբոլի սահմանման համաձայն՝

$$F_2M-F_1M=\pm 2a\text{։}$$

Հավասարության աջ մասում պետք է ընտրել + նշանը, եթե $F_2M>F_1M$ *և — նշանը, եթե* $F_2M<F_1M$։

Քանի որ՝

$$F_2M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

ապա վերջին հավասարությունը կարելի է այսպես գրել՝

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a\text{։}$$

Այս էլ հենց հիպերբոլի հավասարումն է մեր ընտրած կոորդինատային սիստեմում:

Այս հավասարումն ազատելով արմատներից (ինչպես § 3-ում) կարելի է այն պարզագույն տեսքի բերել:

Առաջին արմատը տեղափոխելով հավասարության աջ մասը և երկու մասերը քառակուսի բարձրացնելով, ակներև ձևափոխություններից հետո կստանանք՝

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx\text{։}$$

Հավասարության երկու մասերը նորից քառակուսի բարձրացնելով, նման անդամների միացում կատարելով և ազատ անդամի վրա բաժանելով, կստանանք՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1\text{։} \tag{2}$$

---

[1] *Պարզ է, որ այդ հաստատունը չի կարող մեծ լինել* F_1 *և* F_2 *ֆոկուսների հեռավորությունից, իսկ եթե նա հավասար լինի այդ հեռավորությանը, ապա դիտարկվող կետերի երկրաչափական տեղը բաղկացած կլինի ֆոկուսներով անցնող ուղիղի այն կետերի բազմությունից, որոնք գտնվում են* F_1F_2 *հատվածից դուրս: Ուրեմն, պետք է ընդունել, որ այդ հաստատունը դրական է և փոքր է միջֆոկուսային հեռավորությունից:*

Այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց՝ տված երկու կետերից ունեցած հեռավորությունների տարբերությունը հավասար է զրոյի, F_1F_2 *հատվածի միջնուղղահայացն է:*

Քանի որ $c>a$, *ապա* c^2-a^2 *մեծությունը դրական է։ Նշանակելով այն* b^2, *այսինքն՝*

$$b^2=c^2-a^2, \tag{4'}$$

կստանանք հիպերբոլի կանոնական հավասարումը[1]՝

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3'}$$

Հետազոտենք հիպերբոլի ձևը։

1) Հիպերբոլի սիմետրիան։ Քանի որ (3′) հավասարումը ընթացիկ կոորդինատների միայն քառակուսիներն է պարունակում, ապա կոորդինատային առանցքները հիպերբոլի համար սիմետրիայի առանցքներն են (տե՛ս համանման եզրակացությունն էլիպսի համար)։ Հիպերբոլի սիմետրիայի այն առանցքը, որի վրա գտնվում են ֆոկուսները, կոչվում է ֆոկուսային առանցք*։ Սիմետրիայի առանցքների հատման կետը (սիմետրիայի կենտրոնը) կոչվում է* հիպերբոլի կենտրոն*։ (3′) հավասարումով տրված հիպերբոլի ֆոկուսային առանցքը համընկնում է* Ox *առանցքի հետ, իսկ կենտրոնը՝ կոորդինատների սկզբնակետն է։*

2) Հատման կետերը սիմետրիայի առանցքների հետ։ Գտնենք սիմետրիայի առանցքների հետ հիպերբոլի հատման կետերը՝ հիպերբոլի գագաթները*։ (3′) հավասարման մեջ ընդունելով* $y=0$, *կգտնենք* Ox *առանցքի հետ հիպերբոլի հատման կետերի աբսցիսները՝*

$$\frac{x^2}{a^2}=1, \text{ որտեղից՝ } x^2=a^2 \text{ և } x=\pm a.$$

Հետևաբար, $A_1(a, 0)$ *և* $A_2(-a, 0)$ *կետերը հիպերբոլի գագաթներ են (գծ. 51). Նրանց միջև հեռավորությունը հավասար է* $2a$*։* Oy *առանցքի հետ հիպերբոլի հատման կետերի օրդինատները գտնելու համար պետք է (3′) հավասարման մեջ դնել* $x=0$, *որ կտա՝*

$$-\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ կամ՝ } y^2=-b^2,$$

որտեղից՝

---

[1] *Ակներևաբար, (3′) հավասարմանը բավարարում են հիպերբոլին պատկանող ամեն մի կետի կոորդինատներ։ Կարելի է ցույց տալ, որ այդ հավասարմանը չեն բավարարում հիպերբոլի վրա չգտնվող կետերի կոորդինատները։*

$$y = \pm\sqrt{-b^2} = \pm b\sqrt{-1}.$$

Ուրեմն, y-ի համար ստացանք կեղծ արժեքներ, այդ նշանակում է, որ հիպերբոլը չի հատվում Oy *առանցքի հետ։ Սրան համապատասխան, հիպերբոլի հետ հատվող սիմետրիայի առանցքը կոչվում է* սիմետրիայի իրական առանցք (ֆոկուսային առանցք), *իսկ չհատվող սիմետրիայի առանցքը՝* սիմետրիայի կեղծ առանցք։ *(3′) հավասարումով տրված հիպերբոլի սիմետրիայի իրական առանցքը* Ox *առանցքն է, իսկ կեղծ առանցքը՝* Oy *առանցքն է։ Հիպերբոլի գագաթները միացնող* A_1A_2 *հատվածը, ինչպես և նրա* 2a *երկարությունը, կոչվում է* հիպերբոլի իրական առանցք։ *Եթե հիպերբոլի սիմետրիայի կեղծ առանցքի վրա նրա* O *կենտրոնից դեպի երկու կողմերը վերցնենք* b *երկարությամբ* OB_1 *և* OB_2 *հատվածներ, ապա* B_1B_2 *հատվածը, ինչպես և նրա* 2b *երկարությունը, կանվանենք* հիպերբոլի կեղծ առանցք։ a *և* b *մեծությունները կոչվում են հիպերբոլի համապատասխանորեն* իրական *և* կեղծ կիսաառանցքներ։

3) Հիպերբոլի ձևը։ Քանի որ հիպերբոլը սիմետրիկ դասավորություն ունի կոորդինատային առանցքների նկատմամբ, ուստի հիպերբոլի ձևը հետազոտելիս բավական է դիտարկել x-*ի և* y-*ի դրական արժեքները։ (3′) հավասարումից հետևում է, որ* $\frac{x^2}{a^2} \geqslant 1$, *հետևաբար,* x-*ը կարող է փոփոխվել* a-*ից մինչև* $+\infty$։ *Երբ* x-*ը մեծանա* a-*ից մինչև* $+\infty$, y-*ը նույնպես կմեծանա* 0-*ից մինչև* $+\infty$։ *Կորն ունի գծ. 51-ում պատկերված ձևը։ Նա ամբողջությամբ գտնվում է* $x = \pm a$ *ուղիղներով սահմանափակված շերտից դուրս և բաղկացած է երկու անջատ ճյուղերից։ Այդ ճյուղերից մեկի յուրաքանչյուր* M *կետի համար* $F_2M > F_1M$ *և* $F_2M - F_1M = 2a$ *(աջ ճյուղ), իսկ մյուս ճյուղի ցանկացած* M *կետի համար՝* $F_1M > F_2M$ *և* $F_1M - F_2M = 2a$ *(ձախ ճյուղ)։*

4) Հիպերբոլի ասիմպտոտները։ Հիպերբոլի ձևն ավելի պարզ պատկերացնելու համար դիտարկենք երկու ուղիղներ, որոնք սերտորեն կապված են հիպերբոլի հետ՝ նրա, այսպես կոչված, ասիմպտոտները։

Ենթադրելով, որ x-*ը և* y-*ը դրական են, (3′) հավասարումը լուծենք* y-*ի նկատմամբ՝*

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1,$$

որտեղից՝

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}: \qquad (3'')$$

Այս հավասարումը համեմատենք $y=\frac{b}{a}x$ ուղիղի հավասարման հետ: Այդ ուղիղի և հիպերբոլի վրա գտնվող $N(x, Y)$ և $M(x, y)$ կետերը, որոնք ունեն միևնույն x աբսցիսը, անվանենք միմյանց համապատասխանող կամ կարճ՝ համապատասխան կետեր: Ակներևորեն (գծ. 51), $Y>y$ և համապատասխան կետերի օրդինատների $Y-y$ տարբերությունը արտահայտում է այդ կետերի հեռավորությունը, այսինքն՝ $MN=Y-y$:

Ցույց տանք, որ x-ն անվերջորեն աճելիս MN հեռավորությունը նվազելով, ձգտում է զրոյի: Իսկապես՝

$$MN=Y-y=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

որտեղից՝

$$MN=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=\frac{b}{a}\cdot\frac{\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{x+\sqrt{x^2-a^2}},$$

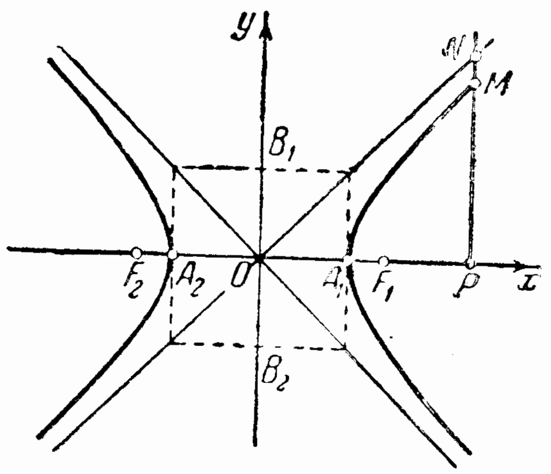
Պարզեցումներից հետո կստանանք՝

$$MN=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}:$$

Այս բանաձևից մենք տեսնում ենք, որ x աբսցիսն անվերջորեն աճելիս MN հեռավորությունը նվազում է և ձգտում զրոյի: Այստեղից եզրակացնում ենք, որ երբ M կետը, հիպերբոլի վրայով շարժվելով (առաջին քառորդում), հեռանում է դեպի անվերջություն, այդ ժամանակ նրա հեռավորությունն $y=\frac{b}{a}x$ ուղիղ գծից փոքրանում է և ձգտում զրոյի: Նույն երևույթը տեղի կունենա նաև այն դեպքում, երբ M կետը հիպերբոլի վրայով շարժվի երրորդ քառորդում (սկզբնակետի նկատմամբ ինչպես հիպերբոլի, այնպես էլ ուղիղի սիմետրիկության շնորհիվ):

Վերջապես, վերցնելով $y=\frac{b}{a}x$ ուղիղին սիմետրիկ $y=-\frac{b}{a}x$ ուղիղը, Oy առանցքի նկատմամբ հիպերբոլի և այդ ուղիղների սիմետրիկության շնորհիվ, կարող ենք ասել, որ M կետը, շարժվելով հիպերբոլի վրա երկրորդ և չորրորդ քառորդներում և *հեռանալով դեպի անվերջություն, անսահմանորեն կմոտենա այդ ուղիղին։*

Այսպիսով, մենք տեսնում ենք, որ գոյություն ունեն երկու ուղիղներ, որոնց հիպերբոլի M *կետն անսահմանորեն մոտենում է դեպի անվերջություն հեռանալիս։ Հենց այդ երկու ուղիղներն էլ կոչվում են* հիպերբոլի ասիմպտոտներ. *դրանք, ինչպես տեսանք, ունեն հետևյալ հավասարումները՝*



Գծ. 51

$$y=\frac{b}{a}x \ \text{և} \ y=-\frac{b}{a}x\text{։} \qquad (5)$$

Ակներևորեն, հիպերբոլի ասիմպտոտներն անցնում են այն ուղղանկյան անկյունագծերով, որի մի կողմը զուգահեռ է Ox առանցքին և հավասար է 2a-ի, մյուս կողմը զուգահեռ է Oy առանցքին և հավասար է 2b-ի, իսկ կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում *(գծ. 51)։*

Հիպերբոլն իր հավասարման օգնությամբ գծելիս, խորհուրդ է տրվում նախապես կառուցել նրա ասիմպտոտները, որի համար նշված ուղղանկյունն էապես գործը հեշտացնում է։

Հավասարասրուն հիպերբոլ։ $b=a$ *դեպքում հիպերբոլը կոչվում է* հավասարասրուն։ *Նրա հավասարումը կստացվի (3′)-ից, որ կլինի՝*

$$x^2-y^2=a^2\text{։}$$

Հավասարասրուն հիպերբոլի համար ասիմպտոտների անկյունային գործակիցները $\left(k=\pm\frac{b}{a}\right)$*, ակներևաբար, կլինեն* ± 1*։ Հետևաբար, հավասարասրուն հիպերբոլի ասիմպտոտները միմյանց ուղղահայաց են և կիսում են սիմետրիայի առանցքներով կազմված անկյունները։*

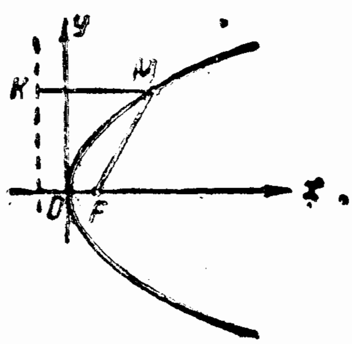
§ 5. Պարաբոլ։ Պարաբոլն այն կետերի երկրաչափական տեղն է, որոնք հավասարապես են հեռացած տված կետից և տված ուղիղից։ Այդ կետը կոչվում է պարաբոլի ֆոկուս, իսկ ուղիղը՝ դիրեկտրիսա *(ենթադրվում է, որ կետը չի գտնվում ուղիղի վրա)։*

Պարաբոլի հավասարումը կազմելու համար որպես Ox *առանցք ընդունենք* F *ֆոկուսով անցնող և դիրեկտրիսային ուղղահայաց ուղիղը՝ ուղղված դիրեկտրիսայից դեպի ֆոկուսը. որպես կոորդինատների սկզբնակետ ընդունենք* F *ֆոկուսի՝ դիրեկտրիսայից ունեցած հեռավորության* O *միջնակետը, այդ հեռավորությունը նշանակելով* p *(գծ. 52)։* p *մեծությունն անվանում են պարաբոլի* պարամետր: F *ֆոկուսի կոորդինատները կլինեն* $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$*։ Պարաբոլի կամայական* M *կետի կոորդինատները նշանակենք* x, y: *Այդ դեպքում* M *կետից դիրեկտրիսայի վրա իջեցրած ուղղահայացի* K *հիմքի կոորդինատները կլինեն՝* $\left(-\frac{p}{2}, y\right)$։

Քանի որ պարաբոլի սահմանման համաձայն FM=MK, *ապա, կիրառելով երկու կետերի հեռավորության բանաձևը (գլ.* I, § *5), կստանանք պարաբոլի հավասարումը մեր ընտրած կոորդինատների սիստեմում՝*

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Հավասարմանը պարզագույն տեսք տալու համար նրա երկու մասերը քառակուսի բարձրացնենք: Կունենանք՝



Գծ. 52

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2,$$

կամ՝

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

որտեղից՝

$$y^2=2px: \qquad (6)$$

Ստացված հավասարումը կոչվում է պարաբոլի կանոնական հավասարում[1]:

Որպեսզի պարաբոլի ձևը հետազոտենք նրա (6) հավասարման միջոցով, նկատենք, որ x-*ը չի կարող բացասական արժեքներ ստանալ, այսինքն՝ պարաբոլի բոլոր կետերը գտնվում են* Oy *առանցքից դեպի աջ:* x-*ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է* y-*ի երկու արժեք, որոնք բացարձակ մեծությամբ հավասար են, բայց ունեն հակադիր նշաններ, այսինքն՝*

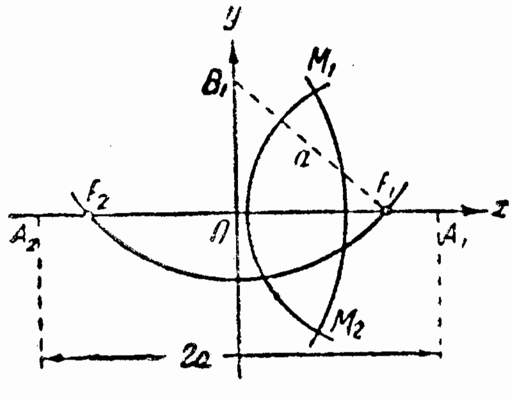
[1] *Պարզ է, որ պարաբոլի ամեն մի կետի կոորդինատներ բավարարում են (6) հավասարմանը: Հեշտ է ցույց տալ, որ այն բավարարվում է միայն պարաբոլի վրա գտնվող կետերի կոորդինատներով:*

կորը սիմետրիկ դասավորություն ունի Ox առանցքի նկատմամբ: x-ը մեծացնելիս y-ի բացարձակ արժեքը նույնպես մեծանում է, ընդ որում, երբ x-ն անսահմանորեն աճում է, $|y|$-ը նույնպես անսահմանորեն աճում է: Կորն ունի գծ. 52-ում պատկերված ձևը:

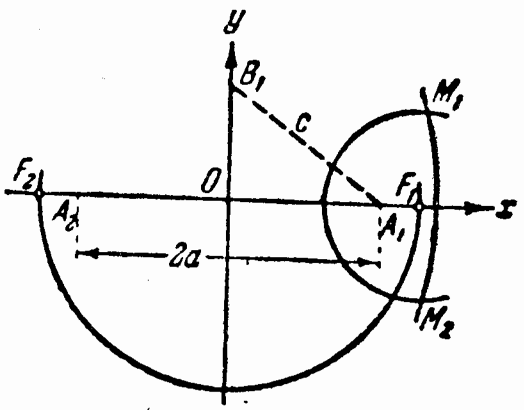
Պարաբոլն ունի մեկ սիմետրիայի առանցք, որն անցնում է նրա ֆոկուսով, այն պարզապես կոչվում է պարաբոլի առանցք: Սիմետրիայի առանցքի հետ պարաբոլի հատման կետը կոչվում է պարաբոլի գագաթ: *(6)* հավասարումով տրված պարաբոլի գագաթը կոորդինատների սկզբնակետն է:

Նկատենք, որ մեր դիտարկած բոլոր երեք գծերն էլ՝ էլիպսը, հիպերբոլը և պարաբոլը կոորդինատների դեկարտյան սիստեմում կարող են ներկայացվել միայն երկրորդ աստիճանի հավասարումներով:

§ 6. Էլիպսի, հիպերբոլի և պարաբոլի կետերի կառուցումը կարկինի և քանոնի օգնությամբ: Էլիպսի հավասարումից (§ *3*) որոշում ենք a-ն և b-ն և դրանք կոորդինատային առանցքների վրա պատկերացնում OA_1 և OB_1 հատվածներով (գծ. *53*): B_1 կետից, որպես կենտրոնից, գծում ենք a շառավղով շրջանագիծ, որն Ox առանցքի հետ հատվելով կտա F_1 և F_2 ֆոկուսները,



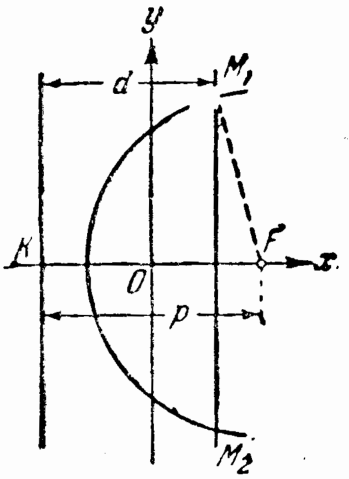
Գծ. 53



Գծ. 54

քանի որ այդպիսի կառուցման դեպքում պահպանվում է $c^2=a^2-b^2$ առնչությունը: Էլիպսի ֆոկուսները գտնելով, $2a$ հատվածը երկու մասի ենք բաժանում՝ r_1 ու $r_2=2a-r_1$, և դրանց հավասար շառավիղներով շրջանագծեր ենք գծում, նրանց համար կենտրոններ ընդունելով F_1 և F_2 ֆոկուսները: Այդ շրջանագծերի հատման կետերը գտնվում են էլիպսի վրա, քանի որ այդ կետերից յուրաքանչյուրի համար ֆոկուսներից ունեցած հեռավորությունների գումարը հավասար կլինի 2a-ի։ r_1-ը փոփոխելով[1], կստանանք էլիպսի նոր կետեր։

Համանման ձևով կատարվում է հիպերբոլի կետերի կառուցումը։ Հիպերբոլի հավասարումից (§ 4) որոշելով a-ն և b-ն, դրանք կոորդինատային առանցքների վրա պատկերացնում ենք OA_1 և OB_1 հատվածներով (գծ. 54)։ O կետից, որպես կենտրոնից, գծում ենք $c=A_1B_1$ շառավղով շրջանագիծ, որը հատվելով Ox առանցքի հետ կտա հիպերբոլի F_1 և F_2 ֆոկուսները, քանի որ այսպիսի կառուցման դեպքում պահպանվում է $c^2=a^2+b^2$ առնչությունը։ Գտնելով հիպերբոլի ֆոկուսները, նրանցից, որպես կենտրոններից, գծում ենք r_1 և $r_2=2a+r_1$ շառավիղներով երկու շրջանագծեր։ Շրջանագծերի հատման M_1 և M_2 կետերը կգտնվեն հիպերբոլի աջ ճյուղի վրա, քանի որ այդ կետերից յուրաքանչյուրի համար ֆոկուսներից ունեցած հեռավորությունների տարբերությունը հավասար կլինի $r_2-r_1=2a$։ r_1-ը փոփոխելով[2], կստանանք հիպերբոլի աջ ճյուղի նոր կետեր։ Ֆոկուսների դերերը փոխանակելով, կստանանք հիպերբոլի ձախ ճյուղի կետերը։



Գծ. 55

Այժմ անցնենք պարաբոլի կետերի կառուցմանը։ Ամենից առաջ կառուցում ենք պարաբոլի ֆոկուսը և դիրեկտրիսան, որի համար Ox առանցքի վրա O կետից դեպի աջ վերցնում ենք $\frac{p}{2}$ երկարությամբ OF հատվածը և դեպի ձախ՝ նույնպիսի երկարությամբ OK հատվածը, այնուհետև K կետով տանում ենք ֆոկուսային առանցքին ուղղահայաց ուղիղ (գծ. 55)։ p պարամետրը որոշվում է պարաբոլի հավասարումից։ Տանենք ֆոկուսային առանցքին ուղղահայաց ուղիղ՝ դիրեկտրիսայից դեպի աջ $d\left(d\geqslant\frac{p}{2}\right)$ կամայական հեռավորության վրա, և F կետից, որպես կենտրոնից, գծենք d շառավղով շրջանագիծ։ Մեր գծած ուղիղի և շրջանագծի հատման M_1 և M_2 կետերը կպատկանեն

[1] $a-c\leqslant r\leqslant a+c$ միջակայքում։ Ծանոթ. թարգմ. խմբագրի։

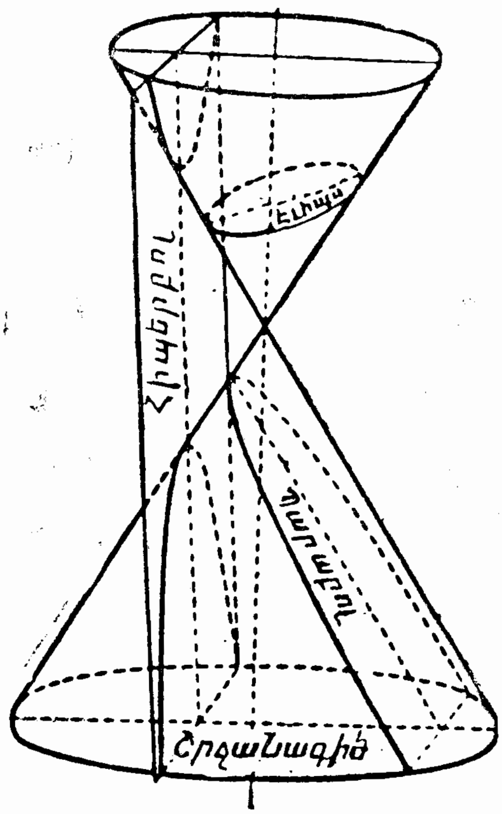
[2] Ընդունելով $r_1\geqslant A_1F_1$։ Ծանոթ. թարգմ. խմբագրի։

պարաբոլին, քանի որ այդ կետերից յուրաքանչյուրի՝ ֆոկուսից և դիրեկտրիսայից ունեցած հեռավորությունները միմյանց հավասար են։

§ 7. Էլիպսը, հիպերբոլը և պարաբոլը որպես կոնական հատույթներ: *Էլիպսը, հիպերբոլը և պարաբոլը կարող են ստացվել շրջանային ուղիղ կոնը հարթությամբ հատելով[1]։ Այդ պատճառով այդ կորերն անվանում են* կոնական հատույթներ:

Դիտարկենք շրջանային ուղիղ կոնի այն հատույթները, որոնք առաջանում են կոնը իր գագաթով չանցնող հարթություններով հատելիս (գծ. 56)։ Կարելի է ապացուցել, որ երբ հարթությունը հատի կոնի միայն մեկ խոռոչը՝ նրա ծնիչներից ոչ մեկին զուգահեռ չլինելով, ապա հատման գիծը էլիպս կլինի։ Երբ հատող հարթությունը զուգահեռ լինի կոնի ծնիչներից մեկին, հատման գիծը պարաբոլ կլինի։ Իսկ երբ հարթությունը կոնի երկու խոռոչն էլ հատի, հատման գիծը հիպերբոլ կլինի։

Այսպիսով, շրջանային ուղիղ կոնի հատույթը կլինի էլիպս, հիպերբոլ կամ պարաբոլ՝ կախված հատող հարթության դիրքից։



Գծ. 56

§ 8. Էլիպսի էքսցենտրիսիտետը և դիրեկտրիսաները: *Ինչպես § 3-ից հայտնի է, էլիպս կոչվում է այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց՝ տված երկու կետերից (ֆոկուսներից) ունեցած հեռավորությունների գումարը հաստատուն մեծություն է։ Էլիպսի կամայական M կետի հեռավորությունները աջ և ձախ ֆոկուսնե-*

---

[1] *Շրջանային ուղիղ կոն ասելով մենք այստեղ հասկանում ենք այնպիսի կոնական մակերևույթ, որը կառաջանա, երբ տարրական երկրաչափության մեջ դիտարկվող սովորական շրջանային ուղիղ կոնի յուրաքանչյուր ծնիչն անվերջորեն շարունակենք երկու ուղղություններով։ Այդ մակերևույթը կարելի է ստանալ ուղիղը պտտելով իր հետ հատվող մի որոշ առանցքի շուրջը։*

րից նշանակելով համապատասխանորեն $r_1=F_1M$ և $r_2=F_2M$ (գծ. 50), մենք էլիպսի այդ սահմանման համաձայն կունենանք՝

$$r_1+r_2=2a: \qquad (7)$$

Մյուս կողմից, կիրառելով երկու կետերի հեռավորության բանաձևը, կստանանք (գլ. IV § 3)՝

$$r_2=F_2M=\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

$$r_1=F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

որտեղ x, y-ը՝ էլիպսի ցանկացած M կետի կոորդինատներն են, իսկ c-ն՝ միջֆոկուսային F_1F_2 հեռավորության կեսն է: Վերջին երկու հավասարությունները քառակուսի բարձրացնելով և միմյանցից հանելով, կգտնենք՝

$$r_2^2-r_1^2=(x+c)^2+y^2-(x-c)^2-y^2:$$

Փակագծերը բացելով և նման անդամների միացում կատարելով, կստանանք՝

$$r_2^2-r_1^2=4xc: \qquad (8)$$

(7) և (8) հավասարումներից որոշենք r_1-ը և r_2-ը: Այդ նպատակով (8) հավասարումը գրելով հետևյալ տեսքով՝

$$(r_2-r_1)(r_2+r_1)=4xc,$$

օգտվենք (7) հավասարումից, որից հետո կստանանք՝

$$r_2-r_1=2\frac{c}{a}x:$$

Այս հավասարումը (7)-ի հետ միասին լուծելով, կգտնենք r_1-ը և r_2-ը՝

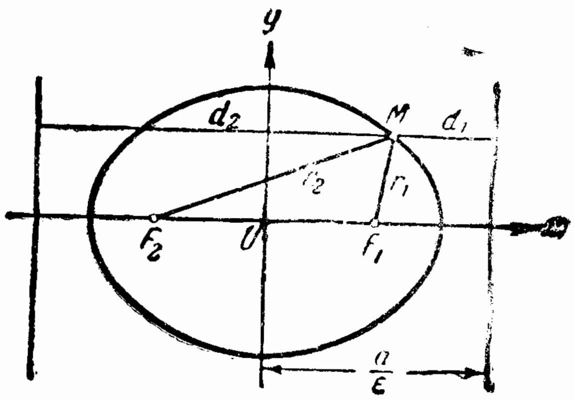
$$r_1=a-\frac{c}{a}x,$$

$$r_2=a+\frac{c}{a}x:$$

Այստեղ մասնակցող $\frac{c}{a}$ մեծությունը կոչվում է էլիպսի էքսցենտրիսիտետ. մենք այն նշանակելու ենք ε տառով: Ակներևորեն, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}$ ներկայացնում է միջֆոկուսային հեռավորության հարաբերությունը մեծ առանցքի երկարությանը, ընդ որում, քանի որ $0 \leq c < a$, ուստի $0 \leq \varepsilon < 1$ (շրջանագծի համար $c=0$ և $\varepsilon=0$): Այսպիսով, r_1 և r_2 ֆոկուսային շառավիղների համար ունենք՝

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x: \tag{9}$$

Դիտարկենք Oy առանցքին զուգահեռ $x = l \ (l > a)$ ուղիղը և գտնենք էլիպսի կամայական $M(x, y)$ կետի r_1 հեռավորությունը աջ ֆոկուսից և d_1 հեռավորությունը $x = l$ ուղղից (գծ. 57): Հաշվենք այդ հեռավորությունների հարաբերությունը:



Գծ. 57

Քանի որ $d_1 = l - x$, ապա՝

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a - \varepsilon x}{l - x} = \varepsilon \frac{\frac{a}{\varepsilon} - x}{l - x}.$$

Եթե վերցնենք $l = \frac{a}{\varepsilon}$, ապա գրված հարաբերությունը կպահպանի ε հաստատուն արժեքը:

Սիմետրիայի շնորհիվ, նույն եզրակացությունը կարելի է անել նաև F_2 ձախ ֆոկուսի և

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

ուղղի նկատմամբ:

Այդ երկու ուղիղները, որոնք ուղղահայաց են էլիպսի ֆոկուսային առանցքին և նրա կենտրոնից ունեն $\frac{a}{\varepsilon}$ հեռավորությունը, կոչվում են էլիպսի դիրեկտրիսներ[1]: Ինչպես արդեն պարզեցինք, նրանք ունեն հետևյալ հատկությունը՝ էլիպսի ցանկացած կետի՝ ֆոկուսից և համապատասխան դիրեկտրիսայից ունեցած հեռավորությունների հարաբերությունը հաստատուն մեծություն է և հավասար է ε-ի:

Օրինակ: Գտնել $x^2 + 2y^2 = 2$ էլիպսի էքսցենտրիսիտետը և դիրեկտրիսները:

---

[1] Շրջանագիծը դիրեկտրիսներ չունի:

Էլիպսի հավասարումը գրելով կանոնական տեսքով՝

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1,$$

տեսնում ենք, որ $a^2=2$, $b^2=1$, *հետևաբար,* $c^2=a^2-b^2=2-1=1$, *որտեղից՝*

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}:$$

Դիրեկտրիսաներն անցնում են էլիպսի կենտրոնից (կոորդինատների սկզբնակետից) $\frac{a^2}{c}$ *հեռավորության վրա, այսինքն՝* $\frac{2}{1}=2$ *միավոր հեռավորության վրա։ Ուրեմն, դիրեկտրիսաների հավասարումները կլինեն՝*

$$x=+2 \text{ և } x=-2։$$

§ **9. Հիպերբոլի էքսցենտրիսիտետը և դիրեկտրիսաները։** *Պահպանելով նախորդ պարագրաֆի նշանակումները, հիպերբոլի սահմանման համաձայն (գլ. IV, § 4) կունենանք՝*

$$r_2-r_1=\pm 2a, \qquad (10)$$

որտեղ + նշանը վերաբերում է հիպերբոլի աջ ճյուղին, իսկ — նշանը՝ ձախ ճյուղին։ Մյուս կողմից, ինչպես և նախորդ պարագրաֆում, կգտնենք՝

$$r_2^2-r_1^2=4cx: \qquad (8)$$

(10) և (8) հավասարումներից գտնենք որոնելի r_1*-ը և* r_2*-ը։ Այդ նպատակով, (8) հավասարումը գրելով հետևյալ տեսքով՝*

$$(r_2+r_1)(r_2-r_1)=4cx,$$

օգտվենք (10) հավասարումից, որից հետո կստանանք՝

$$r_2+r_1=\pm 2\frac{c}{a}x:$$

Այս հավասարումը (10)-ի հետ միասին լուծելով, r_1*-ի և* r_2*-ի համար կստանանք՝*

$$r_1=-a+\frac{c}{a}x, \quad r_2=a+\frac{c}{a}x \text{ (աջ ճյուղ)},$$

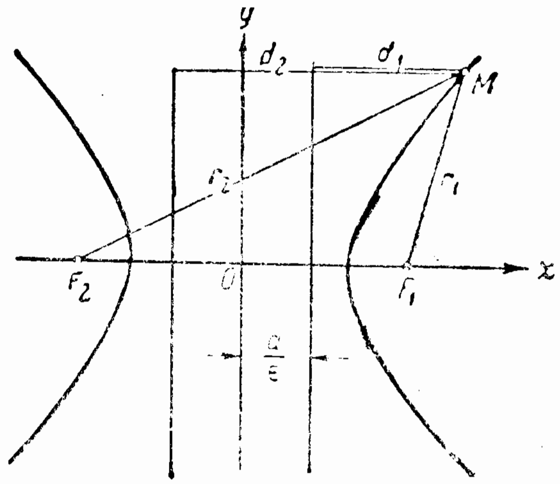
$$r_1=a-\frac{c}{a}x, \quad r_2=-a-\frac{c}{a}x \text{ (ձախ ճյուղ)}:$$

Այս բանաձևերի մեջ մտնող $\frac{c}{a}$ *մեծությունը կոչվում է հիպեր-*

բոլի էքսցենտրիսիտետ. պայմանավորվենք այն նշանակել ε: Այնուհետև, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a}$ ներկայացնում է միջֆոկուսային հեռավորության հարաբերությունը իրական առանցքի երկարությանը, ընդ որում, քանի որ այժմ $c > a$, ապա $\varepsilon > 1$: Այսպիսով, հիպերբոլի r_1 և r_2 ֆոկուսային շառավիղների համար ունենք հետևյալ բանաձևերը՝

$$\left.\begin{array}{ll} r_1 = -a + \varepsilon x, & r_2 = a + \varepsilon x \ (\text{աջ ճյուղի}), \\ r_1 = a - \varepsilon x, & r_2 = -a - \varepsilon x \ (\text{ձախ ճյուղ}): \end{array}\right\} \quad (11)$$

$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ ուղիղները, որոնք ուղղահայաց են հիպերբոլի ֆոկուսային առանցքին և նրա կենտրոնից ունեն $\frac{a}{\varepsilon}$ հեռավորություն, անվանենք հիպերբոլի աջ և ձախ ֆոկուսներին համապատասխանող դիրեկտրիսներ: Քանի որ հիպերբոլի համար $\varepsilon > 1$, ապա $\frac{a}{\varepsilon} < a$ և, հետևաբար, դիրեկտրիսները գտնվում են հիպերբոլի գագաթների միջև:



Գծ. 58

Հեշտությամբ կարելի է ցույց տալ, որ հիպերբոլի ցանկացած կետի՝ ֆոկուսից և համապատասխան դիրեկտրիսայից ունեցած հեռավորությունների հարաբերությունը հաստատուն մեծություն է և հավասար է ε-ի:

Հիպերբոլի սիմետրիկության շնորհիվ բավական է այս հատկությունը հայտնաբերել աջ ֆոկուսի և համապատասխան դիրեկտրիսայի նկատմամբ:

Հիպերբոլի $M(x, y)$ կետի հեռավորությունն աջ դիրեկտրիսայից նշանակելով d_1, գծ. 58-ից տեսնում ենք՝ որ $d_1 = x - \frac{a}{\varepsilon}$, երբ M կետը գտնվում է հիպերբոլի աջ ճյուղի վրա, և $d_1 = \frac{a}{\varepsilon} - x$, երբ M-ը գտնվում է ձախ ճյուղի վրա: Օգտվելով (11) բանաձևերից, այժմ կազմենք $\frac{r_1}{d_1}$ հարաբերությունը:

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{-a+\varepsilon x}{x-\frac{a}{\varepsilon}} \quad \text{(աջ ճյուղ)},$$

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{a-\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}-x} \quad \text{(ձախ ճյուղ)}:$$

Երկու դեպքում էլ $\frac{r_1}{d_1}$ հարաբերությունը, ինչպես տեսնում ենք, նույնն է և հավասար է՝

$$\frac{a-\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}-x}=\frac{a-\varepsilon x}{\frac{a-\varepsilon x}{\varepsilon}}=\varepsilon,$$

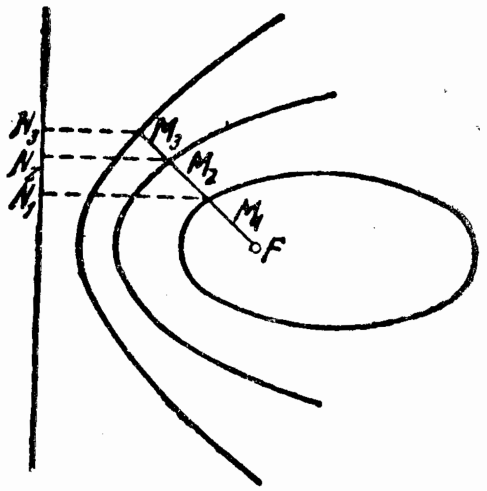
որը և պահանջվում էր ապացուցել:

§ **10. Պարաբոլի էքսցենտրիսիտետը և դիրեկտրիսան:** Ներկա գլխի § 5-ում մենք պարաբոլը սահմանեցինք որպես այնպիսի կետերի երկրաչափական տեղ, որոնք հավասարապես են հեռացած տրված կետից (ֆոկուսից) և տրված ուղիղից (դիրեկտրիսայից): Այդպիսով, պարաբոլի ցանկացած M կետի՝ ֆոկուսից ունեցած հեռավորությունը նշանակելով r, իսկ դիրեկտրիսայից ունեցած հեռավորությունը՝ d, մենք կունենանք $r=d$, կամ $\frac{r}{d}=1$ (գծ. 52): Այդ պատճառով էլ պարաբոլի էքսցենտրիսիտետը ընդունում են հավասար 1-ի: Պարաբոլի դիրեկտրիսայի հավասարումը կլինի՝

$$x=-\frac{p}{2},$$

եթե կոորդինատային առանցքները ընտրված են այնպես, ինչպես ցույց է տրված § 5-ում:

Երեք պարագրաֆների արդյունքները ամփոփելով, մենք ստանում ենք կոնական հատույթի (էլիպսի, հիպերբոլի և պարաբոլի) հետևյալ ընդհանուր սահմանումը՝ կոնական հատույթն այն կետերի երկրաչափական տեղն է, որոնց՝ տրված կետից (ֆոկուսից) և տրված ուղիղից (դիրեկտրիսայից) ունեցած հեռավորությունների հարաբերությունը հաստատուն մեծություն է (ε): Ընդ որում (գծ. 59)՝



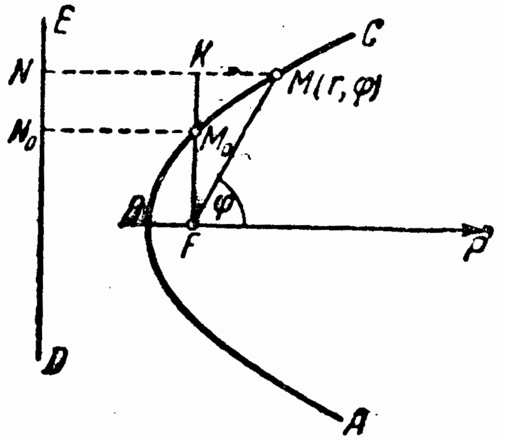
Գծ. 59

էլիպսի համար՝ $\frac{FM_1}{M_1N_1} = \varepsilon < 1$,

պարաբոլի համար՝ $\frac{FM_2}{M_2N_2} = \varepsilon = 1$,

հիպերբոլի համար՝ $\frac{FM_3}{M_3N_3} = \varepsilon > 1$[1]:

§ **11. Կոնական հատույթի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով։** *Ներկա պարագրաֆի խնդիրն է արտածել կոնական հատույթի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով, որպես բևեռ ընդունելով կոնական հատույթի ֆոկուսներից մեկը, իսկ որպես բևեռային առանցք՝ նրա ֆոկուսային առանցքը։*



Գծ. 60

Դիցուք ABC-*ն կոնական հատույթի (էլիպսի, հիպերբոլի կամ պարաբոլի) աղեղ է (գծ. 60),* B-*ն՝ նրա գագաթը,* F-*ը՝ ֆոկուսը, իսկ* DE-*ն՝ համապատասխան դիրեկտրիսան։*

F *կետն ընդունենք որպես բևեռ,* BFP *ուղիղը՝ որպես բևեռային առանցք, նրա վրա ուղղությունը ընտրելով* F *ֆոկուսից դեպի դիրեկտրիսան գնացող ուղղության հակառակը։ Կորի էքսցենտրիսիտետը նշանակենք* ε*։ Դիցուք* M_0-*ն կոնական հատույթի* BC *աղեղի այն կետն է, որը գտնվում է բևեռային առանցքին* F *բևեռում կանգնեցրած ուղղահայացի վրա։* FM_0 *երկարությունը նշանակենք* p *և այն անվանենք կոնական հատույթի* ֆոկուսային պարամետր:

Դիցուք M(r, φ)-*ն կորի կամայական կետն է։ Կազմենք այդ կետի*

---

[1] *§§ 7 և 8-ում ցույց տրվեց, որ էլիպսն ու հիպերբոլն ունեն այդ հատկությունը։ Կարելի է ապացուցել նաև հակադարձը՝ այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց տրված կետից և տրված ուղիղից ունեցած հեռավորություններով հարաբերությունը հաստատուն մեծություն է, իրենից ներկայացնում է էլիպս, եթե այդ հաստատունը* <1, *և հիպերբոլ, եթե նա* >1*։ Այստեղից բխում է, որ կարելի է այդ հատկությունը հիմք ընդունել կոնական հատույթի սահմանման համար։*

r, φ բևեռային կոորդինատների և տված ε, p թվերի միջև եղած կախումն արտահայտող հավասարումը։ Կոնական հատույթի բոլոր կետերի ընդհանուր հատկությունն է, ինչպես տեսանք՝

$$\frac{FM}{NM}=\varepsilon. \tag{12}$$

Կոնական հատույթի վրա M կետի ցանկացած դիրքի դեպքում՝

$$FN=r \text{ և } NM=N_0M_0+r\cos\varphi.$$

Քանի որ

$$\frac{FM_0}{N_0M_0}=\varepsilon \text{ և } FM_0=p, \text{ ապա } N_0M_0=\frac{p}{\varepsilon}.$$

Հետևաբար՝

$$NM=\frac{p}{\varepsilon}+r\cos\varphi. \tag{13}$$

Այժմ (12) հավասարումը կարելի է այսպես գրել՝

$$\frac{r}{\frac{p}{\varepsilon}+r\cos\varphi}=\varepsilon,$$

որտեղից՝

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}. \tag{14}$$

Այս հավասարումը կորոշի էլիպս, եթե $\varepsilon<1$, պարաբոլ՝ եթե $\varepsilon=1$, և հիպերբոլ՝ եթե $\varepsilon>1$։

Պարաբոլի համար (14) հավասարման մեջ p-ն, ակներևաբար, ունի նախկին նշանակությունը, այսինքն՝ այն, ինչ որ $y^2=2px$ հավասարման մեջ։ Իսկապես, պարաբոլի համար $p=FM_0=M_0N_0$, այսինքն՝ p-ն ֆոկուսի հեռավորությունն է դիրեկտրիսայից (պարաբոլի պարամետրն է)։

Էլիպսի և հիպերբոլի համար կարելի է այսպիսի հարց դնել՝ p ֆոկուսային պարամետրն ինչպե՞ս արտահայտել a և b կիսաառանցքների միջոցով։

Էլիպսի դեպքում, մենք նրա $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ հավասարման մեջ տեղադրենք էլիպսի կետերից մեկի, այն է՝ $M_0(-c, p)$ կետի կոորդինատները, կըստանանք՝

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{p^2}{b^2}=1,$$

կամ՝

$$\frac{p^2}{b^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

որտեղից՝

$$p^2=\frac{b^4}{a^2} \text{ և } p=\frac{b^2}{a}.$$

Հիպերբոլի դեպքում նրա $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ հավասարման մեջ տեղադրենք

$M_0(c, p)$ *կետի կոորդինատները. կստանանք՝*

$$\frac{c^2}{a^2}-\frac{p^2}{b^2}=1, \quad \text{կամ՝} \quad \frac{p^2}{b^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

որտեղից նորից ունենք՝

$$p^2=\frac{b^4}{a^2} \text{ և } p=\frac{b^2}{a}.$$

Այսպիսով, էլիպսի, հիպերբոլի և պարաբոլի հավասարումները բևեռային կոորդինատներով (*բևեռի և բևեռային առանցքի նշված ընտրության դեպքում*) ունեն միևնույն տեսքը՝

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}, \tag{14}$$

ընդ որում էլիպսի և հիպերբոլի համար p *ֆոկուսային պարամետրը* a *և* b *պարամետրերի հետ կապված է*

$$p=\frac{b^2}{a} \tag{15}$$

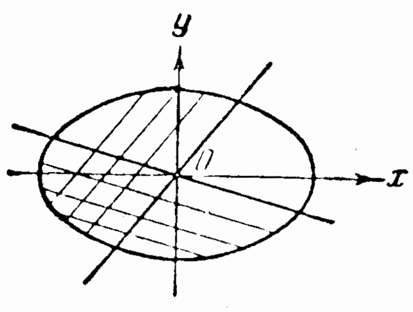
բանաձևով։

Հիպերբոլի դեպքում (14) հավասարումը մենք արտածեցինք նրա միայն մեկ ճյուղի համար, սակայն հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ նրան կբավարարեն նաև հիպերբոլի մյուս ճյուղի վրա գտնվող ցանկացած կետի կոորդինատները։

§ **12. Էլիպսի տրամագծերը: Համալուծ տրամագծեր:** *Դիտարկենք իր սիմետրիայի առանցքների նկատմամբ գրված*[1] *էլիպս՝*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{16}$$

և k_1 *անկյունային գործակից ունեցող՝ միմյանց զուգահեռ լարերի մի սիստեմ (գծ. 61)։ Տեսնենք, թե ինչպե՞ս են դասավորված այդ լարերի միջնակետերը։ Այլ կերպ ասած, պարզենք, թե ինչպիսի՞ պայմանով են միմյանց հետ կապված էլիպսի իրար զուգահեռ լարերի միջնակետերի կոորդինատները։ Վերցնենք լարերից որևէ մեկը և նրա ծայրակետերը նշանակենք* $M_1(x_1, y_1)$ *և* $M_2(x_2, y_2)$, *իսկ միջնակետը՝* $M(X, Y)$։ *Քանի որ* M_1 *և* M_2 *կետերը գտնըվում են էլիպսի վրա, ապա նրանց կոորդինատները պետք է բավարարեն էլիպսի (16) հավասարմանը, այսինքն՝*



Գծ. 61

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1, \tag{17}$$

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1: \tag{18}$$

---

[1] *Այսինքն՝ սիմետրիայի առանցքներն ընդունված են որպես կոորդինատային առանցքներ։*

M_1M_2 ուղիղի k_1 անկյունային գործակիցն արտահայտելով նրա երկու կետերի կոորդինատների միջոցով (գլ. III, § 12), կունենանք՝

$$k_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{19}$$

Վերջապես, նկատելով, որ M կետը M_1M_2 հատվածի միջնակետն է, կունենանք՝

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \tag{20}$$

$$Y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{21}$$

Ստացած (17)—(21) հինգ առնչություններից արտաքսենք x_1, x_2, y_1, y_2 չորս օժանդակ մեծությունները։ Այդ նպատակով, (18) հավասարությունից հանենք (17) հավասարությունը։

$$\frac{x_2^2-x_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2-y_1^2}{b^2}=0,$$

կամ՝

$$\frac{(x_2-x_1)(x_1+x_2)}{a^2}+\frac{(y_2-y_1)(y_2+y_1)}{b^2}=0.$$

Այս հավասարության մեջ, օգտվելով (20), (21), (19) առնչություններից, x_1+x_2 գումարի փոխարեն տեղադրենք 2X, y_1+y_2 գումարի փոխարեն՝ 2Y, իսկ y_2-y_1 տարբերության փոխարեն $k_1(x_2-x_1)$, կստանանք՝

$$\frac{(x_2-x_1)2X}{a^2}+\frac{k_1(x_2-x_1)2Y}{b^2}=0.$$

կրճատելով $2(x_2-x_1)$-ի վրա[1], վերջնականապես կստանանք՝

$$\frac{X}{a^2}+\frac{k_1Y}{b^2}=0,$$

որտեղից (երբ $k_1\neq 0$)՝

$$Y=-\frac{b^2}{a^2k_1}x:$$

Այսպիսով, էլիպսի՝ իրար զուգահեռ լարերի միջնակետերի կոորդինատները միմյանց հետ կապված են գծային առնչությամբ։ Հետևաբար, զուգահեռ լարերի միջնակետերը դասավորված են

$$y=-\frac{b^2}{a^2k_1}x \tag{22}$$

ուղիղի վրա։

Մեր դատողություններում մենք ենթադրեցինք, որ դիտարկվող լարերը ունեն k_1 անկյունային գործակից և, հետևաբար, զուգահեռ չեն Oy ա-

---

[1] $x_2-x_1\neq 0$, քանի որ, պայմանի համաձայն, դիտարկվող լարերն ունեն k_1 անկյունային գործակից և, հետևաբար, զուգահեռ չեն Oy առանցքին։

առանցքին։ Oy առանցքին զուգահեռ լարերի միջնակետերը նույնպես գտնըվում են ուղիղի վրա՝ Ox առանցքի վրա (Ox առանցքի նկատմամբ էլիպսի սիմետրիկ լինելու շնորհիվ)։

Այսպես, ուրեմն, էլիպսի զուգահեռ լարերի միջնակետերը գտնվում են մեկ ուղիղի վրա:

Էլիպսի զուգահեռ լարերի միջնակետերով անցնող ուղիղը կոչվում է էլիպսի տրամագիծ: Էլիպսի բոլոր տրամագծերն անցնում են նրա կենտրոնով:

Էլիպսի տրամագծի անկյունային գործակիցը նշանակելով k_2, *կունենանք*

$$k_2=-\frac{b^2}{a^2k_1}, \tag{23}$$

կամ՝

$$k_1k_2=-\frac{b^2}{a^2}\text{։} \tag{23'}$$

Պայմանավորվենք էլիպսի տրամագիծն անվանել համալուծ *այն լարերին, որոնց միջնակետերով նա անցնում է։ (23) կամ (23′) պայմանը միմյանց հետ կապում է* զուգահեռ լարերի *և* նրանց համալուծ տրամագծի *անկյունային գործակիցները։ Քանի որ այդ (23′) պայմանը* k_1*-ի և* k_2*-ի նկատմամբ սիմետրիկ է, այսինքն՝ նրանց տեղափոխությունից այդ պայմանը չի փոխվում, ապա այստեղից եզրակացնում ենք՝ եթե* k_2 *անկյունային գործակից ունեցող տրամագիծը համալուծ է* k_1 *անկյունային գործակից ունեցող լարերին, ապա* k_1 *անկյունային գործակից ունեցող տրամագիծն էլ համալուծ է* k_2 *անկյունային գործակից ունեցող լարերին։*

Այսպիսով, մենք ստանում ենք մի զույգ տրամագծեր. որոնցից յուրաքանչյուրը կիսում է մյուսին զուգահեռ լարերը (գծ. 61): Էլիպսի այդպիսի երկու տրամագծերը կոչվում են մեկը մյուսին համալուծ: *Նրանց* k_1 *և* k_2 *անկյունային գործակիցները միմյանց հետ կապված են (23) կամ (23′) պայմանով։*

Ուրեմն, էլիպսն ունի անթիվ բազմությամբ զույգ-զույգ միմյանց համալուծ տրամագծեր. յուրաքանչյուր տրամագծի համապատասխանում է իր համալուծ տրամագիծը։ Մասնավորապես, կոորդինատային առանցքները (էլիպսի սիմետրիայի առանցքները) միմյանց համալուծ տրամագծեր են: *Էլիպսի միմյանց համալուծ այդ երկու տրամագծերը* փոխադարձաբար ուղղահայաց են: *Այդպիսի տրամագծերը կոչվում են էլիպսի* գլխավոր տրամագծեր:

(23′) բանաձևից երևում է, որ էլիպսի ամեն մի այլ զույգ միմյանց համալուծ տրամագծեր ($b \neq a$ *դեպքում) ուղիղ անկյուն չեն կազմում։ Իսկ եթե* $b=a$, *այսինքն՝ եթե էլիպսը շրջանագիծ է դառնում, ապա (23′) պայմանը դառնում է ուղղահայացության պայման՝* $k_1k_2=-1$*։ Այսպիսով, շրջանագծի ամեն երկու համալուծ տրամագծեր միմյանց ուղղահայաց են, այսինքն՝* շրջանագծի ամեն մի տրամագիծ՝ գլխավոր տրամագիծ է *(սիմետրիայի առանցք է)։*

(23) պայմանից երևում է, որ էլիպսի երկու համալուծ տրամագծերի k_1 *և* k_2 *անկյունային գործակիցները տարբեր նշաններ ունեն, այսինքն՝* էլիպսի համալուծ տրամագծերն անցնում են հարևան *կոորդինատային* քառորդներով:

k_1-ը մեծացնելիս (երբ $k_1>0$), k_2 անկյունային գործակիցը բացարձակ մեծությամբ փոքրանում է, այսինքն՝ հանրահաշվորեն նույնպես մեծանում է։ Այդ ցույց է տալիս, որ էլիպսի տրամագիծը ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ պտտելիս նրան համալուծ տրամագիծն էլ պտտվում է նույն ուղղությամբ։

Օրինակ։ Որոշել $x^2+2y^2=1$ էլիպսի այն տրամագծի երկարությունը, որը համալուծ է առաջին կոորդինատային անկյունը կիսող տրամագծին (տրամագծի երկարությունը համարում են էլիպսի հետ նրա հատման երկու կետերի հեռավորությունը)։

Տրված տրամագծի անկյունային գործակիցը հավասար է 1-ի։ Նրան համալուծ տրամագծի անկյունային գործակիցը գտնում ենք (23) պայմանից՝

$$k_2=-\frac{b^2}{a^2k_1}.$$

Այստեղ՝ $k_1=1$, $a^2=1$, $b^2=\frac{1}{2}$։ Հետևաբար՝ $k_1=-\frac{1}{2}$։ Այդ տրամագծի հավասարումը կլինի՝

$$y=-\frac{1}{2}x.$$

Դրա երկարությունը հաշվելու համար պետք է գտնել էլիպսի հետ դրա հատման կետերը։ Այդ նպատակով համատեղ լուծենք էլիպսի և տրամագծի հավասարումները՝

$$x^2+2y^2=1 \text{ և } y=-\frac{1}{2}x.$$

Երկրորդ հավասարումից y-ի արժեքը տեղադրելով առաջինի մեջ, կստանանք՝

$$x^2+\frac{1}{2}x^2=1, \quad \frac{2}{2}x^2=1, \quad x^2=\frac{2}{3}, \quad x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Հատման կետերի աբսցիսներն իմանալով, կգտնենք նրանց օրդինատները՝

$$y=\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Երկու կետերի հեռավորության բանաձևով կգտնենք որոնելի տրամագծի d երկարությունը՝

$$d^2=\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=\frac{8}{3}+\frac{2}{3}=\frac{10}{3},$$

որտեղից՝

$$d=\sqrt{\frac{10}{3}}=\frac{1}{2}\sqrt{30}.$$

§ 13. Հիպերբոլի տրամագծերը։ Համալուծ տրամագծեր։

Այժմ դիտարկենք իր սիմետրիայի առանցքների նկատմամբ դրված հիպերբոլը՝

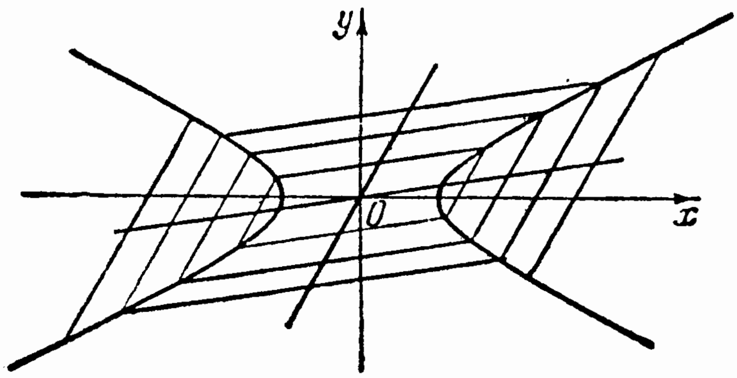
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{24}$$

և միմյանց զուգահեռ լարերի մի սիստեմ՝ k_1 անկյունային գործակցով (գծ. 62)։

Էլիպսի համար կատարած հաշիվներին համանման հաշիվներ կատարելով, կգտնենք, որ այդ լարերի միջնակետերը գտնվում են մի ուղիղի վրա, որի հավասարումն է՝

$$y = \frac{b^2}{a^2k_1}x. \tag{25}$$

այս հավասարումը կարելի է (22) հավասարումից ստանալ b^2-ն փոխարինելով $-b^2$-ով, որովհետև հիպերբոլի հավասարումն էլիպսի հավասարումից տարբերվում է միայն b^2-ու մոտ եղած նշանով։ Ճիշտ նման ձևով էլ Oy առանցքին զուգահեռ լարերի միջնակետերը գտնվում են Ox առանցքի վրա։ Հետևաբար, հիպերբոլի միմյանց զուգահեռ լարերի միջնակետերը գտնվում են մեկ ուղիղի վրա։ *Այդ ուղիղը կոչվում է հիպերբոլի տրամագիծ։*



Գծ. 62

Այսպիսով, հիպերբոլի բոլոր տրամագծերը կենտրոնով անցնող ուղիղներ են։ Հիպերբոլի տրամագծի անկյունային գործակիցը նշանակելով k_2, կունենանք՝

$$k_2 = \frac{b^2}{a^2k_1}, \tag{26}$$

կամ՝

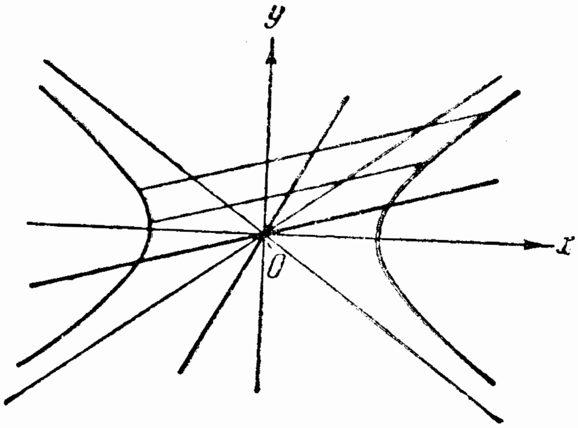
$$k_1k_2 = \frac{b^2}{a^2}\text{։} \tag{26'}$$

Պայմանավորվենք հիպերբոլի տրամագիծն անվանել համալուծ այն լարերին, որոնց միջնակետերով նա անցնում է։ (26) կամ (26′) պայմանը միմյանց հետ կապում է զուգահեռ լարերի և նրանց համալուծ տրամագծի անկյունային գործակիցները։ Քանի որ (26′) պայմանը սիմետրիկ է k_1-ի և k_2-ի նկատմամբ, ապա այստեղից եզրակացնում ենք՝ եթե k_2 անկյունային գործակից ունեցող տրամագիծը համալուծ է k_1 անկյունային գործակից ունեցող լարերին, ապա k_1 անկյունային գործակից ունեցող տրամագիծն էլ համալուծ է k_2 անկյունային գործակից ունեցող լարերին։ Այսպիսով, ստանում ենք մի զույգ տրամագծեր, որոնցից յուրաքանչյուրը կիսում է մյուսին զուգահեռ լարերը (գծ. 62)։ Հիպերբոլի այդպիսի երկու տրամագծերը կոչվում են միմյանց համալուծ։ Նրանց k_1 և k_2 անկյունային գործակիցները միմյանց հետ կապված են (26) կամ (26′) պայմանով։

Ուրեմն, հիպերբոլն ունի անթիվ բազմությամբ զույգ-զույգ միմյանց համալուծ տրամագծեր, յուրաքանչյուր տրամագծի համապատասխանում է իր համալուծ տրամագիծը։

Կոորդինատային առանցքները (սիմետրիայի առանցքները) հիպերբոլի համար միմյանց ուղղահայաց և համալուծ տրամագծեր են։ *Այսպիսի երկու տրամագծերը կոչվում են հիպերբոլի* գլխավոր տրամագծեր։

(26′) պայմանից երևում է, որ հիպերբոլի երկու համալուծ տրամագծերի k_1 և k_2 անկյունային գործակիցներն ունեն միևնույն նշանը, այսինքն՝ համալուծ տրամագծերն անցնում են միևնույն կոորդինատային քառորդներով և գտնվում են ասիմպտոտի տարբեր կողմերում (որովհետև, եթե $k_1<\frac{b}{a}$, ապա՝ $k_2>\frac{b}{a}$)․ Նրանցից մեկը հիպերբոլը հատում է երկու կետում, իսկ մյուսը չի հատում հիպերբոլը (գծ. 63)։



Գծ. 63

Ինչպես երևում է (26) պայմանից, k_1-ը մեծացնելիս ($k_1>0$), k_2-ը, դրական մնալով, փոքրանում է։ Այդ ցույց է տալիս, որ հիպերբոլի տրամագիծը ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ պտտելիս, նրան համալուծ տրամագիծը պտտվում է հակառակ ուղղությամբ. այսինքն՝ ժամացույցի սլաքի շարժման ուղղությամբ։ Եթե այդ ժամանակ տրամագծերից մեկի k անկյունային գործակիցը ձգտում է $\frac{b}{a}$-ին, ապա նրան համալուծ տրամագծի k_2 անկյունային գործակիցը նույնպես ձգտում է $\frac{b}{a}$-ին[1]*։*

§ 14. Պարաբոլի տրամագծերը։ *Դիտարկենք, վերջապես, կանոնական հավասարումով տրված պարաբոլը՝*

$$y^2=2px, \tag{27}$$

և վերցնենք k անկյունային գործակից ունեցող միմյանց զուգահեռ լարերը։ Պարզենք, թե ինչպես են դասավորված այդ լարերի միջնակետերը։ Այդ լարերից ցանկացած լարի ծայրակետերը նշանակենք $M_1(x_1, y_1)$ և $M_2(x_2, y_2)$, իսկ միջնակետը՝ $M(X, Y)$։ Քանի որ M_1 և M_2 կետերը գտնվում են պարաբոլի վրա, ապա նրանց կոորդինատները պետք է բավարարեն պարաբոլի (27) հավասարմանը, այսինքն՝

$$y_1^2=2px_1\text{։} \tag{28}$$

$$y_2^2=2px_2\text{։} \tag{29}$$

Մյուս կողմից, M_1M_2 ուղիղի k անկյունային գործակիցը որոշվում է հետևյալ բանաձևով (գլ. III, § 12)՝

---

[1] *Այսինքն համալուծ տրամագծերը համատեղվում են՝ համընկնելով ասիմպտոտի հետ։ Ծանոթ. թարգմ.։*

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}։ \qquad (30)$$

Վերջապես, նկատելով, որ M-ը M_1M_2 հատվածի միջնակետն է, կունենանք՝

$$X=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad (31)$$

$$Y=\frac{y_1+y_2}{2}։ \qquad (32)$$

(28)—(32) հինգ առնչություններից արտաքսենք x_1, x_2, y_1, y_2 չորս օժանդակ մեծությունները։ Այդ նպատակով (29) հավասարությունից հանելով (28)-ը, կստանանք՝

$$y_2^2-y_1^2=2p(x_2-x_1),$$

կամ՝

$$(y_2-y_1)(y_1+y_2)=2p(x_2-x_1)։$$

Օգտվելով (32) և (30) առնչություններից, այս վերջին հավասարության մեջ y_1+y_2 գումարը փոխարինենք $2Y$-ով, իսկ y_2-y_1 տարբերությունը $k(x_2-x_1)$-ով. կստանանք՝

$$k(x_2-x_1)2Y=2p(x_2-x_1)։$$

Կրճատելով $2(x_2-x_1)$-ի վրա[1], վերջնականապես կստանանք՝

$$kY=p,$$

որտեղից (քանի որ $k\neq 0$)՝

$$Y=\frac{p}{k}։ \qquad (33)$$

Այսպիսով, պարաբոլի միմյանց զուգահեռ լարերի միջնակետերի համար Y օրդինատը հաստատուն է։ Հետևաբար, այդ լարերի միջնակետերը գտնվում են

$$y=\frac{p}{k} \qquad (34)$$

ուղիղի վրա։

Մենք ենթադրել էինք, որ դիտարկվող լարերն Oy առանցքին զուգահեռ չեն։ Oy առանցքին զուգահեռ լարերի միջնակետերը նույնպես գտնվում են մի ուղիղի վրա՝ Ox առանցքի վրա (քանի որ Ox առանցքը պարաբոլի համար սիմետրիայի առանցք է)։

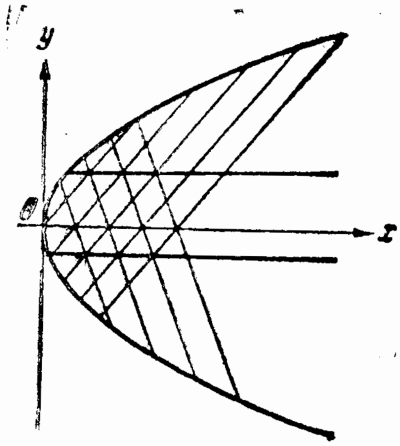
Ուրեմն, պարաբոլի միմյանց զուգահեռ լարերի միջնակետերը գտնըվում են ուղիղ գծի վրա։ Այդ ուղիղը կոչվում է պարաբոլի տրամագիծ։ Պայմանավորվենք (34) հավասարումով տրված տրամագիծն անվանել համալուծ k անկյունային գործակից ունեցող լարերին։ Ինչպես (34) հավասարումից երևում է պարաբոլի բոլոր տրամագծերը զուգահեռ են Ox առանցքին (պարաբոլի սիմետրիայի առանցքին) (գծ. 64)։

Ox առանցքը (պարաբոլի սիմետրիայի առանցքը), ի տարբերություն պարաբոլի մյուս տրամագծերի, այնպիսի տրամագիծ է, որն ուղղահայաց է իրեն համապատասխանող լարերին։ Այդպիսի տրամագիծը կոչվում է պարաբոլի գլխավոր տրամագիծ։

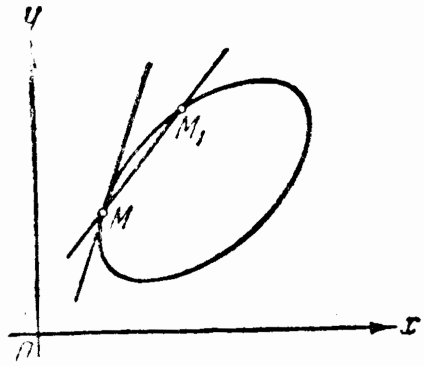
---

[1] $x_2-x_1\neq 0$, քանի որ դիտարկվող լարերն ունեն k անկյունային գործակից և, հետևաբար, զուգահեռ չեն Oy առանցքին։

§ **16. Շոշափող:** Կոնական հատույթի (էլիպսի, հիպերբոլի կամ պարաբոլի) վրա վերցնենք մի $M(x_0, y_0)$ կետ և այդ կետով տանենք MM_1 հատող



Գծ. 64



Գծ. 65

(գծ. 65)։ Այդ հատողը կոնական հատույթը կհատի երկու՝ M և M_1 կետերում։ M կետը պահելով անշարժ, հատման երկրորդ՝ M_1 կետն անսահմանորեն մոտեցնենք M կետին, շարժելով կոնական հատույթի վրայով։ Այդ ժամանակ MM_1 հատողը կպտտվի M կետի շուրջը. այն սահմանային դիրքը, որ հատողը կգրավի, երբ M_1 կետը համընկնի M կետի հետ, կոչվում է կոնական հատույթի շոշափող M կետում: M կետը կոչվում է շոշափման կետ: Շոշափողը, որպես $M(x_0, y_0)$ կետով անցնող ուղիղ, կունենա հետևյալ հավասարումը (գլ. III, § 9)՝

$$y-y_0=k(x-x_0), \tag{35}$$

որտեղ k-ն շոշափողի անկյունային գործակիցն է, որ դեռևս չի որոշված։ k-ն որոշելու համար, M_1 կետի կոորդինատները նշանակենք x_0+h, y_0+l։ Այդ դեպքում MM_1 հատողի անկյունային գործակիցը, որպես $M(x_0, y_0)$ և $M_1(x_0+h, y_0+l)$ կետերով անցնող ուղիղի անկյունային գործակից, հավասար կլինի $\frac{l}{h}$ (գլ. III, § 12)։ Իսկ շոշափողի k անկյունային գործակիցը կլինի $\frac{l}{h}$ հարաբերության սահմանը, երբ h-ը ձգտում է զրոյի (M_1 կետը ձգտում է M կետին), այսինքն՝

$$k=\lim_{h\to 0}\frac{l}{h}.$$

Քանի որ h-ն ու l-ը կոնական հատույթի M կետի աբսցիսի և օրդինատի աճերն են. ապա k-ն օրդինատի (ֆունկցիայի) և աբսցիսի (անկախ փոփոխականի) աճերի հարաբերության սահմանն է, երբ աբսցիսի աճը ձգտում է զրոյի։ Դիֆերենցիալ հաշվից հայտնի է, որ այդպիսի սահմանը՝ y օրդինատի ածանցյալն է ըստ x աբսցիսի, վերցրած $M(x_0, y_0)$ կետի համար, այսինքն՝

$$k=\left(\frac{dy}{dx}\right)_0,$$

որտեղ $_0$ նշանիկը ցույց է տալիս, որ ածանցյալի արժեքը պետք է վերցնել (x_0, y_0) կետում։ Իսկ y ֆունկցիայի կախումն x անկախ փոփոխականից տրվում է կոնական հատույթի հավասարումով։

Օ ր ի ն ա կ 1. *Կազմել* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *էլիպսին* $M(x_0, y_0)$ *կետում տարված շոշափողի հավասարումը։*

Էլիպսի հավասարումը դիֆերենցելով, կստանանք՝

$$\frac{2x}{a^2}dx+\frac{2y}{b^2}dy=0, \quad \text{որտեղից՝} \quad \frac{dv}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}\text{։}$$

Հետևաբար՝

$$k=\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\text{։}$$

Շոշափողի հավասարումը կլինի՝

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)\text{։}$$

Բազմապատկելով $\frac{y_0}{b^2}$*-ով, կստանանք՝*

$$\frac{yy_0}{b^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=-\frac{xx_0}{a^2}+\frac{x_0^2}{a^2}, \quad \text{այսինքն՝} \quad \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\text{։}$$

Քանի որ (x_0, y_0) *կետը գտնվում է էլիպսի վրա, ապա վերջին հավասարման աջ մասը հավասար է 1-ի, և շոշափողի հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1\text{։}$$

Օ ր ի ն ա կ 2. *Կազմել* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *հիպերբոլին* $M(x_0, y_0)$ *կետում տարված շոշափողի հավասարումը։*

1-ին օրինակի նմանությամբ հիպերբոլի շոշափողի հավասարումը կստանանք հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1\text{։}$$

Տեսնենք, թե հիպերբոլի շոշափողի հավասարումն ինչպիսին կդառնա, եթե շոշափման (x_0,y_0) *կետը հեռանա դեպի անվերջություն։ Շոշափողի հավասարումը գրենք հետևյալ տեսքով՝*

$$y=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x-\frac{b^2}{y_0}$$

և նկատենք, որ (x_0, y_0) *կետը բավարարում է հետևյալ պայմանին՝*

$$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1, \quad \text{որտեղից՝} \quad \frac{x_0^2}{y_0^2}=\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2}{y_0^2}\text{։}$$

Այժմ հարկադրելով (x_0, y_0) *կետին հիպերբոլի վրայով ձգտել դեպի անվեր-ջություն և վերջին հավասարության մեջ սահմանային անցում կատարե-*

լով, կստանանք՝

$$\lim\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2=\frac{a^2}{b^2} \quad \text{կամ՝} \quad \left[\lim\frac{x_0}{y_0}\right]^2=\frac{a^2}{b^2},$$

որտեղից՝

$$\lim\frac{x_0}{y_0}=\pm\frac{a}{b}\text{։}$$

Շոշափողի հավասարումը սահմանային դեպքում կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$y=\frac{b^2}{a^2}\left(\pm\frac{a}{b}x\right) \quad \text{կամ՝} \quad y=\pm\frac{b}{a}x\text{։}$$

Սրանք հիպերբոլի երկու ասիմպտոտների հավասարումներն են։ Այսպիսով, երբ շոշափման կետը հեռանում է դեպի անվերջություն, հիպերբոլի շոշափողը ձգտում է ասիմպտոտի դիրքին։

Օ ր ի ն ա կ 3. Կազմել $y^2=2px$ պարաբոլին (x_0, y_0) կետում տարված շոշափողի հավասարումը։

Պարաբոլի հավասարումը դիֆերենցելով, կգտնենք՝

$$2ydy=2pdx, \quad \text{կամ՝} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}\text{։}$$

Հետևաբար՝ $k=\frac{p}{y_0}$ և շոշափողի հավասարումը կլինի՝

$$y-y_0=\frac{p}{y_0}(x-x_0),$$

կամ, բազմապատկելով y_0-ով՝

$$yy_0-y_0^2=px-px_0\text{։}$$

Քանի որ (x_0, y_0) կետը գտնվում է պարաբոլի վրա, ապա նրա կոորդինատները բավարարում են պարաբոլի հավասարմանը՝ $y_0^2=2px_0$։ Շոշափողի հավասարման մեջ y_0^2-ն փոխարինելով իր այս արժեքով, կգտնենք՝

$$yy_0=px+px_0, \quad \text{կամ՝} \quad yy_0=p(x+x_0)\text{։}$$

Կոնական հատույթին (էլիպսին, հիպերբոլին, պարաբոլին) $M_0(x_0, y_0)$ կետում տարված շոշափողի անկյունային գործակիցը կարելի է որոշել, չդիմելով դիֆերենցիալ հաշվին։

Այդ նպատակով նկատենք, որ M_0 կետում կոնական հատույթին տարված շոշափողի ուղղությունը համընկնում է այն լարերի ուղղության հետ, որոնք համալուծ են M_0 կետով անցնող տրամագծին։ Հետևաբար, համալուծ լինելու (23′) պայմանից կստանանք էլիպսի շոշափողի k_1 անկյունային գործակիցը, եթե նրա մեջ k_2-ի տեղ դնենք M_0 կետով անցնող տրամագծի անկյունային գործակիցը. նկատելով, որ $k_2=\frac{y_0}{x_0}$, կստանանք՝

$$k_1=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\text{։}$$

Նման ձևով հիպերբոլի համար (26′) պայմանից կգտնենք հիպերբոլին

$M_0(x_0, y_0)$ կետում տարած շոշափողի անկյունային գործակիցը՝

$$k=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}:$$

Վերջապես, պարաբոլի դեպքում M_0 կետում տարված շոշափողի k անկյունային գործակիցը կորոշվի այն պայմանից, որ նրա (պարաբոլի) $y=\frac{p}{k}$ հավասարումն ունեցող տրամագիծը անցնում է M_0 կետով. այսինքն՝ $y_0=\frac{p}{k}$, որտեղից՝

$$k=\frac{p}{y_0}:$$

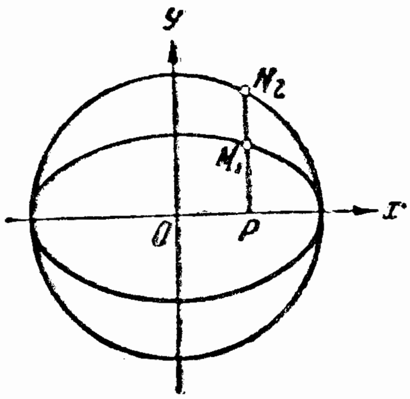
§ 16. Էլիպսը որպես շրջանագծի պրոյեկցիա: Դիցուք էլիպսը տրված է իր կանոնական հավասարումով՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b):$$

Դիտարկենք էլիպսին արտագծած շրջանագծի

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

հավասարումը (գծ. 66):



Գծ. 66.

Էլիպսի և շրջանագծի վրա գտնըվող այն M_1 և M_2 կետերը, որոնք ունեն միևնույն աբսցիսը և գտնվում են Ox առանցքի միևնույն կողմում, անվանենք համապատասխան կետեր: Նրանց ընդհանուր աբսցիսը նշանակենք՝ մեծ $\overline{OP}=x$, իսկ օրդինատները՝ մեծ $\overline{PM_1}=y$ և մեծ $\overline{PM_2}=Y$. կունենանք՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ և } \frac{x^2}{a^2}+\frac{Y^2}{a^2}=1:$$

Այս երկու հավասարումները բաղդատելով, տեսնում ենք, որ

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{Y^2}{a^2},$$

կամ, ստացված հավասարումը լուծելով y^2-ու նկատմամբ, կունենանք՝

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}Y^2,$$

որտեղից վերջնականապես՝

$$y=\frac{b}{a}Y.$$

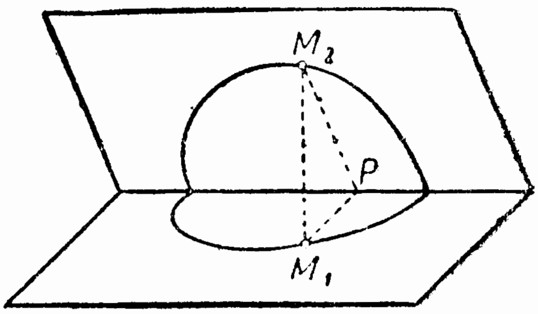
Քանի որ $\frac{b}{a}<1$, ապա կարող ենք նշանակել՝

$$\frac{b}{a}=\cos\varphi,$$

որից հետո համապատասխան կետերի օրդինատների միջև գտած կապը կներկայացվի այսպես՝

$$y=Y\cos\varphi.$$

Այս բանաձևը ցույց է տալիս, որ $\overline{PM_1}$ ուղղությամբ օժտված հատվածի y մեծությունը կարող է դիտարկվել որպես $\overline{PM_2}$ ուղղությամբ օժտված հատվածի պրոյեկցիա, եթե $\overline{PM_1}$ և $\overline{PM_2}$ հատվածներով կազմած անկյունն ընդունենք φ։



Գծ. 67.

Այստեղից երևում է, որ եթե շրջանագիծը տեղավորենք մի հարթության մեջ, որն էլիպսի հարթության հետ կազմում է φ անկյուն, ապա էլիպսը կհանդիսանա շրջանագծի օրթոգոնալ պրոյեկցիան (գծ. 67)։

§ 17. Էլիպսի պարամետրական հավասարումները:

Նախորդ պարագրաֆի գծ. 66-ի նշանակումները պահպանելով, հիշենք, որ էլիպսի և շրջանագծի $M_1(x, y)$ և $M_2(X, Y)$ համապատասխան կետերի կոորդինատները միմյանց հետ կապված են հետևյալ առնչություններով՝

$$\left.\begin{aligned} x&=X,\\ y&=\frac{b}{a}Y. \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Քանի որ շրջանագծի պարամետրական հավասարումներն ունեն հետևյալ տեսքը (գլ. II, § 5)՝

$$X=a\cos t,$$
$$Y=a\sin t,$$

ապա (36)-ում X-ն ու Y-ը փոխարինելով այս արտահայտություններով, կստանանք՝

$$x = a\cos t,$$
$$y = \frac{b}{a} a\sin t,$$

կամ, վերջնականապես՝

$$x = a\cos t,$$
$$y = b\sin t\text{:}$$

Սրանք էլ հենց էլիպսի պարամետրական հավասարումներն են։

Վարժություններ

Շրջանագիծ

1. *Գրել շրջանագծի հավասարումը գիտենալով, որ՝*

ա) շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է (—2, —3) կետում, իսկ շառավիղը հավասար է 3 միավորի.

բ) կենտրոնը գտնվում է (2, —3) կետում և շրջանագիծն անցնում է (5, 1) կետով.

գ) տրամագծերից մեկի ծայրակետերն ունեն (3, 9) և (7, 3) կոորդինատները։

2*. *Գտնել այն շրջանագծի հավասարումը, որն անցնում է (9, 3), (—3, 3) և (11, 1) կետերով։*

3*. *Ինչպիսի՞ արժեքներ պետք է ունենան*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

հավասարման գործակիցները, որպեսզի նա որոշի 5 միավոր շառավիղ և (3, 2) կենտրոն ունեցող շրջանագիծը։

4*. *Գտնել հետևյալ հավասարումներով որոշվող շրջանագծերի կենտրոններն ու շառավիղները՝*

ա) $x^2+y^2-4x+2y+1=0$, *բ)* $2x^2+2y^2+5x-3y-2=0$,

գ) $x^2+y^2-6x-7=0$, *դ)* $x^2+y^2+3y=0$։

5. *Գտնել այն շրջանագծի հավասարումը, որին կոորդինատային առանցքները շոշափում են սկզբնակետից* a *միավոր հեռավորության վրա։*

6. *Գտնել այն շրջանագծի հավասարումը, որն* Oy *առանցքը շոշափում է սկզբնակետում և* Ox *առանցքը հատում է (6, 0) կետում։*

7. *Գտնել այն շրջանագծի հավասարումը, որն* Ox *առանցքը շոշափում է սկզբնակետում և* Oy *առանցքը հատում է (0, —8) կետում։*

8. *Գտնել այն շրջանագծի հավասարումը, որն* Ox *առանցքը շոշափում է (—5, 0) կետում և ունի 3 միավոր շառավիղ։*

9*. *Գտնել, այն շրջանագծի հավասարումը, որի կենտրոնը գտնվում է (4, 7) կետում, և որը շոշափում է* $3x-4y+1=0$ *ուղիղը։*

10*. *Արտածել* $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ *շրջանագծի* (x_0, y_0) *կետում տարված շոշափողի հավասարումը։*

11. *Կազմել* $x^2+y^2=r^2$ *շրջանագծին* (x_0, y_0) *կետում տարված շոշափողի հավասարումը։*

12. Գրել $(x+1)^2+(y+3)^2=25$ շրջանագծին $(3, 6)$ կետում տարված շոշափողի հավասարումը։

13*. Գտնել $x^2+y^2=10$ շրջանագծին $(-5, -5)$ կետից տարված շոշափողների հավասարումները։

14. Գտնել $(-7, 1)$ կետից $x^2+y^2=5$ շրջանագծին տարված շոշափողների հավասարումները։

15*. ա) Գտնել $x^2+y^2=13$ շրջանագծի այն շոշափողները, որոնք զուգահեռ են $4x+6y-5=0$ ուղղին։ բ) Գտնել $x^2+y^2+5x=0$ շրջանագծի այն շոշափողները, որոնք ուղղահայաց են $4x-3y+7=0$ ուղղին։

16. Գտնել $M(7, 8)$ կետից $(x-2)^2+(y-3)^2=14$ շրջանագծին տարված շոշափողի երկարությունը (d)։

17. ա) Տրված են $A(-6, 0)$ և $B(2, 0)$ կետերը։ Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնցից AO և OB հատվածները երևում են հավասար անկյուններով։

բ) $x^2+y^2=2ax$ շրջանագծի բոլոր այն ON լարերը, որոնք տարված են կոորդինատների O սկզբնակետից, N կետից շարունակված են $NM=ON$ երկարությամբ։ Գտնել M կետերի երկրաչափական տեղը։

Էլիպս

18. Կազմել էլիպսի պարզագույն հավասարումը, գիտենալով, որ՝

ա) Նրա կիսաառանցքները համապատասխանաբար հավասար են 5 և 4.

բ) միջֆոկուսային հեռավորությունը հավասար է 8-ի, իսկ մեծ առանցքը հավասար է 10-ի.

գ) միջֆոկուսային հեռավորությունը հավասար է 6-ի, իսկ փոքր կիսաառանցքը՝ 2-ի.

դ) մեծ կիսաառանցքը հավասար է 10-ի, իսկ էքսցենտրիսիտետը՝ 0,6-ի.

ե) փոքր կիսաառանցքը հավասար է 6-ի, իսկ էքսցենտրիսիտետը՝ 0,8-ի.

զ) միջֆոկուսային հեռավորությունը հավասար է 8-ի, իսկ էքսցենտրիսիտետը՝ 0,8-ի.

է) կիսաառանցքների գումարը հավասար է 10-ի, իսկ միջֆոկուսային հեռավորությունը $4\sqrt{5}$-ի։

19. Գտնել հետևյալ հավասարումով տրված էլիպսի առանցքների երկարությունները, ֆոկուսների կոորդինատները և էքսցենտրիսիտետը՝

1) $16x^2+25y^2=400$, 2) $9x^2+y^2=36$։

20. Որոշել էլիպսի էքսցենտրիսիտետը, եթե՝

ա) Նրա ֆոկուսները միացնող հատվածը փոքր առանցքի ծայրից երևում է ուղիղ անկյունով.

բ) միջֆոկուսային հեռավորությունը հավասար է մեծ և փոքր առանցքների ծայրերի հեռավորությանը.

գ) Նրա մեծ առանցքը երեք անգամ մեծ է փոքր առանցքից.

դ) Նրա առանցքները հարաբերում են, ինչպես 5 : 3։

21) Տրված է էլիպսի ε էքսցենտրիսիտետը։ Գտնել էլիպսի կիսաառանցքների հարաբերությունը։ Էքսցենտրիսիտետի մեծությունն ինչպե՞ս է բնութագրում էլիպսի ձևը։

22. Էլիպսն օրդինատների առանցքը շոշափում է սկզբնակետում, իսկ կենտրոնը գտնվում է (5, 0) կետում։ Կազմել էլիպսի հավասարումը, գիտենալով, որ նրա էքսցենտրիսիտետը հավասար է 0,6-ի։

23. Էլիպսն աբսցիսների առանցքը շոշափում է (8, 0) կետում, իսկ օրդինատների առանցքը՝ (0, —5) կետում։ Գրել էլիպսի հավասարումը, եթե հայտնի է, որ նրա առանցքները զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին։

24. Էլիպսն օրդինատների առանցքը շոշափում է (0, 5) կետում և աբսցիսների առանցքը հատում է (5, 0) և (11, 0) կետերում։ Կազմել էլիպսի հավասարումը, եթե հայտնի է, որ նրա առանցքները զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին։

25. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ էլիպսին քանի՞ շոշափող կարելի է տանել (1, 1) կետից, քանի՞սը՝ (3, 1) կետից և քանի՞սը՝ (0, 2) կետից։

26. Գրել $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ էլիպսին (—3, 3) կետում տարված շոշափողի հավասարումը։

27. Հայտնի է, որ $2x-5y-30=0$ ուղիղը շոշափում է $\frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{24}=1$ էլիպսը։ Գտնել նրանց շոշափման կետը։

28*. Գտնել (4, —1) կետից $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ էլիպսին տարված շոշափողների հավասարումները։

29. Գտնել $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$ էլիպսի այն շոշափողները, որոնք անցնում են (—3, 1) կետով։

30*. Գտնել $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ էլիպսի այն շոշափողները, որոնք զուգահեռ են $6x-2y-5=0$ ուղղին։

31. Գտնել $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ էլիպսի այն շոշափողները, որոնք ուղղահայաց են $x-y+5=0$ ուղղին։

32. Գրել $\frac{x^2}{96}+\frac{y^2}{32}=1$ էլիպսի դիրեկտրիսների հավասարումները։

33. Գրել այն էլիպսի հավասարումը, որի փոքր կիսառանցքը հավասար է $2\sqrt{6}$-ի, իսկ դիրեկտրիսները՝ $x=\pm 10$ ուղիղներն են։

34. Գտնել այն էլիպսի հավասարումը, որի միջֆոկուսային հեռավորությունը հավասար է 2-ի, իսկ միջդիրեկտրիսային հեռավորությունը՝ 10-ի։

35. Գտնել էլիպսի էքսցենտրիսիտետը, եթե նրա միջդիրեկտրիսային հեռավորությունը երեք անգամ մեծ է միջֆոկուսային հեռավորությունից։

36. Էլիպսի միջդիրեկտրիսային հեռավորությունը հավասար է 36-ի։ Գտնել այդ էլիպսի հավասարումը, գիտենալով, որ մի որոշ կետի ֆոկուսային շառավիղները հավասար են 9-ի և 10-ի։

37. *Էլիպսի միջֆոկուսային հեռավորությունը հավասար է 8-ի, միջդիրեկտրիսային հեռավորությունը՝ 12,5-ի։ Գտնել այդ էլիպսի պարզագույն հավասարումը։*

38*. *Տրված է* $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$ *էլիպսը։ (1, 1) կետով տանել այնպիսի լար, որն այդ կետում կիսվի։*

39. *Տրված է* $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$ *էլիպսը։ (2, —1) կետով տանել այնպիսի լար, որն այդ կետում կիսվի։*

40. *Գտնել* $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$ *էլիպսի այն տրամագծի հավասարումը, որն ունի երկրորդ կոորդինատային անկյան կիսորդի ուղղությունը։*

41*. *Ապացուցել, որ* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *էլիպսի այն շոշափողները, որոնք տարված են նրա միևնույն տրամագծի ծայրերում, միմյանց զուգահեռ են։*

42. *Գտնել* $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ *էլիպսի այն տրամագծերի հավասարումները, որոնց երկարությունը հավասար է* $2\sqrt{5}$*-ի։*

43. *Գտնել* $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ *էլիպսի երկու համալուծ տրամագծերով կազմված անկյունը, եթե նրանցից մեկը էլիպսի մեծ առանցքի նկատմամբ թեքված է 30° անկյամբ։*

44. *Գտնել* $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ *էլիպսի երկու համալուծ տրամագծերի ուղղությունները ու երկարությունները, եթե նրանցից մեկն անցնում է (4, 2) կետով։*

45. *Գտնել* $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$ *էլիպսի այն համալուծ տրամագծերի երկարությունները, որոնք միմյանց հետ կազմում են 60° անկյուն։*

46*. *Գտնել* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *էլիպսի այն համալուծ տրամագծերի հավասարումները, որոնք միմյանց հավասար են։*

47. *Գտնել* $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1$ *էլիպսի երկու՝ միմյանց հավասար համալուծ տրամագծերի հավասարումները։*

48. *Գտնել* $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ *էլիպսի միմյանց հավասար երկու համալուծ տրամագծերով կազմված անկյունը։*

49*. *Հաստատուն երկարություն ունեցող հատվածը իր երկու ծայրերով սահում է ուղիղ անկյան կողմերի վրայով։ Որոշել այն կորը, որ գծում է այդ հատվածի վրա գտնվող ցանկացած* M *կետը։*

50. Գտնել $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ էլիպսի պարզագույն բևեռային հավասարումը։

Հիպերբոլ

51. Կազմել հիպերբոլի պարզագույն հավասարումը, գիտենալով, որ՝

ա) Նրա կիսառանցքները համապատասխանորեն հավասար են 5 և 4 միավորի.

բ) միջֆոկուսային հեռավորությունը հավասար է 14-ի, իսկ գագաթների միջև եղած հեռավորությունը՝ 12-ի.

գ) իրական կիսառանցքը հավասար է 5-ի, էքսցենտրիսիտետը՝ 1,4-ի.

դ) միջֆոկուսային հեռավորությունը հավասար է 16-ի, էքսցենտրիսիտետը՝ $\frac{4}{3}$-ի.

ե) իրական կիսառանցքը հավասար է $\sqrt{15}$-ի և հիպերբոլն անցնում է (5, —2) կետով.

զ) հիպերբոլն անցնում է $(2\sqrt{7}, -3)$ և $(-7, -6\sqrt{2})$ կետերով։

52. Գտնել հետևյալ հավասարումներով տրված հիպերբոլի առանցքների երկարությունները, ֆոկուսների կոորդինատները և էքսցենտրիսիտետը՝

ա) $25x^2-144y^2=3600$, բ) $16y^2-9x^2=144$։

53. ա) Գտնել հիպերբոլի էքսցենտրիսիտետի և ասիմպտոտներով կազմված անկյան միջև եղած կախումը.

բ) հիպերբոլի կիսառանցքների հարաբերությունն արտահայտել էքսցենտրիսիտետի միջոցով.

Ինչպե՞ս է ազդում էքսցենտրիսիտետի մեծությունը հիպերբոլի ձևի վրա։

54*. Տրված է $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$ հիպերբոլը։ Գտնել այն տրամագծի հավասարումը, որի երկարությունը հավասար է $2\sqrt{29}$-ի։

55. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ հիպերբոլի վրա վերցրած է մի կետ, որի աբսցիսը հավասար է 8-ի և օրդինատը դրական է։ Հաշվել այդ կետի ֆոկուսային շառավիղները։

56. Տրված է $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$ էլիպսը։ Գտնել այն հիպերբոլի հավասարումը, որի գագաթները գտնվում են այդ էլիպսի ֆոկուսներում, իսկ ֆոկուսները՝ նրա գագաթներում։

57. Գտնել $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$ հիպերբոլի այն շոշափողները, որոնք տարված են հիպերբոլի և $3x-5y=0$ ուղղի հատման կետերում.

58. Գտնել $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}=1$ հիպերբոլի այն շոշափողները, որոնք անցնում են (2, 1) կետով։

59. *Գտնել* $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ *հիպերբոլի այն շոշափողները, որոնք զուգահեռ են* $3x-2y=0$ *ուղղին։*

60. *Ապացուցել, որ* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *հիպերբոլի ֆոկուսների՝ շոշափողից ունեցած հեռավորությունների արտադրյալը հավասար է* b^2*-ու։*

61. *Ապացուցել, որ հավասարասրուն հիպերբոլի ասիմպտոտները կիսում են նրա համալուծ տրամագծերով կազմված անկյունները։*

62*. *1) Գտնել* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *հիպերբոլի ֆոկուսի շեղումը ասիմպտոտից։*

2) Ապացուցել, որ հիպերբոլի ցանկացած կետի՝ ասիմպտոտներից ունեցած հեռավորությունների արտադրյալը հաստատուն մեծություն է։

63. *Տրված են հիպերբոլի* p *ֆոկուսային պարամետրը և* ε *էքսցենտրիսիտետը։ Գտնել կիսաառանցքները։*

64. *Հիպերբոլը* $x-y-3=0$ *ուղիղը շոշափում է (5, 2) կետում։ Կազմել այդ հիպերբոլի հավասարումը։*

65. *Գտնել* $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$ *հիպերբոլի այն շոշափողները, որոնք ուղղահայաց են* $x+2y-3=0$ *ուղղին։*

66. *Գտնել հիպերբոլի հավասարումը, գիտենալով, որ նրա միջդիրեկտրիսային հեռավորությունը հավասար է 6-ի, միջֆոկուսային հեռավորությունը՝ 10-ի։*

67. *Գտնել հիպերբոլի էքսցենտրիսիտետը, եթե հայտնի է, որ նրա միջդիրեկտրիսային հեռավորությունը երեք անգամ փոքր է միջֆոկուսային հեռավորությունից։*

68. *Գտնել* $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{4}=1$ *հիպերբոլի այն երկու համալուծ տրամագծերի հավասարումները, որոնք միմյանց հետ կազմում են 45° անկյուն։*

69. *Գտնել* $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ *հիպերբոլի այն տրամագծերի հավասարումները, որոնք ունեն* $2\sqrt{5}$ *երկարություն։*

70. *Տրված է* $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$ *հիպերբոլը։ Գրել նրա ասիմպտոտների հավասարումները։*

71. *Գտնել հիպերբոլի հավասարումը, եթե հայտնի է, որ՝*

ա) $a=b$ *և դիրեկտրիսները տրված են* $x=\pm 2$ *հավասարումներով.*

բ) միջֆոկուսային հեռավորությունը հավասար է 10-ի և ասիմպտոտները տրված են $y=\pm\frac{1}{2}x$ *հավասարումներով.*

գ) ասիմպտոտները տրված են $y=\pm\frac{3}{5}x$ *հավասարումներով և հիպեր-*

բոլն անցնում է $(10, -3\sqrt{3})$ կետով։

72. Տրված են $A(-1, 0)$ և $B(2, 0)$ կետերը։ M կետն այնպես է շարժվում, որ AMB եռանկյան մեջ B անկյունը A անկյունից երկու անգամ մեծ է մնում։ Որոշել շարժման հետագիծը։

73. Երկու ուղիղներ երկու անշարժ կետերի շուրջը պտտվում են հակադիր ուղղությամբ և միևնույն անկյունային արագությամբ։ Շարժման սկզբում այդ ուղիղներից մեկը համընկնում է տված կետերը միացնող ուղղի հետ, իսկ մյուսը՝ ուղղահայաց է նրան։ Գտնել այդ ուղիղների հատման կետերի երկրաչափական տեղը։

74. Կազմել $xy=m$ հիպերբոլին (x_0, y_0) կետում տարված շոշափողի հավասարումը։

Պ ա ր ա բ ո լ

75. Կազմել պարաբոլի հավասարումը, գիտենալով, որ՝

ա) պարաբոլի համար սիմետրիայի առանցք է ծառայում Ox առանցքը, գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում և ֆոկուսի հեռավորությունը գագաթից հավասար է 4 միավորի,

բ) պարաբոլը սիմետրիկ է Ox առանցքի նկատմամբ, անցնում է $(2, -4)$ կետով և գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում.

գ) պարաբոլը սիմետրիկ է Ox առանցքի նկատմամբ, անցնում է $(-2, 4)$ կետով և գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում.

դ) պարաբոլը սիմետրիկ է Oy առանցքի նկատմամբ, ֆոկուսը գտնըվում է $(0, 3)$ կետում և գագաթը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ.

ե) պարաբոլը սիմետրիկ է Ox առանցքի նկատմամբ, անցնում է $(4, 2)$ կետով և գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում.

զ) պարաբոլը սիմետրիկ է Oy առանցքի նկատմամբ, անցնում է $(-4, -2)$ կետով և գագաթը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ.

է) ֆոկուսն ունի $(3, 0)$ կոորդինատները, դիրեկտրիսան ծառայում է որպես օրդինատների առանցք, իսկ սիմետրիայի առանցքը՝ որպես աբսցիսների առանցք.

ը) ֆոկուսն ունի $(0, 3)$ կոորդինատները, դիրեկտրիսան ծառայում է որպես աբսցիսների առանցք, իսկ սիմետրիայի առանցքը՝ որպես օրդինատների առանցք։

76. Կազմել պարաբոլի հավասարումը, գիտենալով, որ նրա գագաթը գտնվում է (a, b) կետում, պարամետրը հավասար է p-ի և սիմետրիայի առանցքի ուղղությունը համընկնում է՝

ա) Ox առանցքի դրական ուղղության հետ.

բ) Ox առանցքի բացասական ուղղության հետ.

գ) Oy առանցքի դրական ուղղության հետ.

դ) Oy առանցքի բացասական ուղղության հետ։

77. Կազմել պարաբոլի հավասարումը, գիտենալով, որ նրա գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, սիմետրիայի առանցքի ուղղությունը համընկնում է Ox առանցքի բացասական ուղղության հետ, իսկ d

պարամետրը հավասար է $4x^2-9y^2-36=0$ հիպերբոլի ֆոկուսների՝ ասիմպտոտներից եղած հեռավորությանը։

78. Կազմել պարաբոլի հավասարումը, գիտենալով, որ նրա գագաթը գտնվում է $(-2, 1)$ կետում, սիմետրիայի առանցքի ուղղությունը համընկնում է Oy առանցքի բացասական ուղղության հետ, իսկ p պարամետրը հավասար է $3x^2+4y^2-48=0$ էլիպսի միջդիրեկտրիսային հեռավորությանը։

79. Գտնել $y^2=2px$ պարաբոլի այն լարի երկարությունը, որն անցնում է նրա ֆոկուսով և ուղղահայաց է սիմետրիայի առանցքին։

80.* Տրված է $y^2=6x$ պարաբոլը։ $(4, 1)$ կետով տանել այնպիսի լար, որն այդ կետում կիսվի։

81. Տրված է $y^2=-8x$ պարաբոլը։ $(-1, 1)$ կետով տանել այնպիսի լար, որն այդ կետում կիսվի։

82. Գտնել $y^2=8x$ պարաբոլի այն տրամագծերի հավասարումները, որոնք համալուծ են իրենց նկատմամբ 45° անկյունով թեքված լարերին։

83. Տրված է $y^2=10x$ պարաբոլը։ Գտնել այդ պարաբոլի և $y=4x-5$ ուղիղի հատման կետերում նրան տարված շոշափողների հավասարումները։

84. $y^2=12x$ պարաբոլի վրա գտնել այնպիսի կետ, որպեսզի այդ կետում պարաբոլին տարված շոշափողը սիմետրիայի առանցքի հետ կազմի 30° անկյուն։

85. Գտնել $y^2=4x$ պարաբոլի այն շոշափողները, որոնք անցնում են $(3, -4)$ կետով։

86. Գտնել $y^3=16x$ պարաբոլի այն շոշափողը, որը՝

ա) զուգահեռ է $2x-y+5=0$ ուղիղին.

բ) ուղղահայաց է $x-y-7=0$ ուղիղին։

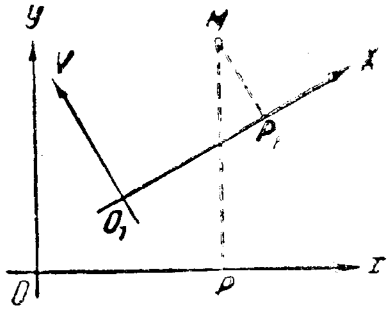
87. Գտնել այն շրջանագծերի կենտրոնների երկրաչափական տեղը, որոնք անցնում են տվյալ կետով և շոշափում են տվյալ ուղիղը։

ԳԼՈՒԽ V

ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒՄԸ: ԳԾԵՐԻ ԴԱՍԱԿԱՐԳՈՒՄԸ

§ 1. Կոորդինատների ձևափոխման խնդիրը: *Հարթության վրա կետի դիրքը որոշվում է երկու կոորդինատներով՝ մի որոշ կոորդինատային սիստեմի նկատմամբ: Կետի կոորդինատները կփոխվեն, եթե մենք ընտրենք մի այլ կոորդինատային սիստեմ: Կոորդինատների ձևափոխման խնդիրը կայանում է նրանում, որ-պեսզի* գիտենալով կետի կոորդինատները կոորդինատային մի սիստեմում, գտնենք նրա կոորդինատները մի այլ սիստեմում: *Այդ խնդիրը կլուծվի, եթե մենք գտնենք այնպիսի բանաձևեր, որոնք միմյանց հետ կապում են ցանկացած կետի կոորդինատները երկու տարբեր սիստեմների նկատմամբ, ընդ որում այդ բանաձևերի գործակիցների մեջ կմտնեն երկու սիստեմների փոխադարձ դիրքը որոշող հաստատուններ:*

Դիցուք տրված են կոորդինատների երկու դեկարտյան սիստեմներ՝ xOy *և* XO_1Y *(գծ. 68):* XO_1Y *նոր սիստեմի դիրքը* xOy *հին սիստեմի նկատմամբ որոշված կլինի, եթե հայտնի լինեն* O_1 *նոր սկզբնակետի* a *և* b *կոորդինատները հին սիստեմի նկատմամբ և* Ox *ու* O_1X *առանցքների միջև կազմված* α *անկյունը:*



Գծ. 68

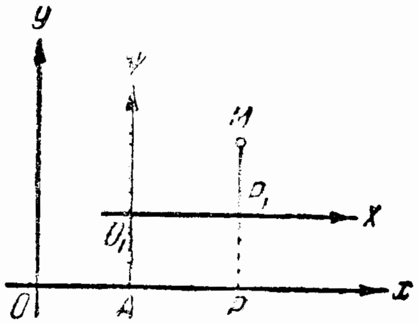
Կամայական M *կետի կոորդինատները հին սիստեմի նկատմամբ նշանակենք* x *և* y, *իսկ նոր սիստեմի նկատմամբ՝* X *և* Y*: Մեր խնդիրն է հին* x, y *կոորդինատներն արտահայտել նոր* X, Y *կոորդինատներով: Ստացված ձևափոխման բանաձևերի մեջ, ակներևաբար, կմտնեն* a, b *և* α

հաստատունները: Այս ընդհանուր խնդրի լուծումը կստանանք, եթե առանձին-առանձին քննության առնենք հետևյալ երկու մասնավոր դեպքերը՝

1. Փոխվում է կոորդինատների սկզբնակետը, իսկ առանցքների ուղղությունները մնում են անփոփոխ ($\alpha=0$):

2. Փոխվում են առանցքների ուղղությունները, իսկ կոորդինատների սկզբնակետը մնում է անփոփոխ ($a=b=0$):

§ **2. Կոորդինատների սկզբնակետի տեղափոխումը:** *Դիցուք տրված են դեկարտյան կոորդինատների երկու սիստեմներ՝* O *և* O_1 *տարբեր սկզբնակետերով և առանցքների միևնույն ուղղություններով (գծ. 69): Նոր* O_1 *սկզբնակետի կոորդինատները հին սիստեմի նկատմամբ նշանակենք* a, b, *կամայական* M *կետի կոորդինատները հին սիստեմի նկատմամբ նշանակենք* x, y, *իսկ նոր սիստեմի նկատմամբ՝* X, Y: M *կետը պրոյեկտելով* O_1X *և* $0x$ *առանցքների վրա և* O_1 *կետը՝* Ox *առանցքի վրա, վերջինիս վրա կստանանք երեք կետ՝* O, A *և* P: *Ինչպես հայտնի է (գլ.* I, § *1),* $\overline{OA}$, $\overline{AP}$ *և* $\overline{OP}$ *հատվածների մեծությունները կապված են հետևյալ առնչությամբ՝*



Գծ. 69

$$\text{մեծ } \overline{OA}+\text{մեծ } \overline{AP}=\text{մեծ } \overline{OP}: \qquad (1)$$

Նկատելով, որ

$$\text{մեծ } \overline{OA}=a, \ \text{մեծ } \overline{OP}=x, \ \text{մեծ } \overline{AP}=\text{մեծ } \overline{O_1P_1}=X,$$

(1) հավասարությունը կգրենք այսպես՝

$$a+X=x, \ \text{կամ՝} \ x=X+a: \qquad (2)$$

Նմանապես, M *և* O_1 *կետերը պրոյեկտելով օրդինատների առանցքների վրա, կստանանք՝*

$$y=Y+b: \qquad (3)$$

Ուրեմն՝ հին կոորդինատը հավասար է նորին՝ գումարած նոր սկզբնակետի կոորդինատը հին սիստեմի նկատմամբ:

(2) և (3) բանաձևերից կարելի է նոր կոորդինատներն արտահայտել հների միջոցով՝

$$X=x-a, \qquad (2')$$

$$Y=y-b: \qquad (3')$$

§ 3. Կոորդինատային առանցքների պտտումը: *Դիցուք տրված են երկու դեկարտյան կոորդինատային սիստեմներ միևնույն* O *սկզբնակետով և առանցքների տարբեր ուղղություններով (գծ. 70)։ Դիցուք* α*-ն* Ox *և* OX *առանցքներով կազմված անկյունն է։ Կամայական* M *կետի կոորդինատները հին սիստեմի նկատմամբ նշանակենք* x *և* y*, իսկ նոր սիստեմի նկատմամբ՝* X *և* Y*, այն է՝*

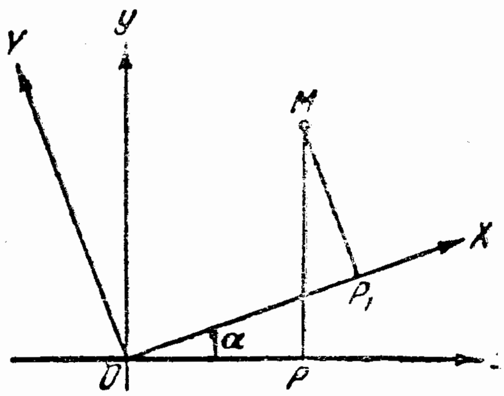
$$x=\text{մեծ}\ \overline{OP},\quad y=\text{մեծ}\ \overline{PM},\quad X=\text{մեծ}\ \overline{OP_1},\quad Y=\text{մեծ}\ \overline{P_1M}:$$

Դիտարկենք $\overline{OP_1MP}$ *բեկյալը և վերցնենք նրա պրոյեկցիան* Ox *առանցքի վրա։ Հիշելով, որ բեկյալի պրոյեկցիան հավասար է փակող հատվածի պրոյեկցիային (գլ. I, § 8), կունենանք՝*

$$\text{պր}\ \overline{OP_1MP}=\text{մեծ}\ \overline{OP}: \tag{4}$$

Մյուս կողմից, բեկյալի պրոյեկցիան հավասար է նրա հատվածների պրոյեկցիաների գումարին (գլ. I, § 8), հետևաբար, (4) հավասարությունը կգրվի այսպես՝

$$\text{պր}\ \overline{OP_1}+\text{պր}\ \overline{P_1M}+\text{պր}\ \overline{MP}=\text{մեծ}\ \overline{OP}\text{։} \tag{4'}$$



Գծ. 70

Քանի որ ուղղությամբ օժտված հատվածի պրոյեկցիան հավասար է իր մեծությանը՝ բազմապատկած պրոյեկցիաների առանցքով և այն առանցքով կազմված անկյան կոսինուսով, որի վրա գտնվում է տված հատվածը (գլ. I, § 8), ուստի՝

$$\text{պր}\ \overline{OP_1}=X\cos\alpha,$$

$$\text{պր}\ \overline{P_1M}=Y\cos(90^\circ+\alpha)=-Y\sin\alpha,$$

$$\text{պր}\ \overline{MP}=0\text{։}$$

Տեղադրելով (4′) հավասարության մեջ, կստանանք՝

$$x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha\text{։} \tag{5}$$

Նման ձևով, նույն բեկյալը պրոյեկտելով Oy *առանցքի վրա, կստանանք բանաձև* y*-ի համար։ Իսկապես, ունենք*

$$\text{պր}\overline{OP_1}+\text{պր}\overline{P_1M}+\text{պր}\overline{MP}=\text{պր}\overline{OP}=0\text{։}$$

Նկատելով, որ՝

468—9

$$պր\,\overline{OP_1}=X\cos(\alpha-90^\circ)=X\sin\alpha,$$

$$պր\,\overline{P_1M}=Y\cos\alpha,\quad պր\,\overline{PM}=-y,$$

կունենանք՝

$$X\sin\alpha+Y\cos\alpha-y=0,$$

կամ՝

$$y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha։\tag{6}$$

(5) և (6) բանաձևերից կստանանք X *և* Y *նոր կոորդինատները՝ արտահայտված հին կոորդինատներով, եթե լուծենք (5) և (6) հավասարումները* X*-ի և* Y*-ի նկատմամբ։*

Դ ի տ ո ղ ու թ յ ու ն։ (5) և (6) բանաձևերը կարելի է նաև այլ կերպ ստանալ։ 71-րդ գծագրից ունենք՝

$$x=OP=OM\cos(\alpha+\varphi)=OM\cos\alpha\cos\varphi-OM\sin\alpha\sin\varphi,$$

$$y=PM=OM\sin(\alpha+\varphi)=OM\sin\alpha\cos\varphi+OM\cos\alpha\sin\varphi։$$

Քանի որ (գլ. I, § *21)*

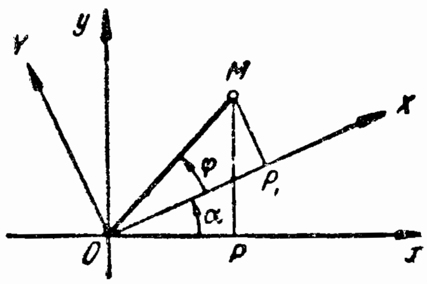
$$OM\cos\varphi=X,\quad OM\sin\varphi=Y,$$

ապա՝

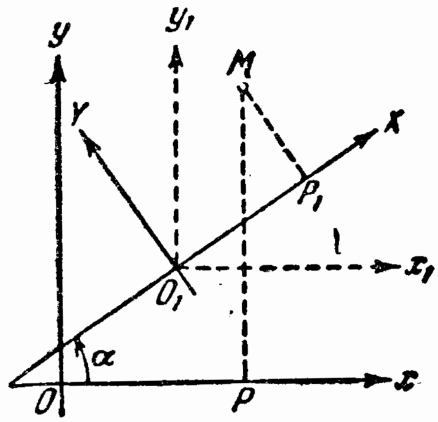
$$x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha,\tag{5}$$

$$y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha։\tag{6}$$

§ **4. Ընդհանուր դեպքը։** *Դիցուք տրված են երկու դեկարտյան կոորդինատային սիստեմներ՝ տարբեր սկզբնակետերով և առանցքների տարբեր ուղղություններով (գծ. 72)։ Նոր* O_1 *սկզբնա-*



գծ. 71



գծ. 72

կետի կոորդինատները հին սիստեմի նկատմամբ նշանակենք՝ a, b, *կոորդինատային առանցքների պտտման անկյունը՝* α, *կամայական* M *կետի կոորդինատները հին սիստեմի նկատմամբ՝* x, y, *իսկ նոր սիստեմի նկատմամբ՝* X, Y։

Որպեսզի x-ն ու y-ն արտահայտենք X-ի ու Y-ի միջոցով, մտցնենք $x_1O_1y_1$ օժանդակ կոորդինատային սիստեմը, որի սկզբնակետն ընդունենք O_1 նոր սկզբնակետում, իսկ առանցքների ուղղությունները պահպանենք: Դիցուք x_1-ը և y_1-ը M կետի կոորդինատներն են այդ օժանդակ սիստեմի նկատմամբ:

Նախ կոորդինատների հին սիստեմից անցնելով օժանդակ սիստեմին, կունենանք (§ 2)՝

$$x = x_1 + a, \quad y = y_1 + b:$$

Այնուհետև, օժանդակ սիստեմից անցնելով նոր սիստեմին, կունենանք՝

$$x_1 = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,$$

$$y_1 = X\sin\alpha + Y\cos\alpha:$$

Այստեղից x_1-ի և y_1-ի արժեքները տեղադրելով նախորդ բանաձևերի մեջ, վերջնականապես կստանանք՝

$$\left.\begin{array}{l} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha + a, \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha + b: \end{array}\right\} \quad (I)$$

Այս բանաձևերը որպես մասնավոր դեպքեր պարունակում են § 2-ի և § 3-ի բանաձևերը: Այսպես, $\alpha = 0$ դեպքում (I) բանաձևերը դառնում են՝

$$x = X + a, \quad y = Y + b,$$

իսկ $a = b = 0$ դեպքում՝

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,$$

$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha:$$

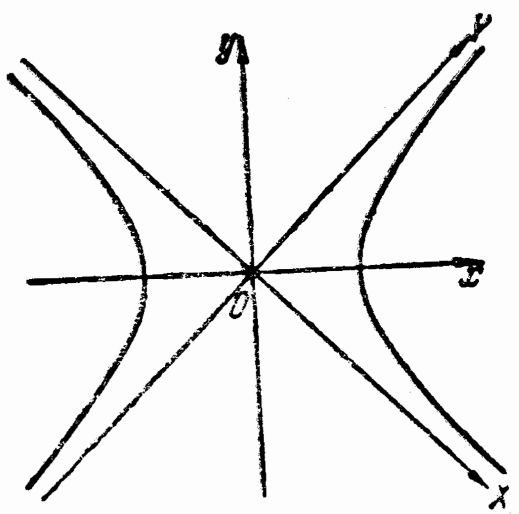
(I) բանաձևերից կստանանք X և Y նոր կոորդինատները՝ արտահայտված x և y հին կոորդինատներով, եթե լուծենք (I) հավասարումները X-ի և Y-ի նկատմամբ:

Նշենք (I) բանաձևերի մի շատ կարևոր հատկություն՝ նրանք գծային են X-ի և Y-ի նկատմամբ, այսինքն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$x = AX + BY + C, \quad y = A_1X + B_1Y + C_1:$$

Հեշտ է ստուգել, որ X և Y նոր կոորդինատները x և y հին կոորդինատներով կարտահայտվեն նույնպես այնպիսի բանաձևերի միջոցով, որոնք առաջին աստիճանի են x-ի և y-ի նկատմամբ:

§ 5. Կոորդինատների ձևափոխման բանաձևերի մի քանի կիրառումներ: *1. Հավասարասրուն հիպերբոլի հավասարումն ասիմպտոտների նկատմամբ:*



Գծ. 73

Դիտարկենք իր սիմետրիայի առանցքների նկատմամբ գրված հավասարասրուն հիպերբոլ՝

$$x^2-y^2=a^2\text{։}$$

Նրա ասիմպտոտներն իրար ուղղահայաց են (ասիմպտոտների անկյունային գործակիցները հավասար են՝ 1-ի և —1-ի, տե՛ս գլ IV, § 4)։

Դրանք ընդունելով որպես նոր կոորդինատային առանցքներ, մենք պետք է կոորդինատային հին առանցքները պտտենք $\pm 45^\circ$ անկյունով։ Կոորդինատների ձևափոխման

$$x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha,\quad y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha$$

բանաձևերը $\alpha=-45^\circ$ դեպքում (պտտում ժամացույցի սլաքի շարժման ուղղությամբ) կընդունեն հետևյալ տեսքը՝

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y),\quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}(Y-X)\text{։}$$

x-ի և y-ի այս արժեքները տեղադրելով հիպերբոլի $x^3-y^2=a^2$ *հավասարման մեջ, կստանանք՝*

$$\frac{1}{2}(X+Y)^2-\frac{1}{2}(Y-X)^2=a^2\text{։}$$

Փակագծերը բացելով և նման անդամների միացում կատարելով, կստանանք՝

$$2XY=a^2,\ \text{կամ՝}\ XY=\frac{a^2}{2}\text{։} \qquad (7)$$

Հենց սա էլ հավասարասրուն հիպերբոլի հավասարումն է, երբ որպես կոորդինատային առանցքներ ծառայում են նրա ասիմպտոտները *(գծ. 73)։*

Ընթերցողին հանձնարարվում է ստուգել, որ, պտտման անկյունն ընտրելով $\alpha=+45^\circ$, *հավասարասրուն հիպերբոլի հավասարումը կստանանք հետևյալ տեսքով՝*

$$XY = -\frac{a^2}{2}։$$

2. Կոտորակա-գծային ֆունկցիայի երկրաչափական իմաստը։ Տրված է հետևյալ հավասարումը՝

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}։$$

Պահանջվում է հետազոտել այս հավասարումով որոշվող կորը[1]։

Մենք կընդունենք, որ $c \neq 0$, քանի որ $c=0$ դեպքում տված հավասարումը, ակներևորեն, կլինի ուղիղի հավասարում։ Համարիչն ու հայտարարը բաժանելով c-ի վրա, հավասարումը կգրենք հետևյալ տեսքով՝

$$y = \frac{\alpha x+\beta}{x+\delta},$$

որտեղ նշանակված են՝

$$\alpha = \frac{a}{c},\ \beta = \frac{b}{c},\ \delta = \frac{d}{c}։$$

Նախ կորի հավասարումը պարզեցնենք, կոորդինատների սկզբնակետը տեղափոխելով հարթության մի այլ կետ։ Թող նոր սկզբնակետի x_0, y_0 կոորդինատներն առայժմ կամայական լինեն։ Կոորդինատների ձևափոխման բանաձևերը կլինեն՝

$$x = X + x_0, \quad y = Y + y_0։$$

Տրված հավասարման մեջ x-ի և y-ի փոխարեն դնենք այս արտահայտությունները, կգտնենք՝

$$(X + x_0 + \delta)(Y + y_0) = \alpha(X + x_0) + \beta։$$

Փակագծերը բացենք և նման անդամների միացում կատարենք՝

$$XY + (y_0 - \alpha)X + (x_0 + \delta)Y + (x_0 y_0 - \alpha x_0 + \delta y_0 - \beta) = 0։$$

Քանի որ x_0-ն և y_0-ն կամայական են, ուստի նրանք այնպես ընտրենք, որպեսզի X և Y պարունակող անդամները վերանան։ Դրա համար պետք է $y_0 - \alpha = 0$ և $x_0 + \delta = 0$, որտեղից՝

$$x_0 = -\delta, \quad y_0 = \alpha։$$

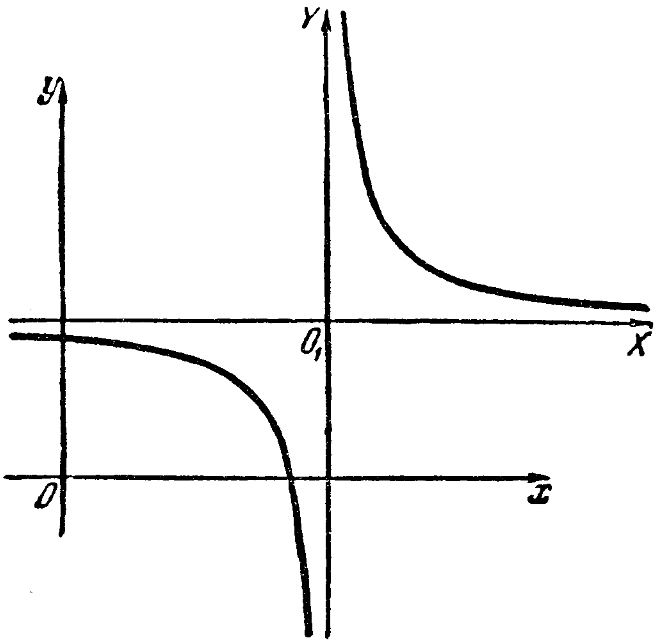
---

[1] Ենթադրում ենք, որ $ad - bc \neq 0$, քանի որ հակառակ դեպքում հավասարումն x փոփոխական չէր պարունակի։

Այս արժեքները տեղադրելով ձևափոխված հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$XY=\beta-\alpha\delta։$$

Ակներևաբար, ստացված հավասարումը հավասարաչափ հիպերբոլի հավասարում է կոորդինատների այն սիստեմի նկատմամբ, որի առանցքները հիպերբոլի ասիմպտոտներն են (տե՛ս նախորդ օրինակը)։ Հետևաբար, տված հավասարումը որոշում է մի հավասարաչափ հիպերբոլ, որի կենտրոնը (x_0, y_0) կետն է, իսկ ասիմպտոտները զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին (գծ. 74-ը համապատասխանում է $\beta-\alpha\delta>0$ դեպքին)։



Գծ. 74

3. Քառակուսային ֆունկցիայի երկրաչափական իմաստը։

Տրված է հետևյալ հավասարումը՝

$$y=ax^2+bx+c։$$

Պահանջվում է հետազոտել այս հավասարումով որոշվող կորը։

Նախ պարզեցնենք կորի հավասարումը, կոորդինատների սկզբնակետը տեղափոխելով հարմարության մի այլ կետ։ Կոորդինատների նոր սկզբնակետի x_0, y_0 կոորդինատները թող առայժմ կամայական լինեն։ Կոորդինատների ձևափոխման բանաձևերը կլինեն՝

$$x=X+x_0, \quad y=Y+y_0։$$

x-ի և y-ի այս արտահայտությունները տեղադրելով տրված հավասարման մեջ, կունենանք՝

$$Y+y_0=a(X+x_0)^2+b(X+x_0)+c։$$

Փակագծերը բացենք և նման անդամների միացում կատարենք,

$$Y=aX^2+(2ax_0+b)X+(ax_0^2+bx_0+c-y_0)։$$

x_0 և y_0 կամայական թվերն ընտրենք այնպես, որպեսզի վերանան X-ի առաջին աստիճան պարունակող անդամը և ազատ անդամը։ Դրա համար պետք է՝

$$2ax_0+b=0, \quad ax_0^2+bx_0+c-y_0=0,$$

որտեղից[1]

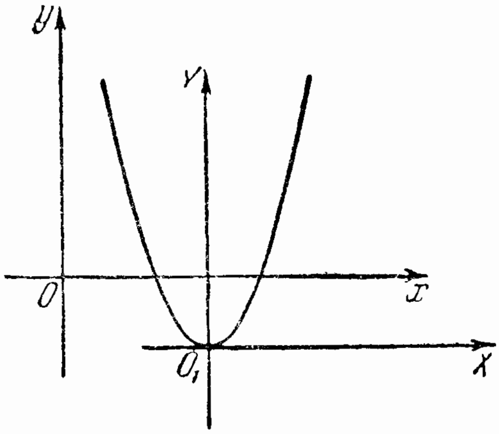
$$x_0=-\frac{b}{2a}, \quad y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Այս արժեքները տեղադրելով ձևափոխված հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$Y=aX^2.$$

Ակներևաբար այս հավասարումը որոշում է մի պարաբոլ, որի գագաթը կոորդինատների նոր սկզբնակետն է, իսկ սիմետրիայի առանցքը՝ օրդինատների նոր առանցքը։ Հետևաբար, տրված հավասարումը որոշում է մի պարաբոլ, որի գագաթը (x_0, y_0) կետն է, իսկ սիմետրիայի առանցքը զուգահեռ է Oy առանցքին (գծ. 75)։

Այդ պարաբոլի գագաթը գտնելու համար կարևոր է ուշադրություն դարձնել միայն այն հանգամանքի վրա, որ $x_0=-\frac{b}{2a}$, իսկ $y_0=f(x_0)$ օրդինատը կգտնվի x_0-ի այս արժեքը տեղադրելով կորի հավասարման մեջ։



Գծ. 75

Հաճախ օգտակար է լինում $y=ax^2+bx+c$ կորը կառուցելու համար գտնել նաև Ox առանցքի հետ նրա հատման կետերը (ընդունելով $y=0$), եթե միայն այդպիսի կետեր կան, այսինքն՝ եթե $ax^2+bx+c=0$ քառակուսի հավասարման արմատներն իրական են։ Նկատենք նաև, որ $a>0$ դեպքում պարաբոլի ճյուղերն ուղղված են դեպի վեր, իսկ $a<0$ դեպքում՝ դեպի վար։

Մեր հետազոտման ընթացքում մենք համարում էինք $a \neq 0$, իսկ $a=0$ դեպքում մեր հավասարումը կունենա

$$y=bx+c$$

տեսքը և, հետևաբար, նրան կհամապատասխանի ուղիղ գիծ։

[1] $a \neq 0$, հակառակ դեպքում տրված ֆունկցիան կլիներ գծային և ոչ թե քառակուսային։

Օ ր ի ն ա կ։ *Պարաբոլի* $y=3x^2-6x-1$ *հավասարումը բերել պարզագույն տեսքի և գտնել գագաթի կոորդինատները։*

Կոորդինատների սկզբնակետը տեղափոխենք (x_0, y_0) *կետը։ Կոորդինատների ձևափոխման բանաձևերը կլինեն՝*

$$x=X+x_0,\quad y=Y+y_0։$$

Տեղադրելով տրված հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$Y+y_0=3(X+x_0)^2-6(X+x_0)-1,$$

կամ՝

$$Y=3X^2+(6x_0-6)X+3x_0^2-6x_0-1-y_0։$$

Ընդունելով՝

$$6x_0-6=0,$$

$$3x_0^2-6x_0-1-y_0=0,$$

կգտնենք՝

$$x_0=1,\quad y_0=-4։$$

Այս արժեքները դնելով տված հավասարման մեջ, կունենանք՝

$$Y=3X,$$

որտեղից կստանանք պարաբոլի պարզագույն հավասարումը՝

$$X^2=\frac{1}{3}Y։$$

Այս պարաբոլի սիմետրիայի առանցքն OY *առանցքն է, այսինքն՝ զուգահեռ է* Oy *առանցքին, իսկ գագաթը գտնվում է նոր սկզբնակետում, այսինքն՝ (1, —4) կետում։*

§ 6. Երկրորդ աստիճանի ընդհանուր հավասարման ձևափոխումը, երբ այն չի պարունակում փոփոխականների արտադրյալը։ *Երկու փոփոխականների միջև 2-րդ աստիճանի ընդհանուր հավասարումը, որը չի պարունակում փոփոխականների արտադրյալը, ունի հետևյալ տեսքը՝*

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{8}$$

որտեղ A *և* C *գործակիցները միաժամանակ հավասար չեն զրոյի, քանի որ, հակառակ դեպքում, հավասարումը կլիներ 1-ին աստիճանի։*

Տեսնենք, թե գործակիցների տարբեր արժեքների դեպքում այդ հավասարումով ինչպիսի՞ կորեր են որոշվում։

Դ ե պ ք I։ x^2*-ու և* y^2*-ու գ ո ր ծ ա կ ի ց ն ե ր ն ունեն նույն նշանը։ Կարելի է այդ գործակիցները դրական համարել, քանի որ եթե նրանք բացասական լինեին, ապա, հավասարման երկու մասերը բազմապատկելով —1-ով, մենք նրանց* դրական կդարձնեինք։ (8) հավասարումը արտագրենք հետևյալ տեսքով՝

$$A\left(x^2+\frac{D}{A}x\right)+C\left(y^2+\frac{E}{C}y\right)+F=0։$$

Փակագծերի ներսի արտահայտությունները լրացնենք մինչև լրիվ քառակուսիներ դառնալը։ Դրա համար հավասարման ձախ և աջ մասերին ավելացնենք $\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}$, կստանանք՝

$$A\left(x^2+\frac{D}{A}x+\frac{D^2}{4A^2}\right)+C\left(y^2+\frac{E}{C}y+\frac{E^2}{4C^2}\right)=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F,$$

կամ՝

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4AC}։ \qquad (9)$$

Կոորդինատների սկզբնակետը տեղափոխենք $O_1\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$ կետը։ Այդ դեպքում, § 2-ի (2') և (3') բանաձևերի համաձայն, կունենանք՝

$$X=x+\frac{D}{2A} \quad \text{և} \quad Y=y+\frac{E}{2C},$$

որտեղ X-ն ու Y-ը նոր կոորդինատներն են։ (9) հավասարման աջ մասը նշանակենք U-ով՝

$$U=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4AC},$$

որից հետո հավասարումը կընդունի այսպիսի տեսք՝

$$AX^2+CY^2=U։ \qquad (10)$$

Դիցուք $U>0$. (10) հավասարման երկու մասերը բաժանելով U-ի վրա, կստանանք՝

$$\frac{A}{U}X^2+\frac{C}{U}Y^2=1։$$

Նշանակելով՝ $\frac{A}{U}=\frac{1}{a^2}$ և $\frac{C}{U}=\frac{1}{b^2}$, որ հնարավոր է, քանի որ A-ն, C-ն և U-ն դրական են, վերջնականապես կունենանք՝

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1։$$

Սա էլիպսի հավասարում է։ Հետևաբար, տվյալ դեպքում (10) հավասարումը, նշանակում է նաև (8) հավասարումը որոշում է մի էլիպս (մասնավոր դեպքում, երբ $a=b$, *որոշում է շրջանագիծ)։ Այդ էլիպսի կենտրոնն ունի* $-\dfrac{D}{2A}$ *և* $-\dfrac{E}{2C}$ *կոորդինատները (xOy սիստեմում), առանցքները զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին։*

Եթե $U=0$, *ապա (10) հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը՝*

$$AX^2+BY^2=0։$$

Այս հավասարումը միայն մի կետ է որոշում՝ $X=0$, $Y=0$, *քանի որ փոփոխականների ամեն մի այլ արժեքների դեպքում հավասարման ձախ մասը դրական կլինի։ Վերադառնալով (8) հավասարմանը, տեսնում ենք, որ նրան բավարարում են միայն* $O_1\left(-\dfrac{D}{2A},\ -\dfrac{E}{2C}\right)$ *կետի կոորդինատները։*

Վերջապես, եթե $U<0$, *ապա (10) հավասարման աջ մասը բացասական է, մինչդեռ ձախ մասի երկու անդամներն էլ ո՛չ բացասական են X-ի և Y-ի ցանկացած արժեքների դեպքում։ Հետևաբար, ոչ մի կետ չկա, որի կոորդինատները բավարարեին (10), կնշանակի նաև (8) հավասարմանը։ Այս դեպքում հավասարումը ոչ մի գիծ չի որոշում։*

Օ ր ի ն ա կ։ Պարզեցնել հետևյալ կորի հավասարումը և որոշել նրա տեսքը՝

$$4x^2+9y^2+32x-54y+109=0։$$

Հավասարումն արտագրենք այսպես՝

$$4\,(x^2+8x)+9\,(y^2-6y)=-109։$$

Փակագծերի ներսի արտահայտությունները լրացնելով մինչև լրիվ քառակուսիներ դառնալը, կստանանք՝

$$4\,(x^2+8x+16)+9(y^2-6y+9)=64+81-109,$$

կամ, ձևափոխություններից հետո՝

$$\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1։$$

Կոորդինատների սկզբնակետը տեղափոխենք՝ $O_1\,(-4{,}3)$ *կետը և նշանակենք՝* $X=x+4$, $Y=y-3$, *կունենանք՝*

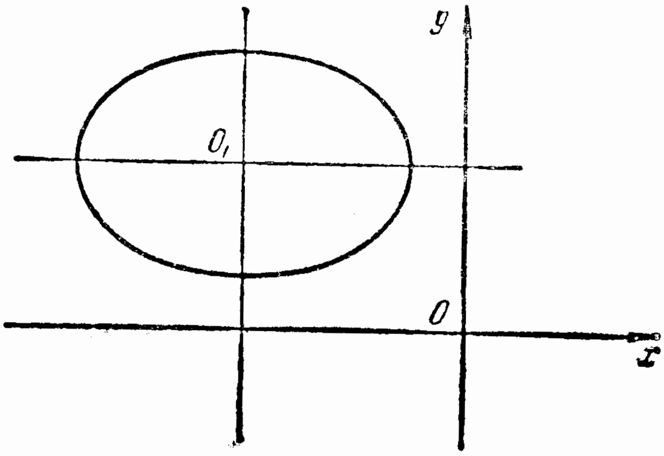
$$\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1։$$

Սա էլիպսի հավասարում է։ կենտրոնը գտնվում է $(-4, 3)$ կետում, իսկ կիսաառանցքները հավասար են 3-ի և 2-ի (գծ. 76)։

Նկատենք, որ սովորաբար հարկ չկա էլիպսի հավասարումը գրել XOY կոորդինատային սիստեմի նկատմամբ։ Ավելի լավ է այն թողնել

$$\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$$

տեսքով, որտեղ անմիջապես երևում են էլիպսի կենտրոնի կոորդինատները։



Գծ. 76

Դեպք II։ *(8) հավասարման* A *և* C *գործակիցները տարբեր նշաններ ունեն։ Որոշակիության համար ընդունենք, որ* $A>0$, *իսկ* $C<0$։ *Ինչպես և* I *դեպքում (8) հավասարումը բերենք հետևյալ տեսքին՝*

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4AC}։ \qquad (11)$$

Կոորդինատների սկզբնակետը տեղափոխենք $O_1\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$ *կետը և (11) հավասարման աջ մասը նշանակենք* U*-ով, որից հետո (11) հավասարումը* XOY *կոորդինատային սիստեմում կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$AX^2+CY^2=U, \qquad (12)$$

որտեղ՝

$$X=x+\frac{D}{2A}, \quad Y=y+\frac{E}{2C}։$$

Դիցուք $U\neq 0$։ *(12) հավասարման երկու մասերը բաժանելով* U*-ի վրա, կստանանք՝*

$$\frac{A}{U}X^2+\frac{C}{U}Y^2=1։$$

Եթե $U>0$, *կարելի է կատարել հետևյալ նշանակումները՝*

$$\frac{A}{U}=\frac{1}{a^2}, \quad \frac{C}{U}=-\frac{1}{b^2}$$

(հիշենք, որ, պայմանի համաձայն, $A>0$, $C<0$*), որից հետո հավասարումն այսպիսի տեսք կընդունի՝*

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1։$$

Սա հիպերբոլի հավասարում է, որի իրական առանցքը գտնվում է O_1X *առանցքի վրա, իսկ կեղծ առանցքը՝* O_1Y *առանցքի վրա։*

Իսկ եթե $U<0$*, ապա, նշանակելով՝*

$$\frac{A}{U}=-\frac{1}{a^2},\quad \frac{C}{U}=\frac{1}{b^2},$$

կստանանք հետևյալ հավասարումը՝

$$-\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1, \text{ կամ՝ } \frac{Y^2}{b^2}-\frac{X^2}{a^2}=1։$$

Սա նույնպես հիպերբոլի հավասարում է, միայն թե սրա իրական առանցքը գտնվում է O_1Y *առանցքի վրա, իսկ կեղծ առանցքը՝* O_1X *առանցքի վրա։*

Այսպես, ուրեմն, (8) հավասարումն այս դեպքում որոշում է հիպերբոլ, որի կենտրոնը գտնվում է $\left(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2C}\right)$ *կետում, իսկ իրական առանցքը զուգահեռ կլինի* Ox *կամ* Oy *առանցքին՝ կախված* U*-ի նշանից։*

Դիցուք այժմ $U=0$*։ Այս դեպքում (12) հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$AX^2+CY^2=0։$$

Նշանակելով $A=m^2$, $C=-n^2$*, այն կարտագրենք այսպես՝*

$$m^2X^2-n^2Y^2=0,$$

կամ՝

$$(mX+nY)(mX-nY)=0։$$

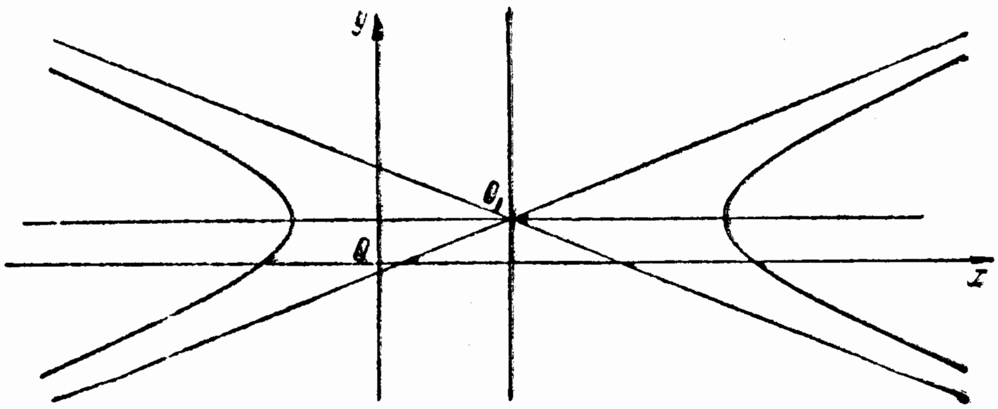
Սակայն, այս հավասարումը տրոհվում է երկու առաջին աստիճանի հավասարումների՝

$$mX+nY=0 \text{ և } mX-nY=0,$$

որոնցից յուրաքանչյուրը մի ուղիղի հավասարում է, որն անցնում է $X=0$, $Y=0$ *կետով, այսինքն՝* O_1 *կետով։*

Այսպիսով, $U=0$ *դեպքում (12) հավասարումը, հետևաբար նաև (8) հավասարումը որոշում է մի զույգ հատվող ուղիղներ։*

Ինչպես ընդունված է ասել, կորը տրոհվում է մի զույգ ուղիղների:



Գծ. 77

Օ ր ի ն ա կ 1։ *Պարզեցնել հետևյալ կորի հավասարումը և որոշել նրա տեսքը՝*

$$4x^2-25y^2-24x+50y-89=0։$$

Հավասարումն արտագրենք այսպես՝

$$4(x^2-6x)-25(y^2-2y)=89$$

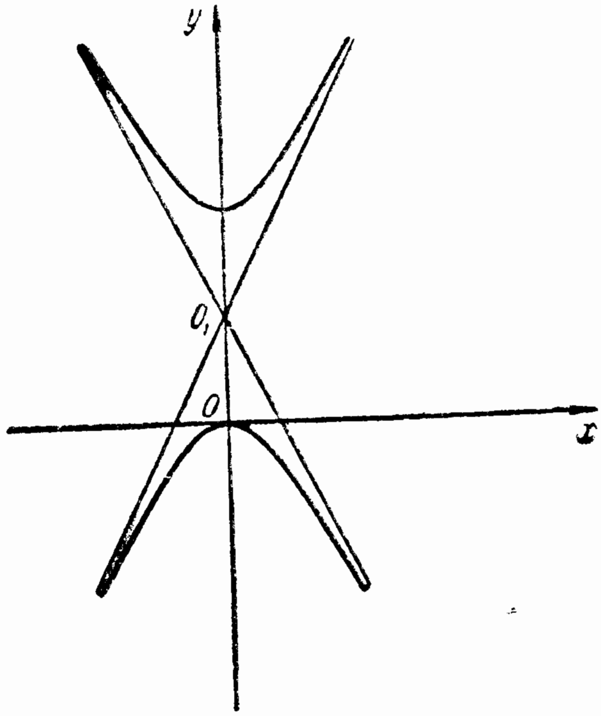
և փակագծերի ներսի արտահայտությունները լրացնենք մինչև լրիվ քառակուսի դառնալը՝

$$4(x^2-6x+9)-25(y^2-2y+1)=$$
$$=89+36-25։$$

Ձևափոխություններից հետո կըստանանք՝

$$\frac{(x-3)^2}{25}-\frac{(y-1)^2}{4}=1։$$

Սա հիպերբոլի հավասարում է, որի կենտրոնը գտնվում է (3,1) կետում։ (Ինչպես արդեն նշել ենք, հարկ չկա անցնելու XOY կոորդինատային սիստեմին։) Իրական կիսառանցքը հավասար է 5-ի, իսկ կեղծ կիսառանցքը՝ 2-ի։ Այս հիպերբոլի դասավորվածությունն առանցքների նկատմամբ ցույց է տրված 77-րդ գծագրում։



Գծ. 78

Օ ր ի ն ա կ 2։ *Պարզեցնել հետևյալ կորի հավասարումը և որոշել նրա տեսքը՝*

$$4x^2-y^2+4y=0։$$

Հավասարումը ձևափոխենք՝

$$4x^2-(y-2)^2=-4,$$

կամ՝

$$\frac{(y-2)^2}{4}-x^2=1։$$

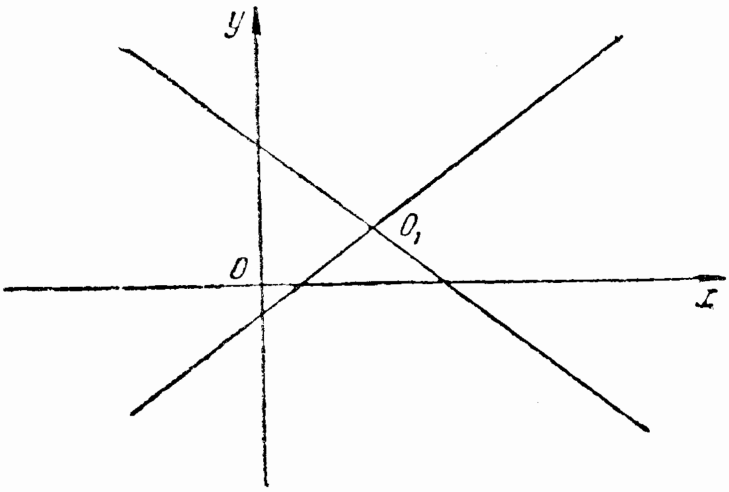
Սա հիպերբոլի հավասարում է, որի կենտրոնը գտնվում է (0,2) կետում, իրական կիսաառանցքը հավասար է 2-ի, իսկ կեղծ կիսաառանցքը՝ 1-ի։ Հիպերբոլի դասավորվածությունն առանցքների նկատմամբ ցույց է տրված 78-րդ գծագրում։ Քանի որ հավասարումն ազատ անդամ չունի, ուստի հիպերբոլն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով։

Օ ր ի ն ա կ 3։ Պարզեցնել հետևյալ կորի հավասարումը և որոշել նրա տեսքը՝

$$9x^2-16y^2-36x+32y+20=0։$$

Հավասարումն արտագրենք այսպես՝

$$9(x^2-4x)-16(y^2-2y)=-20։$$



Գծ. 79

Ձևափոխությունից հետո կստանանք՝ $9(x-2)^2-16(y-1)^2=0։$

Ձախ մասն արտադրյալի տեսքով ներկայացնելով՝

$$[3(x-2)+4(y-1)]\,[3(x-2)-4(y-1)]=0,$$

տեսնում ենք, որ տված երկրորդ աստիճանի հավասարումը տրոհվում է երկու առաջին աստիճանի հավասարումների՝

$$3x+4y-10=0 \quad \text{և} \quad 3x-4y-2=0։$$

Ստացանք երկու ուղիղներ, որոնք հատվում են (2, 1) կետում (տե՛ս գծ. 79)

Դ ե պ ք III։ (8) *հ ա վ ա ս ա ր մ ա ն* C *գ ո ր ծ ա կ ի ց ը հ ա վ ա ս ա ր է զ ր ո յ ի* ($A\neq0$)։ Այս դեպքում (8) հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$Ax^2+Dx+Ey+F=0։ \tag{13}$$

Ընդունելով, որ $E\neq0$, լուծենք y-ի նկատմամբ՝

$$y=-\frac{A}{E}x^2-\frac{D}{F}x-\frac{F}{E}։$$

Նշանակելով՝

$$-\frac{A}{E}=a, \quad -\frac{D}{E}=b, \quad -\frac{F}{E}=c,$$

հավասարումը կգրենք հետևյալ տեսքով՝

$$y=ax^2+bx+c: \qquad (14)$$

Այնուհետև կատարենք հետևյալ ձևափոխությունները՝

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+c,$$

կամ՝

$$y-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2:$$

Կոորդինատների սկզբնակետը տեղափոխելով $O_1\left(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a}\right)$ կետը և նշանակելով՝

$$X=x+\frac{b}{2a}, \quad Y=y-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right),$$

կստանանք՝

$$Y=aX^2,$$

որը պարաբոլի հավասարում է: Այս պարաբոլի գագաթը գտնըվում է O_1 կետում, իսկ սիմետրիայի առանցքը գտնվում է O_1Y առանցքի վրա և, հետևաբար, զուգահեռ է սկզբնական Oy առանցքին:

Նկատենք, որ (14) հավասարումը մենք դիտարկել էինք § 5-ում, որտեղ նրա պարզագույն տեսքի բերելը կատարվել էր այլ եղանակով:

Եթե (13) հավասարման մեջ $F=0$, այն կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$Ax^2+Dx+F=0, \qquad (15)$$

այսինքն՝ կպարունակի միայն մեկ փոփոխական՝ x-ը:

Դիցուք α_1-ը և α_2-ը այդ հավասարման արմատներն են: Այդ դեպքում (15) հավասարումը կգրվի այսպես՝

$$A(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)=0:$$

Փակագծերից յուրաքանչյուրը հավասարեցնելով զրոյի, կստանանք առաջին աստիճանի երկու հավասարում՝

$$x-\alpha_1=0 \text{ և } x-\alpha_2=0:$$

Եթե α_1 և α_2 արմատներն իրական են, ապա հավասարումներից յուրաքանչյուրը Oy *առանցքին զուգահեռ մի ուղիղ է ($\alpha_1=\alpha_2$ դեպքում երկու ուղիղները համընկնում են)։ Այդպիսի դեպքում ասում են, որ երկրորդ աստիճանի հավասարումով որոշվող* կորը տրոհվել է մի զույգ զուգահեռ ուղիղների:

Իսկ եթե α_1 և α_2 արմատները կեղծ են, ապա Ax^2+Dx+F *եռանդամը x-ի ոչ մի իրական արժեքի դեպքում զրո չի դառնում և, հետևաբար, ոչ մի կետ չկա, որի կոորդինատները բավարարեին (15) հավասարմանը։*

Հասկանալի է, որ մեր հետազոտության ընթացքը չի փոխվի նաև այն դեպքում, երբ $A=0$, $C\neq0$։

Օրինակ։ Պարզեցնել հետևյալ կորի հավասարումը և որոշել նրա տեսքը՝

$$4y^2+8y-2x-1=0։$$

Հավասարումը լուծենք x-ի նկատմամբ՝

$$x=2y^2+4y-\frac{1}{2}$$

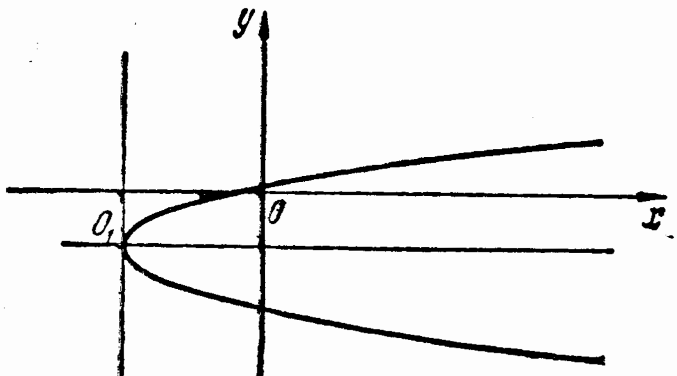
այն ձևափոխենք այսպես՝

$$x=2(y^2+2y+1)-\frac{5}{2},$$

կամ՝

$$x+\frac{5}{2}=2(y+1)^2։$$

Այս պարաբոլի հավասարում է, որի գագաթը գտնվում է $\left(-\frac{5}{2}, -1\right)$ *կետում, սիմետրիայի առանցքը զուգահեռ է* Ox *առանցքին, ճյուղերն ուղղված են դեպի աջ (տե՛ս գծ. 80)։*



Գծ. 80.

§ 7. Երկրորդ աստիճանի ընդհանուր հավասարման ձևափոխումը: *Այժմ դիտարկենք x և y փոփոխականների միջև երկրորդ աստիճանի ընդհանուր հավասարումը՝*

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \qquad (16)$$

ընդունելով, որ $B\neq0$

Ամենից առաջ ցույց տանք, որ կոորդինատային առանցքների պտտման միջոցով այդ հավասարումը կարելի է բերել այնպիսի տեսքի, որը չի պարունակում փոփոխականների արտադրյալը։

Կոորդինատային առանցքները պտտենք մի α անկյունով, որը կորոշենք հետագայում։

Ինչպես հայտնի է, կոորդինատների ձևափոխման բանաձևերն են՝

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,$$
$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha\text{։}$$

Տրված (16) հավասարման մեջ x-ն ու y-ը փոխարինելով իրենց այս արտահայտություններով, կստանանք՝

$$A(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)^2 + B(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)(X\sin\alpha + Y\cos\alpha) +$$
$$+ C(X\sin\alpha + Y\cos\alpha)^2 + D(X\cos\alpha - Y\sin\alpha) +$$
$$+ E(X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + F = 0\text{։}$$

Այստեղ փակագծերը բացելով և նման անդամների միացում կատարելով, կունենանք տրված գծի հավասարումը նոր կոորդինատներով այսպիսի տեսքով՝

$$A_1X^2 + B_1XY + C_1Y^2 + D_1X + E_1Y + F = 0,$$

որտեղ կրճատ նշանակված են՝

$$A_1 = A\cos^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha,$$
$$B_1 = 2(C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),$$
$$C_1 = A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha,$$
$$D_1 = D\cos\alpha + E\sin\alpha,$$
$$E_1 = -D\sin\alpha + E\cos\alpha\text{։}$$

Այժմ α անկյունն ընտրենք այնպես, որպեսզի B_1 գործակիցը զրո դառնա, այսինքն՝ որպեսզի

$$2(C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0\text{։} \qquad (17)$$

Հիշելով, որ

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \text{ և } \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha,$$

պտտման α անկյունը որոշող (17) հավասարումը կարտագրենք այսպես՝

$$(C - A)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0\text{։} \qquad (18)$$

Նկատենք, որ $\sin 2\alpha \neq 0$, քանի որ հակառակ դեպքում, ինչպես երևում է հենց (18) հավասարումից, զրո կդառնար նաև B-ն, որ կհակասեր պայմանին։ Հետևաբար, (18) հավասարումը կարելի է բաժանել $\sin 2\alpha$-ի վրա, որից հետո կստանանք՝

$$(C-A)+B\operatorname{ctg} 2\alpha=0,$$

որտեղից՝

$$\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{A-C}{B}. \qquad (19)$$

Այսպիսով, α անկյունը միշտ կարելի է այնպես ընտրել, որպեսզի կոորդինատային առանցքներն այդ անկյունով պտտելիս երկրորդ կարգի կորի հավասարման մեջ փոփոխականների արտադրյալը պարունակող անդամը վերանա։ α անկյունը մենք կընտրենք այնպես, որպեսզի $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$։

(19) բանաձևով ստանալով $\operatorname{ctg} 2\alpha$-ի արժեքը, այնուհետև կարող ենք օգտվել եռանկյունաչափությունից հայտնի

$$\cos 2\alpha=\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 2\alpha}}$$

բանաձևից (α-ն նշված միջակայքում ընտրելու շնորհիվ $\cos 2\alpha$-ն և $\operatorname{ctg} 2\alpha$-ն ունեն նույն նշանը), որից հետո $\sin\alpha$-ն ու $\cos\alpha$-ն կորոշենք

$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \quad \text{և} \quad \cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

հայտնի բանաձևերով։ Դրանով հնարավորություն կունենանք հաշվելու A_1, C_1, D_1, E_1 նոր գործակիցները։

Այդ բոլորի հետևանքով, գծի ձևափոխված հավասարումը կընդունի այսպիսի տեսք՝

$$A_1X^2+C_1Y^2+D_1X+E_1Y+F=0, \qquad (20)$$

որտեղ բոլոր գործակիցները հայտնի են։

Ստացված (20) հավասարման հետագա պարզեցումը կատարվում է § 6-ում նկարագրված եղանակներով։

Օրինակ։ Պարզեցնել հետևյալ հավասարումը՝

$$x^2+xy+y^2-3x-6y+3=0$$

և որոշել կորի տեսքը։

Կոորդինատային առանցքները պտտենք α անկյունով՝ $\operatorname{ctg} 2\alpha$-ն գտնելով (19) բանաձևով։ Տվյալ դեպքում $A=1$, $C=1$, $B=1$։ Հետևաբար՝

$$\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{1-1}{1}=0, \quad 2\alpha=90^\circ, \quad \alpha=45^\circ.$$

Քանի որ $\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, ուստի կոորդինատների ձևափոխման բանաձևերը կընդունեն այսպիսի տեսք՝

$$x=\frac{X-Y}{\sqrt{2}}, \qquad y=\frac{X+Y}{\sqrt{2}}։$$

x-ի և y-ի այս արտահայտությունները դնելով կորի տրված հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\cdot\frac{X+Y}{\sqrt{2}}+\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)^2-3\cdot\frac{X-Y}{\sqrt{2}}-6\cdot\frac{X+Y}{\sqrt{2}}+3=0։$$

Պարզեցումներ կատարելուց հետո կունենանք՝

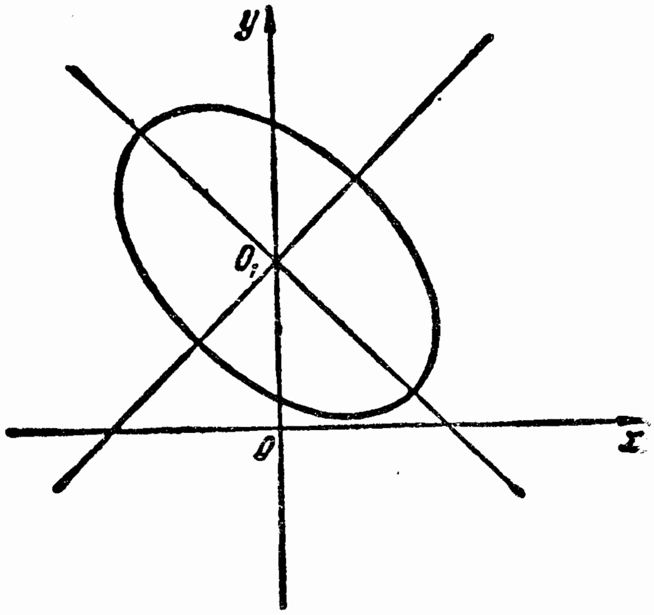
$$3X^2+Y^2-9\sqrt{2}\,X-3\sqrt{2}\,Y+6=0։$$

Ինչպես և պետք է սպասեինք, ստացված հավասարումը փոփոխականների արտադրյալ պարունակող անդամ չունի։ Հետագա պարզեցումները կատարելով, ինչպես այդ ցույց է տրված § 6-ում, կհանգենք հետևյալ հավասարմանը՝

$$3\left(X-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(Y-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2=12,$$

կամ՝

$$\frac{\left(X-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{4}+\frac{\left(Y-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{12}=1։$$



Գծ. 81

Այսպիսով, տրված հավասարումը ներկայացնում է էլիպս՝ 2 և $2\sqrt{3}$ կիսաառանցքներով (գծ. 81)։

Որպեսզի գտնենք այս էլիպսի կենտրոնի կոորդինատներն xoy սիստեմում, O_1 կետի $X=\frac{3}{\sqrt{2}}$ կոորդինատները տեղադրենք ձևափոխման բանաձևերի մեջ։ Կստանանք՝

$$x=\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=0, \qquad y=\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=3։$$

Ուրեմն, էլիպսի կենտրոնը գտնվում է (0,3) կետում։

§ 8. Գծերի դասակարգումը։ Քանի որ անալիտիկ երկրաչափության մեջ գծերը որոշվում են հավասարումներով, ուստի գծերի դասակարգման համար կարելի է հիմք ընդունել այդ գծերի հավասարումների հատկությունները։ Գծերի դասակարգման համար մենք հիմք կընդունենք նրանց հավասարումները դեկարտյան կոորդինատներով։ Հավասարման բոլոր անդամները տեղափոխելով ձախ մասը, նրան կարելի է այսպիսի տեսք տալ՝

$$F(x, y)=0, \tag{1}$$

որտեղ F-ը x, y երկու փոփոխականների ֆունկցիայի նշանն է։ Եթե (13) հավասարումը [այսինքն՝ F (x, y) ֆունկցիան] տրանսցենդենտ է, ապա նրանով որոշվող գիծը կոչվում է տրանսցենդենտ։ Իսկ եթե (13) հավասարումը հանրահաշվական է, ապա նրանով որոշվող գիծը նույնպես հանրահաշվական է կոչվում։

Օրինակ,

$$y=\sin x$$

հավասարումով որոշվող գիծը տրանսցենդենտ գիծ է, իսկ

$$x^3+y^3-3axy=0$$

հավասարումով որոշվող գիծը՝ հանրահաշվական գիծ է։

Սակայն միևնույն գիծը կարող է ներկայացվել անթիվ բազմությամբ հավասարումների միջոցով, նայած թե ինչ կոորդինատային սիստեմի նկատմամբ ենք գրում նրա հավասարումը։ Ուստի գծերը հանրահաշվական և տրանսցենդենտ դասերի բաժանելու նշված սկզբունքը արդարացնելու համար անհրաժեշտ է ցույց տալ, որ գծի հանրահաշվական կամ տրանսցենդենտ բնույթը կախված չէ կոորդինատային առանցքների դիրքից։ Եվ իսկապես, քանի որ կոորդինատների ձևափոխման բանաձևերը հանրահաշվական են, ուստի ամեն մի հանրահաշվական հավասարում կոորդինատների ամեն մի ձևափոխմամբ կբերվի նորից հանրահաշվական հավասարման։ Այստեղից արդեն երևում է, որ տրանսցենդենտ հավասարումն էլ կոորդինատների ամեն մի ձևափոխմամբ տրանսցենդենտ հավասարման կբերվի, քանի որ, եթե տրանսցենդենտ հավասարումը դառնար հանրահաշվական, ապա հակադարձ ձևափոխության միջոցով հանրահաշվական հավասարումն էլ տրանսցենդենտ կդառնար, որ, ինչպես տեսանք, հնարավոր չէ։

Այսպիսով, գծի (կամ, որ միևնույնն է, նրա հավասարման) հանրահաշվական կամ տրանսցենդենտ բնույթը կախված չէ կոորդինատային առանցքների ընտրությունից, այլ կախված է միայն իր՝ գծի հատկություններից։

Այնուհետև, ամեն մի հանրահաշվական հավասարում կարելի է արմատներից և կոտորակներից ազատել, եթե այդպիսիք այնտեղ կան։ Այսպիսով, հանրահաշվական գծի հավասարումը կարելի է բերել հետևյալ տեսքին՝

$$\sum Ax^sy^t=0,$$

որի ձախ մասը՝ Ax^sy^t տեսք ունեցող անդամների գումար է, որտեղ A-ն հաստատուն թիվ է, իսկ s-ը և t-ն՝ դրական ամբողջ թվեր են (կամ զրոներ)։ Կարճ ասած՝ հանրահաշվական գծի հավասարման ձախ մասը ամբողջ բազմանդամ է։

Բազմանդամի յուրաքանչյուր Ax^sy^t անդամն ունի որոշակի չափում, որը հավասար է x-ի և y-ի ցուցիչների $s+t$ գումարին։ Բոլոր անդամների չափումների մեջ ամենաբարձր չափումը կոչվում է այդ հավասարման աստիճան։

Եթե հանրահաշվական գիծը դեկարտյան կոորդինատներով որոշվում է n-րդ աստիճանի հավասարումով, ապա նա կոչվում է n-րդ կարգի գիծ։

Այսպես, նախորդ օրինակում մենք ունեինք 3-րդ կարգի գիծ։ Յուրաքանչյուր ուղիղ գծին դեկարտյան կոորդինատներով համապատասխանում է առաջին աստիճանի հավասարում, ուրեմն ուղիղ գիծն 1-ին կարգի գիծ է։ Շրջանագիծը, էլիպսը, հիպերբոլը և պարաբոլը 2-րդ կարգի գծեր են, որովհետև նրանց համապատասխանում են երկրորդ աստիճանի հավասարումներ դեկարտյան կոորդինատներով։

Որպեսզի հանրահաշվական գծերն այս եղանակով կարգերի բաժանելը օրինական լինի, անհրաժեշտ է ցույց տալ, որ այդպիսի բաժանումը կախված չէ կոորդինատային առանցքների ընտրությունից, այսինքն, որ գծի կարգը անփոփոխ է մնում կոորդինատների ամեն մի ձևափոխության ժամանակ։ Եվ իրոք, դեկարտյան կոորդինատները դեկարտյան կոորդինատների ձևափոխող բանաձևերը, ինչպես իր ժամանակին նշել ենք, կոորդինատների նկատմամբ առաջին աստիճանի են։ Հետևաբար, n-րդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարման մեջ x-ն ու y-ը փոխարինելով X-ի ու Y-ի նկատմամբ առաջին աստիճանի արտահայտություններով, մենք չենք կարող հավասարման աստիճանը բարձրացնել, այսինքն՝ նոր ստացված հավասարման աստիճանը նշանակելով n', կունենանք՝

$$n' \leqslant n\text{։} \qquad (14)$$

Մյուս կողմից, հակադարձ ձևափոխության միջոցով n' աստիճանի նոր հավասարումից կանցնենք n աստիճանի հին հավասարմանը և, քանի որ հավասարման աստիճանը այժմ ևս չպետք է բարձրանա, ապա պետք է լինի՝

$$n \leqslant n' : \qquad (15)$$

Այս երկու հավասարումները բաղդատելով, եզրակացնում ենք, որ $n=n'$, այսինքն՝ հավասարման կարգը չի փոխվում դեկարտյան կոորդինատների ձևափոխության ժամանակ: Այսպիսով, հանրահաշվական գծի կարգը կախված չէ կոորդինատային առանցքների ընտրությունից, այլ կախված է միայն իր՝ գծի հատկություններից:

Գծերի մեր նշած դասակարգման համար շատ էական է այն հանգամանքը, որ հիմք ընդունեցինք կոորդինատների դեկարտյան սիստեմը: Այդ դասակարգումը ամեն իմաստ կկորցնի, եթե օգտվենք բևեռային կոորդինատներից: Իրոք, ինչպես արդեն տեսել ենք, շրջանագիծը բևեռային կոորդինատներով կարող է որոշվել տարբեր տեսքի հավասարումներով, նայած բևեռի և բևեռային առանցքի ընտրությանը, այն է՝

$$r=a \text{ և } r=2a\cos\varphi :$$

Այս հավասարումներից առաջինը r և φ ընթացիկ կոորդինատների նկատմամբ հանրահաշվական է և առաջին աստիճանի, իսկ երկրորդը՝ տրանսցենդենտ է: Այսպիսով, միևնույն գիծը բևեռային կոորդինատներով կարող է որոշվել ինչպես հանրահաշվական, այնպես էլ տրանսցենդենտ հավասարումով, նայած բևեռի և բևեռային առանցքի ընտրությանը: Այդ պատճառով էլ չի կարելի գծերը դասակարգել հենվելով նրանց բևեռային կոորդինատներով հավասարումների վրա:

Վարժություններ

1. Մի որոշ կոորդինատային սիստեմի նկատմամբ կետի կոորդինատներն են՝ $x=2$, $y=-1$: Այդ կետի կոորդինատներն ինչի՞ կհավասարվեն, եթե, առանցքների ուղղությունները պահպանելով, կոորդինատների սկզբնակետը տեղափոխենք հետևյալ կետը՝

ա) (4, 5), բ) (4, −5), գ) (−4, 5), դ) (−4, −5):

2. Առանցքների միևնույն ուղղությունն ունեցող երկու կոորդինատային սիստեմների նկատմամբ մի որոշ կետ ունի (12, −7) և (0, 15) կոորդինատները: Ինչի՞ են հավասար այդ սիստեմներից յուրաքանչյուրի սկզբնակետի կոորդինատները մյուս սիստեմի նկատմամբ:

3. Կոորդինատային առանցքները նոր առանցքներով փոխարինելիս, որոնք ունեն նախկինների ուղղությունները, (5, 2) կետի կոորդինատները դառնում են (2, 5): Գտնել այդ սիստեմներից յուրաքանչյուրի սկզբնակետի կոորդինատները մյուսի նկատմամբ:

4. Երկու կոորդինատային սիստեմների առանցքներն ունեն միևնույն ուղղությունները։ Առաջին սիստեմի սկզբնակետը երկրորդի նկատմամբ ունի $(7, -5)$ կոորդինատները։ Գտնել երկրորդ սիստեմի սկզբնակետի կոորդինատներն առաջին սիստեմի նկատմամբ։

5. Ինչպե՞ս կփոփոխվեն ցանկացած $M(x, y)$ կետի կոորդինատները, եթե՝

ա) օրդինատների առանցքի ուղղությունը փոխենք իր հակառակ ուղղությամբ.

բ) երկու առանցքների վրա էլ ուղղությունները փոխենք իրենց հակառակ ուղղություններով։

6. Ինչպե՞ս կփոփոխվեն ցանկացած $M(x, y)$ կետի կոորդինատները, եթե աբսցիսների առանցքն ընդունենք որպես օրդինատների առանցք, օրդինատներինը՝ աբսցիսների առանցք։

7. Ինչի՞ կհավասարվեն $M(1, \sqrt{3})$ կետի կոորդինատները, եթե կոորդինատային առանցքները պտտենք $60°$ անկյունով։

8. Ինչպիսի՞ անկյունով պետք է պտտել կոորդինատային առանցքները, որպեսզի $M(2, 0)$ կետի կոորդինատները միմյանց հավասարվեն։

9. Ինչպիսի՞ տեսք կընդունի $x^2+y^2=a^2$ շրջանագծի հավասարումը, եթե կոորդինատային առանցքները պտտենք α կամայական անկյունով։

10. Ինչպիսի՞ տեսք կընդունի $x^2-y^2=a^2$ հիպերբոլի հավասարումը, եթե կոորդինատային առանցքները պտտենք $45°$ անկյունով։

11. Ինչպիսի՞ տեսք կընդունի $xy=1$ հիպերբոլի հավասարումը, եթե կոորդինատային առանցքները պտտենք $45°$ անկյունով։

12. Տրված է $y=4x^2-8x+5$ հավասարումը։ Այն ձևափոխել այնպես, որպեսզի նա չպարունակի x-ի առաջին աստիճանը և ազատ անդամը։ Գծել կորը։

13. Նույնը՝ $y=-3x^2+5x$ հավասարման հետ։

14. Տրված է $y=\dfrac{2x+3}{x+4}$ հավասարումը։ Այն ձևափոխել այնպես, որպեսզի նա չպարունակի առաջին չափման անդամներ։ Գծել կորը։

15. Պարզեցնել հետևյալ կորերի հավասարումները՝

ա) $3x+2y^2+6y-1=0$, բ) $y^2-4x-8y=0$։

16. Պարզեցնել հետևյալ պարաբոլի հավասարումը՝

$$x=My^2+Ny+P.$$

Գտնել նաև այդ պարաբոլի գագաթի կոորդինատները և սիմետրիայի առանցքի ուղղությունը։

17. Կառուցել հետևյալ պարաբոլները, նախապես պարզեցնելով նրանց հավասարումները՝

ա) $y=2x^2-4x+8$,
բ) $x^2+6x+y+7=0$,
գ) $y^2+8y-2x+12=0$,
դ) $2y^2+4y+x+6=0$։

18. Կառուցել հետևյալ կորերը, նախապես նրանց հավասարումները բերելով պարզագույն տեսքի՝

ա) $x^2+4x+4y^2=0$,
բ) $2x^2-8x+y^2-6y+1=0$,
գ) $x^2-8x-4y^2=0$,
դ) $y^2-6y-x^2+2x=0$։

19. Հետևյալ հավասարումները բերել պարզագույն տեսքի, ինչպես նաև կառուցել նրանցով որոշվող կորերը՝

ա) $2xy-4x-2y+3=0$,

բ) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$,

գ) $x^2+2xy+y^2+3x+y=0$,

դ) $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0$,

ե) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$,
զ) $4x^2-12xy+9y^2-36x+100=0$։

20. Ինչպիսի՞ն է $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=1$ հանրահաշվական կորի կարգը։

21. Տրված հավասարումներից որո՞նք են հանրահաշվական կոր պատկերում և որո՞նք՝ տրանսցենդենտ կոր.

ա) $x^a+y^b+1=0$, բ) $a^x+b^y+1=0$,

գ) $x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0$, դ) $\alpha\cos x+\beta\cos y-p=0$։

(a, b, α, β—հաստատուններ են)։

22. Կորերի հավասարումները տրված են բևեռային կոորդինատներով՝

ա) $r=a\cos\varphi$, բ) $r=a+\dfrac{b}{\cos\varphi}$, գ) $r=a(1+\cos\varphi)$։

Ցույց տալ, որ նրանք հանրահաշվական կորեր են։

ԳԼՈՒԽ VI

2-ՐԴ ԵՎ 3-ՐԴ ԿԱՐԳԻ ԴԵՏԵՐՄԻՆԱՆՏՆԵՐ

§ **1. 2-րդ կարգի դետերմինանտներ:** *Դիտարկենք երկու անհայտով երկու առաջին աստիճանի հավասարումների հետևյալ սիստեմը՝*

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y&=c_1, \\ a_2x+b_2y&=c_2: \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Այս սիստեմի լուծումը գտնելու համար նախ արտաքսենք y *անհայտը: Այդ նպատակով առաջին հավասարումը բազմապատկենք* b_2-*ով, երկրորդը՝* b_1-*ով և ապա առաջին հավասարումից հանենք երկրորդը, կստանանք՝*

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1: \qquad (2)$$

Նման եղանակով կարտաքսենք x *անհայտը և կստանանք՝*

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1: \qquad (3)$$

Եթե

$$a_1b_2-a_2b_1\neq 0,$$

ապա (2) և (3) հավասարումներից կստանանք որոշակի լուծում (1) սիստեմի համար, այն է՝

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}: \qquad (4)$$

Ստացված արտահայտությունների համարիչներն ու հայտարարները կոչվում են 2-րդ կարգի դետերմինանտներ:

Ընդհանրապես, եթե ունենք չորս թիվ՝ քառակուսի աղյուսակի ձևով դասավորված՝

$$\begin{matrix} A_1, & B_1, \\ A_2, & B_2, \end{matrix}$$

ապա այս աղյուսակին համապատասխանող 2-րդ կարգի դետերմինանտ կոչվում է հետևյալ տարբերությունը՝

$$A_1B_2-A_2B_1:$$

Դետերմինանտը նշանակելու համար ընդունված է հետևյալ սիմվոլը՝

$$A_1B_2-A_2B_1=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

A_1, A_2, B_1, B_2 թվերն անվանում են (5) դետերմինանտի էլեմենտներ. Նշանիկը ցույց է տալիս այն տողի համարը, իսկ տառի այբբենական կարգը՝ այն սյունակի համարը, որոնց հատման կետում գրված է տվյալ էլեմենտը: A_1 և B_2 էլեմենտները կազմում են դետերմինանտի առաջին կամ գլխավոր անկյունագիծը, իսկ B_1 և A_2 էլեմենտները՝ երկրորդ անկյունագիծը:

(5) բանաձևից երևում է, որ՝

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \text{ և } \begin{vmatrix} B_1 & A_1 \\ B_2 & A_2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

այսինքն՝ տողերը սյունակներով փոխարինելիս 2-րդ կարգի դետերմինանտի մեծությունը չի փոխվում, իսկ սյունակները տեղափոխելիս՝ փոխվում է միայն նշանը:

Ակներևաբար, (1) սիստեմի (4) լուծումը կարելի է դետերմինանտների միջոցով արտահայտել այսպես՝

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{4'}$$

Հայտարարներում գրված դետերմինանտը կազմված է (1) սիստեմի հավասարումների անհայտների գործակիցներից և կոչվում է սիստեմի դետերմինանտ: (4′) բանաձևերի համարիչներում գրված դետերմինանտներն ստացվում են սիստեմի դետերմինանտից, նրա մեջ, համապատասխանորեն, առաջին կամ երկրորդ սյունակների էլեմենտները փոխարինելով սիստեմի ազատ անդամներով:

Այսպես, ուրեմն, եթե (1) սիստեմի դետերմինանտը հավասար չէ զրոյի, ապա (4′) բանաձևերը տալիս են այդ սիստեմի միակ լուծումը, ընդ որում անհայտի արժեքը հավասար է մի կոտորակի, որի հայտարարը տված սիստեմի դետերմինանտն է, իսկ համարիչն այնպիսի դետերմինանտ է, որն ստացվում է սիստեմի դետերմինանտից, նրա մեջ որոնելի անհայտի գործակիցները փոխարինելով սիստեմի ազատ անդամներով (գրված հավասարումների աջ մասում):

Եթե սիստեմի դետերմինանտը հավասար է զրոյի, բայց x-ի և y-ի համար ստացած (4′) արտահայտությունների համարիչներում գրված դետերմինանտներից գոնե մեկը հավասար չէ զրոյի, ապա (1) սիստեմն **անհամատեղ սիստեմ է**, այսինքն՝ ոչ մի լուծում չունի, ինչպես այդ հետևում է (2) և (3) հավասարումներից: Այս դեպքում, սիստեմի դետերմինանտի զրոյի հավասար լինելուց բխում է, որ

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b^2},$$

այսինքն՝ անհայտների գործակիցները համեմատական են: Ակներևաբար, հակադարձը նույնպես ճիշտ է՝ եթե անհայտների գործակիցները համեմատական են, ապա սիստեմի դետերմինանտը հավասար է զրոյի:

Վերջապես, եթե (4′)-ում գրված բոլոր երեք դետերմինանտներն էլ հավասար են զրոյի՝

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=0,$$

ապա (1) **սիստեմն անորոշ** սիստեմ է, այսինքն՝ ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ: Այս դեպքում (1) սիստեմի հավասարումներից մեկը մյուսի հետևանքն է: Իրոք, այդ դեպքում կունենանք՝

$$a_1b_2=a_2b_1, \quad c_1b_2=c_2b_1, \quad a_1c_2=a_2c_1,$$

կամ՝

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2},$$

որտեղից և հետևում է, որ (1) սիստեմի հավասարումներից մեկը մյուսի հետևանքն է:

Այսպիսով, հանգում ենք հետևյալ եզրակացությանը՝

1) եթե (1) սիստեմի հավասարումներում անհայտների գործակիցները համեմատական չեն, ապա սիստեմը համատեղ և որոշյալ սիստեմ է.

2) եթե անհայտների գործակիցները համեմատական են, բայց ազատ անդամները նրանց համեմատական չեն, ապա սիստեմն անհամատեղ սիստեմ է.

3) եթե համեմատական են անհայտների գործակիցները և ազատ անդամները, ապա սիստեմն անորոշ է։

Բոլոր այս դեպքերը կարելի է երկրաչափորեն մեկնաբանել, եթե (1) սիստեմի հավասարումները դիտարկենք որպես ուղիղ գծերի հավասարումներ. առաջին դեպքում երկու ուղիղները հատվում են մի որոշակի կետում, որի կոորդինատները հենց (1) սիստեմի լուծումն է. երկրորդ դեպքում երկու ուղիղները զուգահեռ են և չեն համընկնում. վերջապես, երրորդ դեպքում ուղիղները համատեղվում են։

Օ ր ի ն ա կ 1. Լուծել հետևյալ սիստեմը՝

$$2x+3y-8=0,$$
$$x-2y+3=0։$$

Այս սիստեմի դետերմինանտը՝ $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, *հետևաբար, սիստեմն ունի միակ լուծում։ Այն գտնելու համար հավասարումների ազատ անդամները տեղափոխենք աջ մասը և օգտվենք (4′) բանաձևերից, կստանանք՝*

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-7}{-7}=1, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-14}{-7}=2։$$

Օ ր ի ն ա կ 2. Լուծել հետևյալ սիստեմը՝

$$3x+y=1,$$
$$6x+2y=5։$$

Այս սիստեմի դետերմինանտը՝ $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}=6-6=0$, *իսկ մյուս դետերմինանտները, օրինակ՝* $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}=15-6=9\neq 0$, *հետևաբար, տվյալ սիստեմն անհամատեղ սիստեմ է. դրանում կարելի է համոզվել նաև անմիջականորեն, եթե առաջին հավասարումը բազմապատկենք 2-ով։*

Օ ր ի ն ա կ 3. Լուծել հետևյալ սիստեմը՝

$$x-2y=3,$$
$$2x-4y-6=0։$$

Այս սիստեմի դետերմինանտը՝ $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=-4+4=0$, *ինչպես և մյուս դետերմինանտները՝* $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=0$. *հետևաբար, տված սիստեմն անո-*

րոշ է։ Իսկապես, երկրորդ հավասարումը կրճատելով 2-ով, տեսնում ենք, որ սիստեմը բերվում է մեկ հավասարման՝

$$x-2y=3$$

և, հետևաբար, ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ, որ կարելի է գրել այսպես՝

$$x=2y+3,$$

որտեղ y*-ը կարող է ընդունել ցանկացած արժեք։*

Միանմանորապես համասեռ սիստեմը՝

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y=0 \\ a_2x+b_2y=0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

կամ որոշակի լուծում ունի, կամ անորոշ է, քանի որ նրա համար երկրորդ դեպքը անհնար է։ Այլ կերպ ասած, (6) սիստեմն ունի միակ լուծում՝ $x=y=0$ *(այն անվանենք* զրոյական լուծում*), եթե նրա դետերմինանտը զրոյից տարբեր է։ Իսկ եթե*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0, \text{ այսինքն՝ } \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2},$$

ապա (6) հավասարումներից մեկը մյուսի հետևանքն է. (6) սիստեմը բերվում է մեկ հավասարման, օրինակ՝

$$a_1x+b_1y=0,$$

և ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ, որոնք որոշվում են կամայական k *բազմապատկիչի ճշտությամբ՝* $x=kb_1$, $y=-ka_1$ *և* $k\neq 0$ *դեպքում տարբեր են զրոյական լուծումից։*

Երկրաչափորեն (6) հավասարումներին համապատասխանում են սկզբնակետով անցնող երկու ուղիղներ, որոնք կամ իրարից տարբեր են և ունեն միակ ընդհանուր կետ՝ սկզբնակետը, կամ համընկնում են։

§ 2. Երեք անհայտներով երկու հավասարումների համասեռ սիստեմ։ *Դիտարկենք* x, y, z *երեք անհայտներով երկու համասեռ հավասարումների հետևյալ սիստեմը՝*

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0\text{։} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Ընդունենք, որ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

երեք դետերմինանտներից գոնե մեկը, օրինակ՝ առաջինը, զրոյից տարբեր է։ Այդ դեպքում z *պարունակող անդամները տեղափո-*

խելով աջ մասը և հավասարումները լուծելով x-ի և y-ի նկատմամբ, (4′)-ի համաձայն, կստանանք՝

$$x=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}\,z, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}\,z,$$

որտեղ z-ը կամայական արժեք ունի։

Նշանակենք՝

$$\frac{z}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=k. \tag{8}$$

Այդ դեպքում՝

$$x=k\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}, \quad y=k\begin{vmatrix}c_1 & a_1\\ c_2 & a_1\end{vmatrix}, \quad z=k\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}, \tag{9}$$

որտեղ k-ն համեմատականության կամայական բազմապատկիչ է։ Եթե վերցնենք $k\neq 0$, ապա կստանանք սիստեմի մի լուծում, որը տարբեր է $x=y=z=0$ ակներև զրոյական լուծումից, որ կստացվեր $k=0$ դեպքում։

Նկատենք, որ (9) բանաձևերի դետերմինանտները, որոնց համեմատական են (7) սիստեմի անհայտները, ստացվում են այդ սիստեմի գործակիցներից կազմված հետևյալ աղյուսակից՝

$$\begin{matrix}a_1, & b_1, & c_1\\ a_2, & b_2, & c_2\end{matrix}$$

ջնջելով տվյալ անհայտին համապատասխանող սյունակը, ընդ որում միջին անհայտի համար պետք է նաև տեղափոխել ստացված դետերմինանտի սյունակները։

Եթե (9) բանաձևերում գրված բոլոր երեք դետերմինանտներն էլ հավասար են զրոյի, ապա (7) հավասարումների համապատասխան գործակիցները համեմատական են և, հետևաբար, (7) սիստեմը բերվում է մեկ հավասարման՝

$$a_1x+b_1y+c_1z=0,$$

որտեղից, ընդունելով, օրինակ, որ $a_1\neq 0$, կստանանք՝

$$x=-\frac{b_1y+c_1z}{a_1},$$

որտեղ y-ն ու z-ը կարող են ցանկացած արժեքները ընդունել։

Օրինակ 1. Լուծել հետևյալ սիստեմը՝

$$x+2y-3z=0,$$
$$2x+3y+z=0։$$

Տված սիստեմի գործակիցներից կազմում ենք՝

$$1,\ 2,\ -3$$
$$2,\ 3,\ \ 1$$

աղյուսակը և, հերթով սյունակները ջնջելով, կազմում ենք՝

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=11, \qquad \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-7, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-1$$

դետերմինանտները (միջին դետերմինանտում սյունակները տեղափոխել ենք)։ (9) բանաձևերի համաձայն, սիստեմի լուծումը կլինի՝

$$x=11k,\ y=-7k,\ z=-k,$$

որտեղ k-ն կամայական թիվ է։

Օրինակ 2. Լուծել հետևյալ սիստեմը՝

$$2x-y-5z=0,$$
$$4x-2y-10z=0։$$

կազմելով գործակիցների

$$2,\ -1,\ -5$$
$$4,\ -2,\ -10$$

աղյուսակը և հերթով ջնջելով սյունակները, կստանանք՝

$$\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -2 & -10 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -10 & 4 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=0։$$

Հետևաբար, տված սիստեմը բերվում է մեկ հավասարման՝

$$2x-y-5z=0,$$

որում կարելի է համոզվել նաև, եթե երկրորդ հավասարումը կրճատենք 2-ով։ Սիստեմի լուծումը կլինի՝

$$y=2x-5z,$$

որտեղ x-ն ու z-ը կարող են ընդունել կամայական արժեքներ։

§ 3. 3-րդ կարգի դետերմինանտներ: *Դիտարկենք երեք անհայտներով երեք առաջին աստիճանի հավասարումների հետևյալ սիստեմը՝*

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z&=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z&=d_3։ \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Այս սիստեմը լուծելու համար արտաքսենք անհայտներից երկուսը, օրինակ՝ y-ը և z-ը, հետևյալ եղանակով. տված հավասարում-

ներն անդամ առ անդամ բազմապատկենք l, m, n թվերով և գումարելով, այդ թվերը որոշենք այնպես, որպեսզի y-ի և z-ի գործակիցները հավասարվեն զրոյի։ Այդ ձևով նախ կստանանք՝

$$(a_1l+a_2m+a_3n)x+(b_1l+b_2m+b_3n)y+$$
$$+(c_1l+c_2m+c_3n)z=d_1l+d_2m+d_3n։$$

Ընդունելով՝

$$\left.\begin{aligned} b_1l+b_2m+b_3n=0, \\ c_1l+c_2m+c_3n=0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

կստանանք հետևյալ հավասարումը՝

$$(a_1l+a_2m+a_3n)x=d_1l+d_2m+d_3n։ \tag{12}$$

(11) հավասարումներից որոշենք l-ը, m-ը, n-ը՝ ընդհանուր բազմապատկիչի ճշտությամբ. կարող ենք, մասնավորապես, ընդունել (§ 2), որ՝

$$l=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad m=\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}, \quad n=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}։$$

Այս արժեքները դնելով (12) հավասարման մեջ, արդյունքում կստանանք մի հավասարում, որը պարունակում է միայն x անհայտը՝

$$\left\{ a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right\}x=$$
$$=d_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+d_2\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}+d_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}։ \tag{13}$$ [1]

x-ի մոտ գրված՝

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \tag{14}$$

գործակիցն անվանենք 9 էլեմենտներից կազմված՝

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{matrix} \tag{15}$$

քառակուսի աղյուսակին համապատասխանող 3-րդ կարգի դետերմինանտ և այն նշանակենք այսպես՝

---

[1] (10) սիստեմի մեր բերած լուծման լրիվ ընթացքը տե՛ս ներքևա գլխի § 5-ում։

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}:$$

Եթե (14)-ում 2-րդ կարգի դետերմինանտները փոխարինենք իրենց արտահայտություններով, ապա 3-րդ կարգի դետերմինանտի համար վերջնականապես կստանանք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) =$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1: \qquad (16)$$

Կարելի է այս վերջին արտահայտությունը կազմելու պարզ եղանակ ցույց տալ: Այդ նպատակով գրենք (15) աղյուսակը, նրա աջ կողմում կցագրելով առաջին և երկրորդ սյունակները՝

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \\ - \quad - \quad - & & + & + & + \end{array} \qquad (17)$$

Վերցնենք + նշանով այն երեքական էլեմենտների արտադրյալները, որոնք գտնվում են դետերմինանտի գլխավոր անկյունագծի վրա կամ նրան զուգահեռ անկյունագծերի վրա ((17) սխեմայում այդ անկյունագծերը նշված են անընդմեջ գծով): Իսկ երկրորդական անկյունագծի կամ նրան զուգահեռ անկյունագծերի վրա գտնվող երեքական էլեմենտների արտադրյալները վերցնենք — նշանով ((17) սխեմայում դրանք նշված են կետագծերով):

Այդ վեց արտադրյալների հանրահաշվական գումարը, ինչպես երևում է (16) արտահայտությունից, տալիս է (15) քառակուսի աղյուսակին համապատասխանող 3-րդ կարգի դետերմինանտը:

Օ ր ի ն ա կ: Հաշվել հետևյալ դետերմինանտը՝

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Համաձայն (14) սահմանման, ունենք՝

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

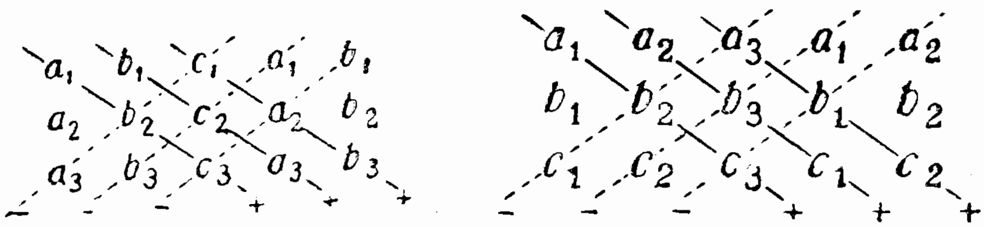
$$= -14 - 11 - 2 = -27 :$$

§ 4. 3-րդ կարգի դետերմինանտների հիմնական հատկությունները: I. Տողերը սյունակներով փոխարինելիս դետերմինանտի մեծությունը չի փոխվում (տողերի և սյունակների իրավահավասարությունը):

Այդ հատկությունը կարելի է գրել այսպես՝

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} :$$

Այս հատկության ճիշտ լինելը հեշտ է ստուգել, աջ և ձախ մասերի դետերմինանտները հաշվելով (17) սխեմայով՝



Իրոք, մենք տեսնում ենք, որ երկու դեպքում էլ անընդմեջ գծով ընդգծած էլեմենտները, ինչպես և կետագծով ընդգծած էլեմենտները տալիս են միևնույն արտադրյալները: Հետևաբար, դետերմինանտի մեջ սյունակները լիովին իրավահավասար են տողերին. տողերի վերաբերյալ հետագա բոլոր հատկությունները ճիշտ կլինեն նաև սյունակների համար և ընդհակառակը:

II. Երկու հարևան սյունակները (կամ տողերը) տեղափոխելիս դետերմինանտը փոխում է միայն նշանը:

Այսպես, օրինակ, տեղափոխելով առաջին և երկրորդ սյունակները, կստանանք՝

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} :$$

Այս հատկությունը հեշտ է ստուգել, օգտվելով (17) սխեմայից: Իրոք, երկու հարևան սյունակները տեղափոխելիս անընդմեջ գծով ընդգծված էլեմենտները կգրավեն կետագծով ընդգծված էլեմենտների տեղերը և հակառակը, որ հավասարազոր է դետերմինանտի նշանը փոխելուն:

III. Երկու միատեսակ սյունակներ (կամ տողեր) ունեցող դետերմինանտը հավասար է զրոյի:

Իսկապես, մի կողմից՝ միատեսակ սյունակները տեղափոխելիս դետերմինանտը չի փոխվում, իսկ մյուս կողմից էլ, II հատկության համաձայն, նա պետք է նշանը փոխի. եթե դետերմինանտի մեծությունը նշանակենք Δ, ապա այդ նշանակում է, որ $\Delta=-\Delta$, որտեղից և $\Delta=0$:

Դետերմինանտի հետագա հատկությունները պարզելու համար, նախապես մտցնենք մի քանի նոր գաղափարներ: Եթե

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

դետերմինանտից ջնջենք մի տող և մի սյունակ, որոնց հատման տեղում գտնվում է մի որոշ էլեմենտ, ապա կստացվի 2-րդ կարգի մի դետերմինանտ, որն անվանում են Δ դետերմինանտի՝ այդ էլեմենտին համապատասխանող մինոր: Այսպես, օրինակ, Δ դետերմինանտի՝ b_3 էլեմենտին համապատասխանող մինոր կլինի $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ 2-րդ կարգի դետերմինանտը: Պայմանավորվենք դետերմինանտի որևէ a էլեմենտի A հանրահաշվական լրացում անվանել այդ էլեմենտին համապատասխանող մինորը, վերցրած $+$ կամ $-$ նշանով, նայած զույգ է, թե կենտ այն տողի և սյունակի համարների գումարը, որոնց պատկանում է a էլեմենտը: Այսպես, օրինակ, b_3 էլեմենտի հանրահաշվական լրացումը կլինի՝

$$B_3=-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}:$$

(16) բանաձևի աջ մասում գտնվող գումարը խմբավորելով, օրինակ, ըստ առաջին սյունակի էլեմենտների, կստանանք՝

$$\Delta=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

կամ՝

$$\Delta=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3,$$

որտեղ A_i-ն՝ a_i էլեմենտի հանրահաշվական լրացումն է:

Հեշտ է ստուգել և համոզվել, որ համանման բանաձև տեղի *ունի նաև ցանկացած սյունակի, ուրեմն նաև՝ ցանկացած տողի նկատմամբ։*

Այսպիսով, ստանում ենք դետերմինանտի վերլուծումն ըստ մի որոշ շարքի (տողի կամ սյունակի) էլեմենտների՝

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3, & \Delta=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1, \\ \Delta=b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3, & \Delta=a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2, \\ \Delta=c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3, & \Delta=a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3, \end{array}\right\} \qquad (18)$$

որտեղ գլխատառերով նշանակված են համապատասխան փոքրատառերով նշանակված էլեմենտների հանրահաշվական լրացումները։

Եթե Δ *դետերմինանտում, օրինակ, առաջին սյունակի* a_1, a_2, a_3 *էլեմենտները փոխարինենք երկրորդ սյունակի* b_1, b_2, b_3 *էլեմենտներով, ապա դրանից* A_1, A_2, A_3 *հանրահաշվական լրացումները չեն փոխվի, քանի որ դրանք առաջին սյունակից ոչ մի էլեմենտ չեն պարունակում։ Հետևաբար, եթե (18) բանաձևերից առաջինի աջ մասում* a_1, a_2, a_3 *էլեմենտների տեղերը դնենք* b_1, b_2, b_3 *էլեմենտները, ապա գումարը կներկայացնի այնպիսի դետերմինանտ, որի առաջին և երկրորդ սյունակները նույնն են, և, ուրեմն, հավասար է զրոյի՝*

$$b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3=0։$$

Նման եղանակով (18) բանաձևերի առաջին երեքից կստանանք բանաձևերի հետևյալ խումբը՝

$$\left.\begin{array}{ll} b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3=0, & c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3=0, \\ a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3=0, & c_1B_1+c_2B_2+c_3B_3=0, \\ a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3=0, & b_1C_1+b_2C_2+b_3C_3=0, \end{array}\right\} \qquad (19)$$

իսկ վերջին երեքից՝

$$\left.\begin{array}{ll} a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1=0, & a_3A_1+b_3B_1+c_3C_1=0, \\ a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2=0, & a_3A_2+b_3B_2+c_3C_2=0, \\ a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3=0, & a_2A_3+b_2B_3+c_2C_3=0։ \end{array}\right\} \qquad (19')$$

(18), (19) և (19′) բանաձևերն արտահայտում են դետերմինանտի հետևյալ հատկությունը՝

IV. Դետերմինանտի որևէ շարքի (սյունակի կամ տողի) էլեմենտների և իրենց հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների գումարը հավասար է դետերմինանտին, իսկ որևէ շարքի (սյունակի կամ տողի) էլեմենտների հանրահաշվական լրացումների և զուգահեռ շարքի (սյունակի կամ տողի) համապատասխան էլեմենտների արտադրյալների գումարը հավասար է զրոյի:

V. Դետերմինանտի որևէ շարքի (սյունակի կամ տողի) բոլոր էլեմենտների ընդհանուր բազմապատկիչը կարելի է դուրս բերել դետերմինանտի նշանի տակից:

VI. Եթե դետերմինանտի որևէ շարքի (սյունակի կամ տողի) բոլոր էլեմենտները հավասար են զրոյի, ապա դետերմինանտը հավասար է զրոյի:

Վերջին երկու հատկությունները անմիջականորեն բխում են (18) բանաձևերից, որոնք արտահայտում են դետերմինանտի վերլուծությունը ըստ որևէ շարքի էլեմենտների:

Նույնքան հեշտությամբ ապացուցվում է նաև հետևյալ հատկությունը:

VII. Եթե դետերմինանտի որևէ շարքի (սյունակի կամ տողի) յուրաքանչյուր էլեմենտը իրենից ներկայացնում է երկու գումարելիների գումար, ապա այդ դետերմինանտը կարելի է ներկայացնել երկու այնպիսի դետերմինանտների գումարի տեսքով, որոնց մեջ դիտարկվող շարքի էլեմենտները հավասար են համապատասխան գումարելիներին, իսկ մյուս շարքերը մնացել են անփոփոխ:

Այս հատկությունը, ակներևորեն, տարածվում է ցանկացած թվով գումարելիների դեպքի վրա:

Այդ հատկությունն ապացուցելու համար, ենթադրենք, օրինակ, որ՝

$$a_1=a_1'+a_1'',\ a_2=a_2'+a_2'',\ a_3=a_3'+a_3'':$$

Այս արտահայտությունները տեղադրենք (18) բանաձևերից առաջինում, կստանանք՝

$$\Delta=(a_1'A_1+a_2'A_2+a_3'A_3)+(a_1''A_1+a_2''A_2+a_3''A_3)=\Delta'+\Delta'':$$

Ակներևորեն, Δ' դետերմինանտը կստացվի Δ դետերմինանտից, եթե վերջինիս առաջին սյունակի էլեմենտները փոխարինենք a_1', a_2', a_3' *թվերով, իսկ Δ''-ը կստացվի նույն ձևով, երբ Δ-ի առաջին սյունակի էլեմենտները փոխարինենք* a_1'', a_2'', a_3'' *թվերով:*

VIII. Դետերմինանտի մեծությունը չի փոխվի, եթե նրա որևէ շարքի (սյունակի կամ տողի) էլեմենտներին գումարենք զուգահեռ շարքի էլեմենտները, վերջիններս նախապես բազմապատկելով միևնույն l կամայական բազմապատկիչով:

Իսկապես, օրինակ, առաջին տողի էլեմենտները փոխարի-

նենք a_1+la_2, b_1+lb_2, c_1+lc_2 գումարներով։ VII հատկության համաձայն, ստացված դետերմինանտները կարելի է ներկայացնել երկու դետերմինանտների գումարի տեսքով։ Դրանցից առաջինի առաջին տողի էլեմենտներ կլինեն a_1, a_2, a_3 թվերը, այսինքն՝ նա կլինի տրված Δ դետերմինանտը։ Երկրորդ դետերմինանտի առաջին տողի էլեմենտներ կլինեն la_2, lb_2, lc_2 արտադրյալները։ V հատկության շնորհիվ l ընդհանուր բազմապատկիչը դուրս բերելով, կստանանք մի դետերմինանտ, որի երկու տողերը միատեսակ են, և, ըստ VI հատկության, հավասար է զրոյի։ Այդպիսով, ամբողջ գումարից կմնա սկզբնական Δ դետերմինանտը։

Օգտվելով VIII հատկությունից, կարելի է յուրաքանչյուր դետերմինանտի մեջ մի որոշ շարքի բոլոր էլեմենտները, բացի մեկ էլեմենտից, դարձնել զրո՝ չփոխելով դետերմինանտի մեծությունը։ Այնուհետև, դետերմինանտը վերլուծելով ըստ այդ շարքի էլեմենտների, տրված 3-րդ կարգի դետերմինանտը կբերենք 2-րդ կարգի մի դետերմինանտի։ Իսկապես, դիցուք

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

դետերմինանտում a_1 էլեմենտը զրոյից տարբեր է։ Երկրորդ սյունակի էլեմենտներից հանենք առաջին սյունակի էլեմենտները, վերջիններս նախապես բազմապատկելով $\frac{b_1}{a_1}$-ով, և երրորդ սյունակի էլեմենտներից հանենք առաջին սյունակի էլեմենտները, վերջիններս նախապես բազմապատկելով $\frac{c_1}{a_1}$-ով։ Այսպիսի ձևափոխություններ կատարելիս, VIII հատկության շնորհիվ, դետերմինանտի մեծությունը չի փոխվի, և մենք կստանանք՝

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & m_2 & n_2 \\ a_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ m_3 & n_3 \end{vmatrix}։$$

Օրինակ։ Հաշվել հետևյալ դետերմինանտը՝

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix}։$$

Երկրորդ սյունակի էլեմենտներից հանենք առաջին սյունակի էլեմենտները՝ բազմապատկված 2-ով, իսկ երրորդ սյունակի էլեմենտներից հանենք առաջին սյունակի էլեմենտները՝ բազմապատկված 5-ով, կստանանք՝

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -14 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -14 \end{vmatrix} = -8:$$

Այդ դետերմինանտի անմիջական հաշվումը, վերլուծելով ըստ որևէ շարքի էլեմենտների, կպահանջեր մի քիչ ավելի հաշվումներ. կիրառելով, օրինակ, (18) բանաձևերից առաջինը, կգրեինք՝

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 2(-23)-(-10)+4\,.\,7=-8:$$

§ 5. Երեք անհայտներով երեք առաջին աստիճանի հավասարումների սիստեմ: *3-րդ կարգի դետերմինանտի գաղափարին մենք հանգեցինք, դիտարկելով երեք անհայտներով երեք գծային հավասարումների լուծման հարցը: Վերադառնալով այդ հարցին, դիտարկենք երեք անհայտներով երեք առաջին աստիճանի հավասարումների հետևյալ սիստեմը՝*

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z&=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z&=d_3 \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

և ենթադրենք, որ այդ սիստեմի

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

դետերմինանտը զրոյից տարբեր է: *(20) հավասարումները անդամ առ անդամ բազմապատկենք* A_1, A_2, A_3 *հանրահաշվական լրացումներով և գումարենք: (18) բանաձևերի շնորհիվ* x*-ի գործակիցը հավասար կլինի* Δ*-ի, իսկ (19) բանաձևերի շնորհիվ* y*-ի և* z*-ի գործակիցները կհավասարվեն զրոյի: Նման եղանակով արտաքսենք* x*-ն ու* z*-ը կամ* x*-ն ու* y*-ը: Այսպիսով, (20) սիստեմից ստացվում է հետևյալ սիստեմը՝*

$$\left.\begin{aligned} x\cdot\Delta&=d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3, \\ y\cdot\Delta&=d_1B_1+d_2B_2+d_3B_3, \\ z\cdot\Delta&=d_1C_1+d_2C_2+d_3C_3: \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Հեշտությամբ կարելի է ցույց տալ, որ, հակադարձաբար, (20) սիստեմը (21) սիստեմի հետևանքն է: Իսկապես, (21) հա-

վասարումները անդամ առ անդամ բազմապատկելով a_1, b_1, c_1 *թվերով և գումարելով, (18) և (19) բանաձևերի շնորհիվ կստանանք՝*

$$\Delta \cdot (a_1x+b_1y+c_1z)=d_1\cdot\Delta \text{։}$$

Կրճատելով զրոյից տարբեր Δ-ի վրա, կստանանք (20) հավասարումներից առաջինը։ Նման ձևով կարելի է ստանալ նաև մյուս երկու հավասարումները։

Ուրեմն, մենք ցույց տվեցինք, որ (20) և (21) սիստեմները համարժեք են, եթե Δ դետերմինանտը հավասար չէ զրոյի։ (21) սիստեմի հավասարումներից ստանում ենք՝

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3}{\Delta},\\ y&=\frac{d_1B_1+d_2B_2+d_3B_3}{\Delta},\\ z&=\frac{d_1C_1+d_2C_2+d_3C_3}{\Delta}\text{։} \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

$d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3$ *գումարն ստացվում է* $a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3$ *գումարից (որը հավասար է Δ դետերմինանտին)* a_1, a_2, a_3 *գործակիցները փոխարինելով* d_1, d_2, d_3 *ազատ անդամներով, այսինքն՝ այդ գումարը հավասար է մի դետերմինանտի, որը կստացվի Δ-ից, եթե նրա մեջ առաջին սյունակի էլեմենտները փոխարինենք ազատ անդամներով։ Նման եզրակացություն կարելի է անել նաև* y*-ի և* z*-ի արտահայտությունների համարիչների նկատմամբ։ Այսպիսով, (22) բանաձևերն ավելի մանրամասն տեսքով այսպես կգրվեն՝*

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}, \qquad (22')$$

և մենք կհանգենք հետևյալ եզրակացությանը՝ եթե *(20)* սիստեմի դետերմինանտը հավասար չէ զրոյի, ապա այդ սիստեմն ունի մեկ որոշակի լուծում, որն ստացվում է *(22′)* բանաձևերով: x-ը, y-ը և z-ն արտահայտող կոտորակների հայտարարներում գտնվում է տված սիստեմի դետերմինանտը, իսկ համարիչներում՝ 3-րդ կարգի այնպիսի դետերմինանտներ, որոնք ստացվում են Δ-ից, համապատասխան անհայտի գործակիցները փոխարինելով ազատ անդամներով *(սրանք գրված են հավասարումների աջ մասերում)*։

Օ ր ի ն ա կ։ Լուծել հետևյալ սիստեմը՝

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y+z&=-1, \\ x+y+z&=6, \\ 3x+y-2z&=-1. \end{aligned}\right\}$$

Սիստեմի դետերմինանտը կլինի՝

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&1&1\\3&1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-4&0\\1&1&1\\5&3&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-4\\5&3\end{vmatrix}=-23,$$

որը զրոյից տարբեր է։ Հետևաբար, սիստեմն ունի միակ որոշակի լուծում։ Ըստ (22′) բանաձևերի կունենանք՝

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-1&-3&1\\6&1&1\\-1&1&-2\end{vmatrix}}{-23}=\frac{\begin{vmatrix}-1&-3&1\\7&4&0\\-3&-5&0\end{vmatrix}}{-23}=\frac{\begin{vmatrix}7&4\\-3&-5\end{vmatrix}}{-23}=\frac{-23}{-23}=1,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&6&1\\3&-1&-2\end{vmatrix}}{-23}=\frac{\begin{vmatrix}0&0&1\\-1&7&1\\7&-3&-2\end{vmatrix}}{-23}=\frac{\begin{vmatrix}-1&7\\7&-3\end{vmatrix}}{-23}=\frac{-46}{-23}=2,$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2&-3&-1\\1&1&6\\3&1&-1\end{vmatrix}}{-23}=\frac{\begin{vmatrix}0&-5&-13\\1&1&6\\0&-2&-19\end{vmatrix}}{-23}=\frac{-\begin{vmatrix}-5&-13\\-2&-19\end{vmatrix}}{-23}=\frac{-69}{-23}=3.$$

§ **6. Համասեռ սիստեմ:** *Այժմ անցնենք համասեռ հավասարումների հետևյալ սիստեմի հետազոտմանը՝*

$$\left.\begin{aligned} X_1&\equiv a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ X_2&\equiv a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ X_3&\equiv a_3x+b_3y+c_3z=0, \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

ընդ որում, գրության կարճության համար, հավասարումների ձախ մասերը նշանակել ենք X_1, X_2, X_3*։ Հետազոտությունը կատարենք հետևյալ երեք դեպքերի համար առանձին-առանձին։*

I. *Եթե (23) սիստեմի Δ դետերմինանտը զրոյից տարբեր է, ապա այդ սիստեմը պետք է ունենա մեկ որոշակի լուծում՝ հա-*

մաձայն § 5-ի։ Մեր դեպքում այդ կլինի՝ $x=y=z=0$ ակներև լուծումը, որն անվանում են զրոյական լուծում։

II. Ենթադրենք, որ (23) սիստեմի Δ դետերմինանտը հավասար է զրոյի, բայց նրա մինորներից առնվազն մեկը զրոյից տարբեր է։ (23) սիստեմում համար կերպով դասավորելով հավասարումներն ու անհայտները, միշտ կարելի է այնպես անել, որպեսզի դետերմինանտի՝ զրոյից տարբեր մինորը դասավորվի Δ դետերմինանտի վերին ձախ անկյունում։ Այդպես վարվելով, մենք կարող ենք, ընդհանրությունը չնվազեցնելով, համարել որ՝

$$\Delta=0, \quad \delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0\text{։}$$

Դիտարկենք հետևյալ դետերմինանտը՝

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & X_1 \\ a_2 & b_2 & X_2 \\ a_3 & b_3 & X_3 \end{vmatrix}\text{։}$$

Այստեղ X_1-ը, X_2-ը, X_3-ը փոխարինելով իրենց արտահայտություններով, մենք կարող ենք, օգտվելով V և VII հատկություններից (§ 4), D դետերմինանտը ներկայացնել երեք դետերմինանտների գումարի տեսքով՝

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}z\text{։}$$

x-ի և y-ի մոտ գրված դետերմինանտները հավասար են զրոյի, քանի որ ունեն երկուական միատեսակ սյունակներ, իսկ z-ի մոտ գրված դետերմինանտը՝ Δ դետերմինանտն է, որը հավասար է զրոյի ըստ պայմանի. հետևաբար, տեղի ունի հետևյալ նույնությունը x-ի, y-ի, z-ի նկատմամբ՝

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & X_1 \\ a_2 & b_2 & X_2 \\ a_3 & b_3 & X_3 \end{vmatrix}=0\text{։} \tag{24}$$

Այս դետերմինանտը վերլուծելով ըստ վերջին սյունակի էլեմենտների, տեսնում ենք, որ այդ նույնությունն արտահայտում է գծային կախում X_1-ի, X_2-ի և X_3-ի միջև, ընդ որում X_3-ի գործակիցը, ակներևորեն, հավասար է δ-ին և նախահայտորեն հավասար չէ զրոյի՝

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \delta X_3 = 0, \qquad (24')$$

որտեղ α_1-ը և α_2-ը X_1 և X_2 էլեմենտների հանրահաշվական լրացումներ են։

Այդ նույնությունը ցույց է տալիս, որ (23) հավասարություններից երրորդը առաջին երկուսի հետևանքն է։ Իսկապես, եթե x-ի, y-ի, z-ի մի որոշ արժեքների համար ունենանք $X_1 = X_2 = 0$, ապա (24′) նույնությունից և $\delta \neq 0$ պայմանից կբխի, որ x-ի, y-ի, z-ի այդ արժեքների համար նաև $X_3 = 0$։

Այսպիսով, դիտարկվող դեպքում, մնում է համատեղ լուծել (23) սիստեմի առաջին երկու հավասարումները։ Ըստ (9) բանաձևերի, լուծումը կլինի՝

$$x = k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad y = k\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad z = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

այսինքն՝

$$x = kA_3, \; y = kB_3, \; z = kC_3,$$

որտեղ k-ն կամայական պարամետր է։ Եթե $k \neq 0$, ապա նաև $z \neq 0$ և ստացած լուծումը զրոյական լուծումից տարբեր է։

III. Ենթադրենք, վերջապես, որ Δ դետերմինանտը և նրա բոլոր մինորները հավասար են զրոյի։ Ընդհանրությունը չխախտելով, կարող ենք ընդունել, որ a_1 գործակիցը զրոյից տարբեր է։ Դիտարկենք հետևյալ երկու 2-րդ կարգի դետերմինանտները՝

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & X_1 \\ a_2 & X_2 \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & X_1 \\ a_3 & X_3 \end{vmatrix}։$$

Այս դետերմինանտներից յուրաքանչյուրը կարելի է ներկայացնել երեք դետերմինանտների գումարի տեսքով՝

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} z,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_3 & a_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} z։$$

Անմիջապես երևում է, որ x-ի մոտ գրված դետերմինանտները հավասար են զրոյի։ Բացի դրանից, զրոյի են հավասար նաև y-ի և z-ի մոտ գրված դետերմինանտները, քանի որ, պայմանի համաձայն, Δ դետերմինանտի բոլոր մինորները հավասար են զրոյի։ Հետևաբար՝

$$D_1 \equiv 0, \quad D_2 \equiv 0։$$

Այսպես, ուրեմն, դիտարկվող դեպքում x-*ի*, y-*ի*, z-*ի նկատմամբ տեղի կունենան երկու նույնությունները՝*

$$\begin{vmatrix} a_1 & X_1 \\ a_2 & X_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & X_1 \\ a_3 & X_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{25}$$

կամ՝

$$a_1X_2 - a_2X_1 = 0, \quad a_1X_3 - a_3X_1 = 0: \tag{25'}$$

Այս նույնությունները ցույց են տալիս, որ (23) սիստեմի վերջին երկու հավասարումներն առաջինի հետևանքն են։ Իրոք, (25′) նույնություններից և $a_1 \neq 0$ *պայմանից բխում է, որ եթե* $X_1 = 0$, *ապա նաև* $X_2 = X_3 = 0$: *Ուրեմն, դիտարկվող դեպքում բավական է լուծել միայն առաջին հավասարումը, և մենք (23) սիստեմի լուծումը կստանանք*

$$x = -\frac{b_1y + c_1z}{a_1}$$

տեսքով, որտեղ y-*ն ու* z-*ը մնում են կամայական։*

Այս պարագրաֆի հետազոտությունները ամփոփելով, հանգում ենք հետևյալ եզրակացությանը՝

Որպեսզի (23) համասեռ սիստեմն ունենա զրոյից տարբեր լուծումներ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ սիստեմի դետերմինանտը հավասար լինի զրոյի: Եթե այդ դետերմինանտը հավասար է զրոյի, բայց նրա մինորներից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է, ապա սիստեմի հավասարումներից մեկը մյուս երկուսի հետևանքն է: Իսկ եթե (23) սիստեմի դետերմինանտը և նրա բոլոր մինորները հավասար են զրոյի, ապա սիստեմը բերվում է մեկ հավասարման:

Օրինակ 1. Լուծել հետևյալ սիստեմը՝

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0, \\ x + y + z &= 0, \\ 3x + y - 2z &= 0: \end{aligned}\right\}$$

Սիստեմի դետերմինանտը կլինի՝

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -23,$$

որը զրոյից տարբեր է։ Հետևաբար, տված սիստեմն ունի միայն զրոյական լուծումը։

Օրինակ 2. Լուծել հետևյալ սիստեմը՝

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=0,\\ 3x-y+2z&=0,\\ x-3y&=0\text{։} \end{aligned}\right\}$$

Սիստեմի դետերմինանտն է՝

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 0\\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0\text{։}$$

Δ *դետերմինանտի մինորներից, օրինակ, հետևյալ մինորը՝*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-4,$$

զրոյից տարբեր է։ Հետևաբար, տված սիստեմի երրորդ հավասարումը առաջին երկուսի հետևանքն է, և բավական է համատեղ լուծել առաջին երկու հավասարումները։ Դրանք լուծելով, կգտնենք (§ 2)՝

$$x=k\begin{vmatrix} 1 & 1\\ -1 & 3 \end{vmatrix}=3k,\quad y=k\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & 3 \end{vmatrix}=k,\quad z=k\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-4k,$$

որտեղ k-*ն կամայական թիվ է։*

Օրինակ 3. *Լուծել հետևյալ սիստեմը՝*

$$\left.\begin{aligned} x-y+z&=0,\\ 2x-2y+2z&=0,\\ 3x-3y+3z&=0\text{։} \end{aligned}\right\}$$

Սիստեմի դետերմինանտն է՝

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0\text{։}$$

Δ *դետերմինանտի բոլոր մինորները նույնպես հավասար են զրոյի։ Հետևաբար, սիստեմը բերվում է մեկ հավասարման, որն անմիջականորեն էլ պարզ կգտնենք, եթե երկրորդ հավասարումը կրճատենք 2-ով, երրորդ հավասարումը՝ 3-ով։ Սիստեմի լուծումներն ստանալու համար բավական է լուծել միայն առաջին հավասարումը, որ կտա՝*

$$y=x+z,$$

որտեղ y-*ն ու* z-*ը մնում են կամայական։*

§ 7. Երեք անհայտներով երեք առաջին աստիճանի հավասարումների սիստեմի ընդհանուր հետազոտությունը:

Դիտելով այժմ անհամասեռ հավասարումների՝

$$\left.\begin{aligned} X_1&\equiv a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\ X_2&\equiv a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\ X_3&\equiv a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{aligned}\right\}\qquad(26)$$

սիստեմի հետազոտմանը, դիտարկենք առանձին-առանձին մի շարք դեպքեր:

I. Եթե այդ սիստեմի Δ դետերմինանտը զրոյից տարբեր է, ապա սիստեմն ունի միակ որոշակի լուծում, որը որոշվում է (22′) բանաձևերով (§ 5):

II. Ենթադրենք, որ Δ դետերմինանտը հավասար է զրոյի, բայց նրա մինորներից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից. ընդհանրությունը չնվազեցնելով, կարող ենք ընդունել, որ այդ մինորն է՝

$$\delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0:$$

Այս դեպքում, ինչպես տեսանք § 6-ում, (26) հավասարումների ձախ մասերի միջև կա (24) գծային կախումը: Այստեղից հետևում է, որ եթե (26) սիստեմը լուծում ունի, ապա այդ սիստեմի աջ մասերի՝ d_1, d_2, d_3 թվերի միջև պետք է լինի նույն գծային կախումը, այսինքն՝ պետք է՝

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}=0:$$

Այսպիսով, II դեպքը ստորաբաժանվում է երկու ենթադեպքերի՝

II$_1$. Եթե

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}\neq 0,$$

ապա (26) սիստեմն անհամատեղ սիստեմ է, այսինքն՝ ոչ մի լուծում չունի:

II$_2$. Իսկ եթե

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}=0,$$

ապա տեղի կունենան հետևյալ երկու հավասարությունները՝

$$\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+\delta X_3=0,$$
$$\alpha_1 d_1+\alpha_2 d_2+\delta d_3=0,$$

որոնցից առաջինը տեղի ունի x-ի, y-ի, z-ի նկատմամբ նույնաբար, ինչպես այդ ցույց տվեց § 6-ում, իսկ երկրորդն ստացվում է տրված պայմանից՝ դետերմինանտն ըստ վերջին սյունակի էլեմենտների վերլուծելով:

Առաջին հավասարումից հանելով երկրորդը, կստանանք

$$\alpha(X_1-d_1)+\alpha_2(X_2-d_2)+\delta(X_3-d_3)=0$$

նույնությունը, որտեղից երևում է, որ (26) հավասարումներից երրորդը, այն է՝ $X_3-d_3=0$ հավասարումը առաջին երկուսի- $X_1-d_1=0$ և $X_2-d_2=0$, հավասարումների հետևանքն է։ (26)՝ սիստեմը լուծելու համար մնում է միասին լուծել նրա առաջին երկու հավասարումները, որոնք կարելի է գրել այսպես՝

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y&=d_1-c_1z, \\ a_2x+b_2y&=d_2-c_2z։ \end{aligned}\right\}$$

Այսպիսով, այդ սիստեմի լուծումը, հետևաբար նաև (26) սիստեմի լուծումը, կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1-c_1z & b_1 \\ d_2-c_2z & b_2 \end{vmatrix}}{\delta}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1-c_1z \\ a_2 & d_2-c_2z \end{vmatrix}}{\delta},$$

որտեղ z-ը մնում է կամայական։

III. Դիցուք, վերջապես, Δ դետերմինանտը և նրա բոլոր մինորները հավասար են զրոյի։ Ընդհանրությունը չխախտելով, կարելի է ընդունել $a_1\neq0$։ Այդ դեպքում, ինչպես ցույց տրվեց § 6-ում, (26) հավասարումների ձախ մասերի միջև գոյություն կունենան (25) երկու գծային կախումները։ Եթե տրված սիստեմը լուծում ունի, ապա հավասարումների d_1, d_2, d_3 աջ մասերի միջև ևս պետք է լինեն նույն գծային կախումները, այն է՝

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix}=0,$$

և III դեպքը ստորաբաժանվում է երկու ենթադեպքերի.

III$_1$. Եթե

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \text{ և } \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

դետերմինանտներից թեկուզ մեկը զրոյից տարբեր է, ապա (26) սիստեմն անհամատեղ սիստեմ է, այսինքն՝ լուծումներ չունի։

III$_2$. Իսկ եթե միաժամանակ

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}=0 \text{ և } \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix}=0,$$

ապա տեղի կունենան հետևյալ չորս հավասարությունները՝

$$a_1X_2-a_2X_1=0,\quad a_1X_3-a_3X_1=0,$$
$$a_1d_2-a_2d_1=0,\quad a_1d_3-a_3d_1=0,$$

որոնցից առաջին երկուսը տեղի ունեն x*-ի,* y*-ի,* z*-ի նկատմամբ նույնաբար, ինչպես այդ ցույց տրվեց § 6-ում, իսկ վերջին երկուսն արտահայտում են քննարկվող* III_2 *դեպքի պայմանները:*

Վերջին հավասարությունները զույգ-զույգ միմյանցից հանելով, կստանանք՝

$$a_1(X_2-d_2)-a_2(X_1-d_1)=0,$$
$$a_1(X_3-d_3)-a_3(X_1-d_1)=0,$$

որտեղից անմիջապես տեսնում ենք, որ (26) սիստեմի վերջին երկու հավասարումներն առաջին հավասարման հետևանքներն են:

Այսպիսով, (26) սիստեմը բերվում է միայն առաջին հավասարմանը. այն լուծելով x*-ի նկատմամբ, կստանանք (26) սիստեմի լուծումները՝*

$$x=\frac{d_1-b_1y-c_1z}{a_1},$$

որտեղ y*-ն ու* z*-ը մնում են կամայական:*

Ներկա պարագրաֆի հետազոտություններն ամփոփելով, հանգում ենք հետևյալ եզրակացություններին՝

Եթե (26) անհամասեռ սիստեմի Δ դետերմինանտը զրոյից տարբեր է, ապա սիստեմն ունի միակ լուծում, որը որոշվում է (22′) բանաձևերով:

Եթե Δ դետերմինանտը հավասար է զրոյի, բայց նրա մինորներից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է, ապա (26) սիստեմը կամ անհամատեղ սիստեմ է, կամ անորոշ է: Առաջին դեպքում

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2, \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \end{matrix} \tag{27}$$

աղյուսակին պատկանող 3-րդ կարգի դետերմինանտների թվում գոնե մեկը տարբեր է զրոյից, իսկ երկրորդ դեպքում այդ բոլոր դետերմինանտները հավասար են զրոյի և (26) սիստեմը բերվում է երկու հավասարումների:

Եթե, վերջապես, (26) սիստեմի դետերմինանտը և նրա բոլոր մինորները հավասար են զրոյի, ապա (26) սիստեմը կամ անհամատեղ սիստեմ է, կամ անորոշ է: Առաջին դեպքում (27) աղյուսակին պատկանող 2-րդ կարգի դետերմինանտներից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է, իսկ երկրորդ դեպքում այդ աղյուսակին պատկանող բոլոր 2-րդ կարգի դետերմինանտները հավասար են զրոյի և (26) սիստեմը բերվում է մեկ հավասարման:

Օ ր ի ն ա կ 1. Լուծել հետևյալ սիստեմը

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=5,\\ x-y+z&=1,\\ x+z&=2։ \end{aligned}\right\}$$

Սիստեմի դետերմինանտը՝

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

բայց նրա մինորների մեջ կա զրոյից տարբերը, օրինակ՝ $\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq0$։

Հետևյալ աղյուսակի՝

$$\begin{matrix} 1, & 1, & 1, & 5,\\ 1, & -1, & 1, & 1,\\ 1, & 0, & 1, & 2 \end{matrix}$$

3-րդ կարգի դետերմինանտների մեջ նույնպես կա զրոյից տարբերը, օրինակ՝

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-2\neq0։$$

հետևաբար, տված սիստեմը լուծում չունի, որ անմիջականորեն ակներև կդառնա, եթե առաջին երկու հավասարումները գումարենք և արդյունքը բաղդատենք երրորդ հավասարման հետ։

Օ ր ի ն ա կ 2. Լուծել հետևյալ սիստեմը՝

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=5,\\ x-y+z&=1,\\ x+z&=3։ \end{aligned}\right\}$$

Սիստեմի դետերմինանտը նույնն է, ինչ որ նախորդ օրինակում, հետևաբար, $\Delta=0$ և նրա մինորների թվում կա զրոյից տարբեր մինոր։ Հետևյալ աղյուսակի՝

$$\begin{matrix} 1, & 1, & 1, & 5,\\ 1, & -1, & 1, & 1,\\ 1, & 0, & 1, & 3, \end{matrix}$$

բոլոր 3-րդ կարգի դետերմինանտները հավասար են զրոյի։ Հետևաբար, տված սիստեմը բերվում է երկու հավասարումների, որ անմիջականորեն պարզ կդառնա, եթե առաջին երկու հավասարումները գումարենք։

Առաջին երկու հավասարումները համատեղ լուծելով, կստանանք՝

$$x+z=3, \quad y=2, \text{ կամ՝ } x=3-z, \quad y=2,$$

որտեղ z-ը կամայական է։

Օ ր ի ն ա կ 3. Լուծել հետևյալ սիստեմը՝

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z&=4, \\ 4x+2y+2z&=5, \\ 6x+3y+3z&=10։ \end{aligned}\right\}$$

Սիստեմի դետերմինանտը՝

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0։$$

Նրա բոլոր մինորները նույնպես հավասար են զրոյի։ Հետևյալ աղյուսակի՝

$$\begin{matrix} 2, & 1, & 1, & 4, \\ 4, & 2, & 2, & 5, \\ 6, & 3, & 3, & 10, \end{matrix}$$

2-րդ կարգի դետերմինանտների թվում կա զրոյից տարբեր դետերմինանտ, օրինակ՝ $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-3$։ Հետևաբար, տվյալ սիստեմն անհամատեղ սիստեմ է, որում կարելի է անմիջականորեն համոզվել, առաջին հավասարումը բազմապատկելով 2-ով կամ 3-ով և ստացածը բաղդատելով համապատասխանաբար երկրորդ կամ երրորդ հավասարման հետ։

Օ ր ի ն ա կ 4. Լուծել հետևյալ սիստեմը՝

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z&=4, \\ 4x+2y+2z&=8, \\ 6x+3y+3z&=12։ \end{aligned}\right\}$$

Սիստեմի դետերմինանտը նույնն է, ինչ որ նախորդ օրինակում, նշանակում է $\Delta=0$ և բոլոր մինորները նույնպես հավասար են զրոյի։ Հետևյալ՝

$$\begin{matrix} 2, & 1, & 1, & 4, \\ 4, & 2, & 3, & 8, \\ 6, & 3, & 3, & 12, \end{matrix}$$

աղյուսակի բոլոր 2-րդ կարգի դետերմինանտները հավասար են զրոյի։ Հետևաբար, տվյալ սիստեմը բերվում է մեկ հավասարման, որում կարելի է անմիջականորեն համոզվել, երկրորդ հավասարումը կրճատելով 2-ով, երրորդը՝ 3-ով։ Սիստեմի լուծումներն ստանալու համար, մնում է լուծել միայն առաջին հավասարումը։ Այդպիսով կգտնենք՝

$$z=4-2x-y,$$

որտեղ x-ն ու y-ը կամայական են։

§ 8. Դետերմինանտների մի քանի կիրառումներ անալիտիկ երկրաչափության մեջ:

1. Եռանկյան մակերեսը:

I գլխի § 10-ում մենք հաշվել ենք եռանկյան S մակերեսը նրա գագաթների կոորդինատների միջոցով և ստացել ենք հետևյալ բանաձևը՝

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix},$$

որը կարելի է գրել նաև այսպես՝

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 & 0 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}:$$

Առաջին երկու տողերի էլեմենտներին գումարելով երրորդ տողի էլեմենտները, վերջնականապես կստանանք՝

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}:$$

2. Երեք կետերի՝ մեկ ուղիղի վրա գտնվելու պայմանը:

Եթե տված երեք կետերը գտնվում են մեկ ուղիղի վրա, ապա $S=0$, և ընդհակառակը: Հետևաբար, (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) երեք կետերի մեկ ուղիղի վրա գտնվելու պայմանը կլինի՝

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0:$$

3. Տրված երկու կետերով անցնող ուղիղի հավասարումը:

Վերջին պայմանում (x_3, y_3)-ը փոխարինելով (x, y) ընթացիկ կոորդինատներով, կստանանք առաջին աստիճանի հավասարում՝

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}=0 \text{ կամ՝ } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

որը որոշում է տված (x_1, y_1) և (x_2, y_2) երկու կետերով անցնող ուղիղը:

Այս խնդիրը կարելի է լուծել նաև դետերմինանտների օգնությամբ, չդիմելով եռանկյան մակերեսի բանաձևին։ Դիցուք որոնելի ուղիղի հավասարումն է՝ $Ax+By+C=0$։ Քանի որ այս ուղիղը, պայմանի համաձայն, պետք է անցնի (x_1, y_1), (x_2, y_2) կետերով, ուստի սրանց կոորդինատները պետք է բավարարեն ուղիղի հավասարմանը, այսինքն՝

$$Ax_1+By_1+C=0, \quad Ax_2+By_2+C=0։$$

Այսպիսով ստանում ենք երեք հավասարումներ՝

$$\left.\begin{array}{l} Ax+By+C=0, \\ Ax_1+By_1+C=0, \\ Ax_2+By_2+C=0, \end{array}\right\}$$

որտեղ x-ը և y-ը մեր ուղիղի ցանկացած կետի կոորդինատներն են։ Այդ հավասարումները համասեռ են A, B, C անհայտների նկատմամբ։ Այդ սիստեմը պետք է ունենա զրոյից տարբեր լուծում։ Ինչպես գիտենք, դրա համար անհրաժեշտ և բավարար պայմանն այն է, որ սիստեմի դետերմինանտը հավասար լինի զրոյի, այսինքն՝

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0։$$

Ստացված x-ի և y-ի նկատմամբ առաջին աստիճանի հավասարումն, ակներևորեն, պատկերում է որոնելի ուղիղը։ Հեշտ է ստուգել, որ տված երկու կետերի կոորդինատները բավարարում են կազմած հավասարմանը։ Իսկապես, x-ի և y-ի փոխարեն դնելով տված կետերից մեկի կամ մյուսի կոորդինատները, ձախ մասում կստանանք այնպիսի դետերմինանտ, որն ունի երկու միատեսակ տողեր և, հետևաբար, հավասար է զրոյի։ Ստացած հավասարումը կարելի է դիտարկել նաև որպես պայման, որի դեպքում (x, y), (x_1, y_1) և (x_2, y_2) երեք կետերը գտնվում են մեկ ուղիղի վրա։

4. Երեք ուղիղների՝ մեկ կետում հատվելու պայմանը։

Դիցուք հետևյալ երեք ուղիղները՝

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3=0,$$

հատվում են (x_0, y_0) *կետում։ Այդ կետի կոորդինատները պետք է բավարարեն տված ուղիղների հավասարումներին՝*

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1=0,$$
$$A_2x_0+B_2y_0+C_2=0,$$
$$A_3x_0+B_3y_0+C_3=0։$$

Այս հավասարումները ցույց են տալիս, որ

$$A_1x+B_1y+C_1z=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z=0$$

համասեռ սիստեմն ունի $x=x_0$, $y=y_0$, $z=1$ *ոչ զրոյական լուծումը։ Հետևաբար, այդ սիստեմի դետերմինանտը պետք է հավասար լինի զրոյի, որը և մեզ տալիս է որոնելի պայմանը՝*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_2 & C_3 \end{vmatrix}=0։$$

Վարժություններ

1. *Հաշվել հետևյալ դետերմինանտները՝*

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix},$$

2. *Լուծել հետևյալ սիստեմները՝*

ա) $2x-z=1, \quad 2x+4y-z=1, \quad x-8y-3z=-2$։

բ) $x+y+z=a, \quad x+(1+a)y+z=2a, \quad x+y+(1+a)z=0$։

գ) $x+y+z=0, \quad 2x-3y+4z=0, \quad 4x-11y+10z=0$։

դ) $x+y+z=0, \quad 2x-3y+4z=0, \quad 5x-7y+8z=0$։

ե) $x+y+z=2, \quad 2x-3y+4z=3, \quad 4x-11y+10z=5$։

զ) $x-y+z=1, \quad x+y-z=2, \quad 5x+y-z=7$։

3. *Հաշվել (1, —2), (2, 3,), (4, 5) գագաթներ ունեցող եռանկյան մակերեսը։*

4. *(1, 1), (3, 3), (0, 0) երեք կետերը գտնվու՞մ են արդյոք մեկ ուղիղի վրա։*

5. *Կազմել (3, 2) և (—1, 3) երկու կետերով անցնող ուղիղի հավասարումը։*

6. *Գտնել* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ *գագաթներ ունեցող եռանկյան բարձրությունները։*

7. *Օգտվելով նախորդ վարժության լուծումից, գտնել* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ *գագաթներ ունեցող եռանկյան մակերեսը։*

8. *Ցույց տալ, որ* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ *գագաթներ ունեցող* ABCD *ուռուցիկ քառանկյան մակերեսը հավասար է՝*

$$\pm\frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right\}։$$

Գագաթների ինչպիսի՞ կարգով շրջանցման դեպքում փակագծերի ներսի արտահայտությունը $+$ *նշան կունենա։*

9. *Պարզեցնել հետևյալ արտահայտությունները՝*

$$ա)\ \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\beta & 1 \\ \sin\alpha & \cos\beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},\quad բ)\ \begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & 1 \\ -\cos\alpha & \cos\beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},\quad գ)\ \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos(\alpha+\beta) \\ \cos\beta & \cos(\alpha+\beta) & 1 \end{vmatrix}։$$

10. *Հաշվել հետևյալ դետերմինանտը՝*

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}։$$

11. *Հետևյալ հավասարումներից գտնել* x*-ը՝*

$$ա)\ \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad բ)\ \begin{vmatrix} x & -1 & 3 \\ -4 & x & 5 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix}=0,\quad գ)\ \begin{vmatrix} x & 2x & 9 \\ 3 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}=0։$$

12. *Ապացուցել հետևյալ նույնությունը՝*

$$\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix}=a(x-y)(y-z)(z-x)։$$

ԵՐԿՐՈՐԴ ՄԱՍ

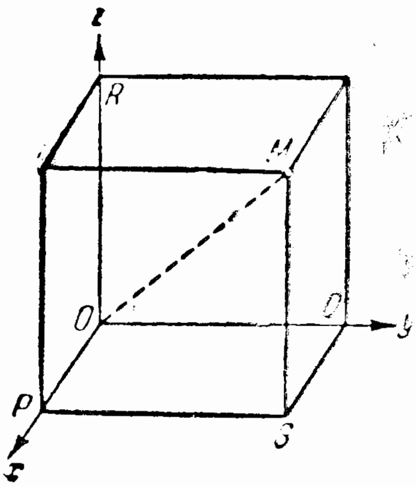
ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

ԳԼՈՒԽ I

ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

§ **1. Ուղղանկյուն կոորդինատներ:** Այժմ մի եղանակ ցույց տանք, որը հնարավորություն է տալիս տարածության ցանկացած կետի դիրքը որոշել թվերի միջոցով:

Տարածության մի որոշ O կետով տանենք Ox, Oy և Oz երեք փոխադարձաբար ուղղահայաց առանցքներ՝ **կոորդինատային առանցքներ**, որոնց նկատմամբ որոշելու ենք տարածության կետերի դիրքը: Կոորդինատային առանցքները սովորաբար դասավորում են այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծ. 82-ում, այն է՝ Ox և Oy առանցքները՝ հորիզոնական, իսկ Oz առանցքը՝ ուղղաձիգ. ընդ որում Ox առանցքը ուղղում են դեպի առաջ (դեպի ընթերցողի կողմը), Oy առանցքը՝ ձախից դեպի աջ, իսկ Oz առանցքը՝ ներքևից վերև[1]: Ox առանցքը կոչվում է **աբսցիսների առանցք**, Oy-ը՝ **օրդինատների առանցք**, Oz-ը՝ **ապլիկատների առանցք**: Կոորդինատային առանցքների հատման կետը կոչվում է **կոորդինատների սկզբնակետ**: Վերջապես ընտրենք մասշտաբի միավոր:

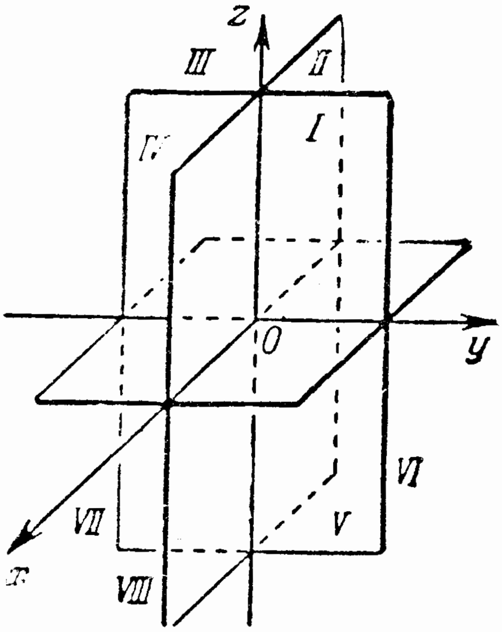


Գծ. 82

Այժմ տարածության ամեն մի կետի դիրքը կարելի է որոշել երեք թվերով՝ այդ կետի կոորդինատներով:

[1] Տե՛ս 2-րդ դիտողությունը այս §-ի վերջում:

Իսկապես, յուրաքանչյուր M կետին կոորդինատային առանցքների վրա համապատասխանում են երեք կետեր՝ P, Q, R, որոնք տված կետի պրոյեկցիաներն են այդ առանցքների վրա[1]։ Հակադարձաբար, գիտենալով P, Q, R կետերն առանցքների վրա, կարելի է կառուցել միակ M կետ տարածության մեջ, որի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա P, Q, R կետերն են։ Այսպիսով, տարածության M կետի դիրքը որոշելու հարցը հանգում է Ox, Oy և Oz առանցքների վրա նրա P, Q և R պրոյեկցիաների դիրքերը որոշելու հարցին։ Մենք արդեն գիտենք, որ Ox առանցքի վրա P կետի դիրքը լիովին որոշվում է այն x թվով, որն $\overline{OP}$ ուղղությամբ օժտված հատվածի մեծությունն է։ Այդ x թիվը, որը M կետի P պրոյեկցիայի կոորդինատն է Ox առանցքի վրա, ընդունվում է որպես M կետի առաջին կոորդինատ և կոչվում է նրա աբսցիս։ Ճիշտ այդպես էլ Q և R կետերի դիրքերը լիովին որոշվում են y և z թվերով, որոնք համապատասխանորեն $\overline{OQ}$ և $\overline{OR}$ ուղղությամբ օժտված հատվածների մեծություններն են։ y և z թվերը, որոնք M կետի Q և R պրոյեկցիաների կոորդինատներն են Oy և Oz առանցքների վրա, ընդունվում են որպես M կետի համապատասխանորեն երկրորդ և երրորդ կոորդինատներ, դրանցից y-ը կոչվում է օրդինատ, իսկ z-ը՝ ապլիկատ։



Գծ. 83

Այսպիսով, տարածության ցանկացած M կետի դիրքը լիովին որոշվում է x, y, z թվերի կարգավորված եռյակով, որոնցից առաջինը տված կետի աբսցիսն է, երկրորդը՝ օրդինատը, իսկ երրորդը՝ ապլիկատը։

Պայմանավորվենք կետի կոորդինատները գրել փակագծերում՝ կետը նշանակող տառի աջ կողքին, առաջին տեղը գրելով աբսցիսը, երկրորդ տեղը՝ օրդինատը, երրորդ տեղը՝ ապլիկատը, այն է՝ M(x, y, z)։

[1] Տարածության M կետի պրոյեկցիան առանցքի վրա՝ դա այդ առանցքի հատման կետն է իրեն ուղղահայաց այն հարթության հետ, որն անցնում է M կետով։

Ox, Oy և Oz *կոորդինատային առանցքները, զույգ-զույգ վերցրած, որոշում են* xOy, yOz *և* zOx *երեք փոխադարձաբար ուղղահայաց հարթություններ, որոնք կոչվում են* կոորդինատային հարթություններ: *Այդ երեք հարթությունները ամբողջ տարածությունը տրոհում են ութ մասերի, որոնք կոչվում են ութնորդներ (օկտանտներ), ընդ որում յուրաքանչյուր ութնորդի կետերին համապատասխանում է կոորդինատների նշանների որոշակի զուգակցություն (գծ. 83)՝*

I *ութնորդում* $x>0$, $y>0$, $z>0$,
II *ութնորդում* $x<0$, $y>0$, $z>0$,
III *ութնորդում* $x<0$, $y<0$, $z>0$,
IV *ութնորդում* $x>0$, $y<0$, $z>0$,
V *ութնորդում* $x>0$, $y>0$, $z<0$,
VI *ութնորդում* $x<0$, $y>0$, $z<0$,
VII *ութնորդում* $x<0$, $y<0$, $z<0$,
VIII *ութնորդում* $x>0$, $y<0$, $z<0$:

Եթե M *կետը գտնվում է* xOy *կոորդինատային հարթության վրա, ապա* $z=0$. *Նմանապես* yOz *հարթության կետերի համար* $x=0$, *իսկ* zOx *հարթության կետերի համար՝* $y=0$: *Եթե* M *կետը գտնվում է* Ox *առանցքի վրա, ապա* $y=z=0$. *Նմանապես* Oy *առանցքի կետերի համար՝* $z=x=0$. *իսկ* Oz *առանցքի կետերի համար՝* $x=y=0$: *Վերջապես, կոորդինատների սկզբնակետում* $x=y=z=0$:

Մեր նկարագրած եղանակում կետի դիրքը որոշող այդ երեք x, y, z *թվերը (կոորդինատները) կոչվում են* ուղղանկյուն կոորդինատներ, *որովհետև* M *կետը որոշվում է երեք այնպիսի հարթությունների հատումով, որոնք իրար հետ զույգ առ զույգ հատվում են ուղիղ անկյունով. դրանք կոչվում են նաև* դեկարտյան կոորդինատներ՝ *Դեկարտի անունով:*

Նկարագրված կոորդինատների մեթոդից բխում է հետևյալ երկու հիմնական խնդիրների լուծումը:

Խնդիր I. Տրված M կետով որոշել նրա կոորդինատները:

Տրված M *կետով տանենք կոորդինատային հարթություններին զուգահեռ երեք հարթություններ.* Ox, Oy, Oz *առանցքների հետ այդ հարթությունների հատման* P, Q, R *երեք կետերը, որոնք հանդիսանում են* M *կետի պրոյեկցիաները այդ առանցքների վրա, որոշում են կետի երեք կոորդինատները՝*

$x=$ *մեծ* $\overline{OP}$, $y=$ *մեծ* $\overline{OQ}$, $z=$ *մեծ* $\overline{OR}$:

M կետով տարված երեք հարթությունները երեք կոորդինատային հարթությունների հետ միասին կազմում են մի ուղղանկյուն զուգահեռանիստ, որի $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ *և* $\overline{OR}$ *կողերը կոչվում են M կետի կոորդինատային հատվածներ:*

Խնդիր II. Գիտենալով M կետի x, y, z կոորդինատները, կառուցել այդ կետը:

Տրված x, y, z *երեք թվերով կառուցում ենք* P, Q, R *երեք կետերը կոորդինատային առանցքների վրա՝ համապատասխան առանցքների վրա վերցնելով* $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ *և* $\overline{OR}$ *հատվածները, որոնց մեծությունները համապատասխանաբար հավասար են տված* x, y, z *թվերին:* P, Q, R *կետերով տանում ենք կոորդինատային հարթություններին զուգահեռ երեք հարթություններ. Նրանց հատումը կտա միակ M կետ, որի համար* x, y, z *թվերը կլինեն կոորդինատներ:*

Դիտողություն 1. Եթե պայմանավորվենք $\overline{PS}$ *և* $\overline{SM}$ *ուղղությամբ օժտված հատվածները (գծ. 82) դիտել որպես այնպիսի առանցքների հատվածներ, որոնց ուղղությունները համընկնում են իրենց զուգահեռ կոորդինատային առանցքների ուղղությունների հետ, ապա M կետի օրդինատը կարտահայտվի ոչ միայն* $\overline{OQ}$ *հատվածի մեծությամբ, այլև* $\overline{PS}$ *հատվածի մեծությամբ, որը նրան հավասար է:*

Նման ձևով, M կետի ապլիկատը կարտահայտվի ինչպես $\overline{OR}$ *հատվածի մեծությամբ, այնպես էլ* $\overline{SM}$ *հատվածի մեծությամբ:*

Այդ ժամանակ, վերոհիշյալ հիմնական խնդիրները լուծելիս, անհրաժեշտություն չկա կոորդինատային հարթություններին զուգահեռ հարթություններ տանել: Այսպես, I խնդրի մեջ տրված M կետից ուղղահայաց ենք իջեցնում xOy կոորդինատային հարթությանը. Նրա S հիմքը (գծ. 82) կլինի M կետի պրոյեկցիան xOy հարթության վրա: S կետից իջեցնում ենք ուղղահայաց Ox առանցքին. Նրա P հիմքը կլինի M կետի պրոյեկցիան Ox առանցքի վրա: Այդ ժամանակ $\overline{OPSM}$ *ուղղությամբ օժտված բեկյալի երեք հատվածները կորոշեն M կետի երեք կոորդինատները՝*

$$\text{մեծ}\,\overline{OP}=x,\quad \text{մեծ}\,\overline{PS}=y,\quad \text{մեծ}\,\overline{SM}=z:$$

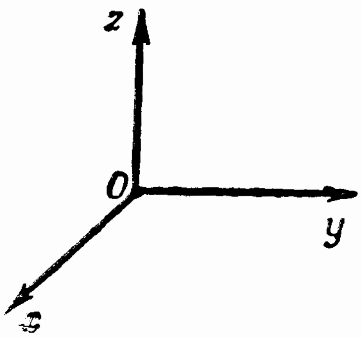
Նման ձևով ենք վարվում նաև տրված x, y, z *կոորդինատներով կետը կառուցելու վերաբերյալ* II *խնդիրը լուծելիս. Ox առանցքի վրա վերցնում ենք* $|x|$ *երկարություն ունեցող OP հատված (O կետից դեպի առաջ կամ դեպի ետ՝ նայած x-ի նշանին), այդ հատվածի P ծայրից xOy հարթության մեջ տանում* ենք Oy առանցքին զուգահեռ ուղիղ և նրա վրա վերցնում $|y|$ երկարություն ունեցող PS հատված (P կետից դեպի աջ կամ դեպի ձախ՝ նայած y-ի նշանին). այդ հատվածի S ծայրից տանում ենք Oz առանցքին զուգահեռ ուղիղ և նրա վրա վերցնում $|z|$ երկարություն ունեցող SM հատված (S կետից դեպի վեր կամ դեպի վար՝ նայած z-ի նշանին)։ Այդ հատվածի M ծայրը կլինի հենց որոնելի կետը։

$\overline{OP}$, $\overline{PS}$ և $\overline{SM}$ ուղղությամբ օժտված հատվածները (ինչպես և $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ և $\overline{OR}$ հատվածները) մենք անվանելու ենք M կետի կոորդինատային հատվածներ:

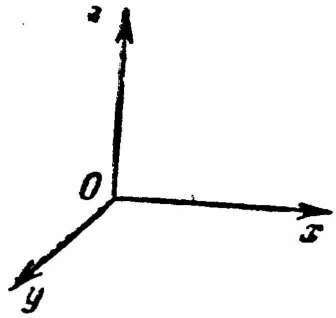
$\overline{OPSM}$ ուղղությամբ օժտված բեկյալը, որի սկիզբը կոորդինատների O սկզբնակետն է, իսկ ծայրը՝ M կետը, և որի երեք հատվածները M կետի համար կոորդինատային հատվածներ են հանդիսանում, անվանելու ենք M կետի կոորդինատային բեկյալ:

Մեր ամբողջ շարադրածից հետևում է, որ տարածության յուրաքանչյուր կետին կոորդինատների ընտրած սիստեմում համապատասխանում է x, y, z թվերի մի կարգավորված եռյակ՝ այդ կետի կոորդինատները, և, հակադարձաբար, x, y, z թվերի յուրաքանչյուր կարգավորված եռյակ տարածության մեջ որոշում է միակ կետ, որի համար այդ թվերը հանդիսանում են համապատասխանաբար աբսցիս, օրդինատ և ապլիկատ: Հետևաբար՝ եթե տրված է որևէ կետ՝ նշանակում է տրված են նրա կոորդինատները, գտնել որևէ կետ՝ նշանակում է գտնել նրա կոորդինատները:

Դիտողություն 2. Տարածության մեջ հնարավոր է դեկարտյան ուղղանկյուն կոորդինատային սիստեմի առանցքների երկու տեսակ դասավորություն. եթե մենք Oz դրական կիսառանցքի որևէ կետից նայենք Oy դրական կիսառանցքին, ապա Ox առանցքը կարող է ուղղված լինել դեպի աջ կամ դեպի ձախ: Առաջին դեպքում կոորդինատային սիստեմը կոչվում է աջ սիստեմ (գծ. 84), իսկ երկրորդ դեպքում՝ ձախ սիստեմ (գծ. 85): Աջ սիստեմի համար ուղիղ անկյան չափ պտույտը Ox առանցքից դեպի Oy առանցքը կկատարվի ժամացույցի սլաքի պտտման հակառակ ուղղությամբ (եթե xOy հարթությանը նայենք Oz դրական կիսառանցքի որևէ կետից), իսկ ձախ սիստեմի համար՝ ժամացույցի սլաքի պտտման ուղղությամբ: Կարելի է օգտագործել ինչպես աջ, այնպես էլ ձախ սիստեմ: Այսուհետև մենք, որպես կանոն, օգտագործելու ենք աջ կոորդինատային սիստեմը:



Գծ. 84

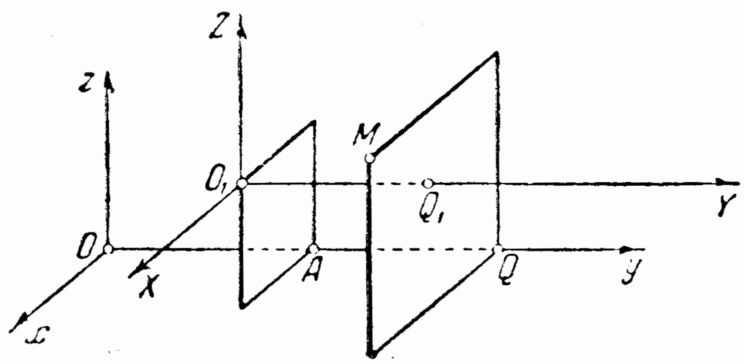


Գծ. 85

§ 2. Հիմնական խնդիրներ: *§ 1-ում շարադրված կոորդինատների մեթոդը կիրառելի է շատ խնդիրների լուծման համար: Նախ դիտարկենք օժանդակ բնույթ ունեցող մի խնդիր, իսկ հետո (ինչպես և գրքի առաջին մասում) կքննարկենք երկու կետերի հեռավորության և հատվածը տվյալ հարաբերությամբ բաժանելու վերաբերյալ խնդիրները:*

Խ ն դ ի ր I. Գիտենալով կետի կոորդինատները մի որոշ սիստեմի նկատմամբ, գտնել նույն կետի կոորդինատները մի նոր սիստեմի նկատմամբ, որի առանցքները զուգահեռ են նախկին առանցքներին:

M կետի կոորդինատները $Oxyz$ սիստեմի նկատմամբ թող լինեն x, y, z: Վերցնենք մի այլ՝ O_1XYZ կոորդինատային սիստեմ, որի O_1X, O_1Y, O_1Z առանցքները համապատասխանորեն զուգահեռ են Ox, Oy, Oz առանցքներին և ունեն նույն ուղղությունները (գծ. 86): O_1 նոր սկզբնակետի կոորդինատները հին սիստեմում թող լինեն a, b, c: M կետի կոորդինատները նոր



Գծ. 86

սիստեմում նշանակենք X, Y, Z: Հարց է առաջանում, ինչպե՞ս են միմյանց հետ կապված M կետի հին և նոր կոորդինատները:

Դիցուք A-ն O_1 կետի պրոյեկցիան է Oy առանցքի վրա, իսկ

Q-ն և Q_1-ը M կետի պրոյեկցիաներն են համապատասխանաբար Oy և O_1Y առանցքների վրա[1]: Այդ դեպքում (1-ին մաս, գլ. I, § 1)՝

$$\text{մեծ}\,\overline{OQ} = \text{մեծ}\,\overline{OA} + \text{մեծ}\,\overline{AQ} = \text{մեծ}\,\overline{OA} + \text{մեծ}\,O_1Q_1$$

կամ՝

$$y = b + Y: \tag{1}$$

Ճիշտ սրա նման, O_1 և M կետերը մեկ անգամ պրոյեկտելով Ox առանցքի վրա, մյուս անգամ՝ Oz առանցքի վրա, կգտնենք՝

$$x = a + X, \tag{2}$$

$$z = c + Z: \tag{3}$$

Ստացված բանաձևերը հնարավորություն են տալիս գտնելու x-ը, y-ը, z-ը, գիտենալով X-ը, Y-ը, Z-ը: Որպեսզի, հակադարձաբար, գիտենալով x-ը, y-ը, z-ը, գտնենք X, Y, Z նոր կոորդինատները, պետք է (2), (1), (3) հավասարումները լուծենք X-ի, Y-ի, Z-ի նկատմամբ: Կունենանք՝

$$X = x - a, \quad Y = y - b, \quad Z = z - c: \tag{4}$$

Խ ն դ ի ր **II. Գտնել տրված երկու կետերի հեռավորությունը:**

Եթե M կետն ունի x, y, z կոորդինատները, ապա նրա հեռավորությունները կոորդինատների սկզբնակետից իրենից ներկայացնում է այն ուղղանկյուն զուգահեռանիստի անկյունագծի երկարությունը, որի երեք չափումներն են $|x|$-ը, $|y|$-ը և $|z|$-ը (գծ. 82): Հետևաբար, որոնելի հեռավորությունը նշանակելով d, կունենանք՝

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{5ա}$$

որտեղից՝

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{5}$$

այսինքն՝ M(x, y, z) **կետի սկզբնակետից ունեցած հեռավորության քառակուսին հավասար է այդ կետի կոորդինատների քառակուսիների գումարին:**

Դիցուք այժմ տված են $M_1(x_1, y_1\, z_1,)$ և $M_2(x_2, y_2, z_2)$ երկու կետերը: Նրանց միջև հեռավորությունը գտնելու համար կոորդինատների սկզբնակետը տեղափոխենք $M_1(x_1, y_1\, z_1)$ կետը, պահպանելով առանցքների ուղղությունները: Նոր կոորդինատային առանցքների նկատմամբ M_1 կետի կոորդինատները կլինեն (0, 0, 0), իսկ M_2 կետի կոորդինատները կորոշվեն (4) բանաձևերով՝

---

[1] Բանաձևն արտածում ենք y կոորդինատի համար, որովհետև այս դեպքում գծագիրն առավել ակնառու է:

$M_2(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$: *Հետևաբար, ըստ (5ա) կամ (5) բանաձևի կունենանք՝*

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2, \tag{6ա}$$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}, \tag{6}$$

այսինքն՝ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *և* $M_2(x_2, y_2, z_2)$ երկու կետերի հեռավորության քառակուսին հավասար է այդ կետերի համանուն կոորդինատների տարբերությունների քառակուսիների գումարին:

Օրինակ: Գտնել $M_1(1, 2, 3)$ *և* $M_2(-1, 2, -2)$ *կետերի հեռավորությունը:*

Ըստ (6) բանաձևի, որոնելի հեռավորությունը կլինի՝

$$d=\sqrt{2^2+0+5^2}=\sqrt{29}:$$

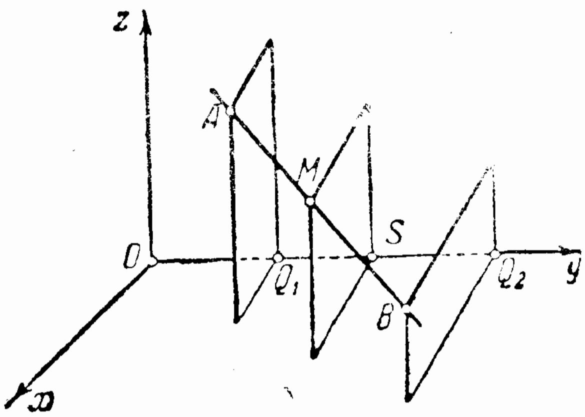
Խնդիր **III. Գտնել տված $\overline{AB}$ հատվածը տված հարաբերությամբ բաժանող M կետի կոորդինատները:**

Դիցուք տված են $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ *կետերը և*

$$\lambda=\frac{\text{մեծ}\,\overline{AM}}{\text{մեծ}\,\overline{MB}} \tag{7}$$

հարաբերությունը, որտեղ $M(x, y, z)$*-ը մի որոշ կետ է* AB *ուղիղի վրա*[1]*: Գտնենք* M *կետի* x, y, z *կոորդինատները:*

Դիցուք Q_1*-ը,* S*-ը և* Q_2*-ը* A, M *և* B *կետերի պրոյեկցիաներն են* Oy *առանցքի վրա (գծ. 87): Քանի որ երկու ուղիղների՝ զուգահեռ հարթությունների միջև գտնվող հատվածները համեմատական են, ուստի կարող ենք գրել՝* $AM:MB=Q_1S:SQ_2$:



Գծ. 87

Հեշտ է նկատել, որ $\overline{AM}$, $\overline{MB}$, $\overline{Q_1S}$ *և* $\overline{SQ_2}$ *հատվածների մեծությունները ևս բավարարում են նույնպիսի հավասարության՝*

$$\frac{\text{մեծ}\,\overline{AM}}{\text{մեծ}\,\overline{MB}}=\frac{\text{մեծ}\,\overline{Q_1S}}{\text{մեծ}\,\overline{SQ_2}}: \tag{8}$$

Քանի որ (1-ին մաս, գլ. I, § 3)՝

$$\text{մեծ}\,\overline{Q_1S}=y-y_1, \qquad \text{մեծ}\,\overline{SQ_2}=y_2-y,$$

---

[1] *Ուղղի դրվածքի մասին ավելի մանրամասն տե՛ս 1-ին մաս, գլ. I, § 6:*

ապա, նկատի ունենալով (7) պայմանը, (8) հավասարությունը կգրենք այսպես՝

$$\frac{y-y_1}{y_2-y}=\lambda:$$

Այստեղից գտնելով y-ը, կստանանք՝

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}: \tag{9}$$

Որոնելի M կետի x և z կոորդինատները գտնելու համար A, M և B կետերը մեկ անգամ կպրոյեկտենք Ox առանցքի վրա, մյուս անգամ՝ Oz առանցքի վրա, և նման ձևով կստանանք՝

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \tag{10}$$

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}: \tag{11}$$

Ստացված բանաձևերում ընդունելով $\lambda=1$, կգտնենք հատվածի միջնակետի կոորդինատները՝

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \quad z=\frac{z_1+z_2}{2} \tag{12}$$

այսինքն՝ հատվածի միջնակետի յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է նրա ծայրակետերի համանուն կոորդինատների կիսագումարին:

Օրինակ: Գտնել այն M կետի կոորդինատները, որը A(1, 2, 3,) և B(—1, 2, 3) կետերը միացնող AB հատվածը բաժանում է 1 : 2 հարաբերությամբ:

Այստեղ՝

$$x_1=1,\ y_1=2,\ z_1=3,\ x_2=-1,\ y_2=2,\ z_2=3 \text{ և } \lambda=\frac{1}{2}:$$

Հետևաբար՝

$$x=\frac{1-\frac{1}{2}\cdot 1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}, \quad y=\frac{2+\frac{1}{2}\cdot 2}{1+\frac{1}{2}}=2, \quad z=\frac{3+\frac{1}{2}\cdot 3}{1+\frac{1}{2}}=3:$$

§ 3. Պրոյեկցիաների տեսության հիմնական դրույթները տարածության մեջ: *Նախապես մենք ճշգրտենք տարածության մեջ երկու առանցքներով կազմված անկյան գաղափարը:*

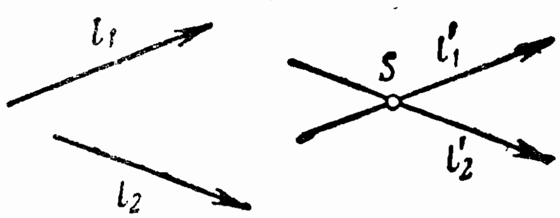
Դիտարկենք l_1 և l_2 երկու առանցքներ, որոնք հատվում են S կետում: Նրանցով կազմված անկյուն ասելով պայմանավորվում ենք հասկանալ այն անկյունը, որով պետք է այդ առանցքներից մեկը պտտել S կետի շուրջը, որպեսզի նրա դրական ուղղությունը համընկնի մյուս առանցքի դրական ուղղության հետ (պտտումը կատարվում է տված առանցքներով որոշվող հարթության մեջ):

Պայմանավորվենք անկյունը վերցնել 0-ից մինչև π սահմաններում, առանցքները նշելու հերթականությունը հաշվի չառնելով (եթե հատուկ ցուցում չի արվում): Դրա շնորհիվ l_1 և l_2 առանցքներով կազմված անկյունը կնշանակենք $(\widehat{l_1, l_2})$ կամ $(\widehat{l_2, l_1})$:

Նկատենք, որ հարթության վրա երկու առանցքներով կազմված անկյունը մենք վերցնում էինք իր նշանով (նշանն ընտրվում էր պտտման ուղղությունից կախված՝ ժամացույցի սլաքի շարժման ուղղությամբ կամ հակառակը): Սակայն տարածության մեջ մի առանցքից դեպի մյուսը պտտման ուղղությունը կախված է այն բանից, թե մենք ո՞ր կողմից կնայենք տված երկու հատվող առանցքներով որոշվող հարթությանը: Այդ պատճառով էլ տարածության մեջ մենք պայմանավորվում ենք չտարբերել առանցքների տրման կարգը և անկյունը վերցնել 0-ից մինչև π սահմաններում:

Մենք ենթադրեցինք, որ տված առանցքներն ընդհանուր կետ ունեն:

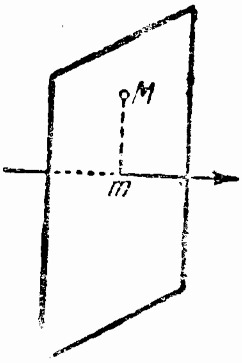
Այժմ դիտարկենք l_1 և l_2 երկու չհատվող առանցքներ (գծ. 88): Տարածության մեջ վերցնենք մի կամայական S կետ և այդ կետից տանենք երկու l'_1 ու l'_2 առանցքներ, որոնք համապատասխանորեն զուգահեռ են տված l_1 և l_2 առանցքներին և ունեն նրանց ուղղությունները. l_1 և l_2 չհատվող առանցքներով կազմված անկյուն մենք համարելու ենք l'_1 և l'_2 հատվող առանցքներով կազմված անկյունը:



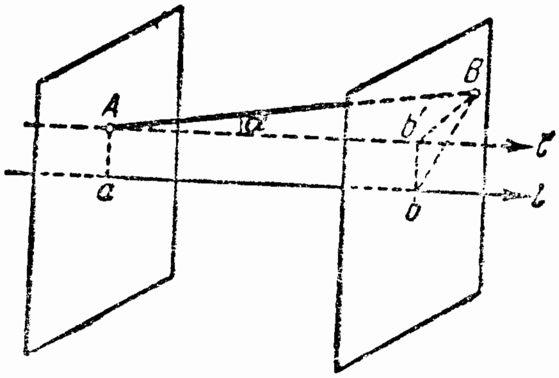
Գծ. 88

Տարածության մեջ առանցքով և ուղղությամբ օժտված հատվածով կազմված անկյուն ասելով պայմանավորվենք հասկանալ տված առանցքով և այնպիսի առանցքով կազմված անկյունը, որի դրական ուղղությունը համընկնում է տված հատվածի ուղղության հետ:

Նման ձևով, երկու ուղղությամբ օժտված հատվածներով կազմված անկյուն համարելու ենք երկու այնպիսի առանցքներով կազմված անկյունը, որոնց դրական ուղղությունները համընկնում



Գծ. 89



Գծ. 90

են տված հատվածների համապատասխան ուղղությունների հետ։

Պրոյեկցիաների տեսության հիմնական դրույթները (1-ին մաս, գլ. I, § 8) հեշտ է փոխադրել տարածության մեջ։ Ինչպես արդեն ասել ենք, տարածության M կետի պրոյեկցիա որևէ առանցքի վրա կոչվում է այդ առանցքի և այն հարթության հատման m կետը, որն անցնում է M կետով և ուղղահայաց է այդ առանցքին (գծ. 89)։ Ուղղությամբ օժտված հատվածի պրոյեկցիան առանցքի վրա տարածության մեջ սահմանվում է այնպես, ինչպես հարթության վրա՝ $\text{պր}_l \overline{AB} = \text{մեծ}\ \overline{ab}$ (գծ. 90)։

Ինչպես և հարթության վրա, $\overline{AB}$ ուղղությամբ օժտված հատվածի պրոյեկցիան l առանցքի վրա հավասար է պրոյեկտվող հատվածի AB երկարությանը, բազմապատկած պրոյեկցիաների առանցքի հետ տված հատվածի կազմած α անկյան կոսինուսով՝

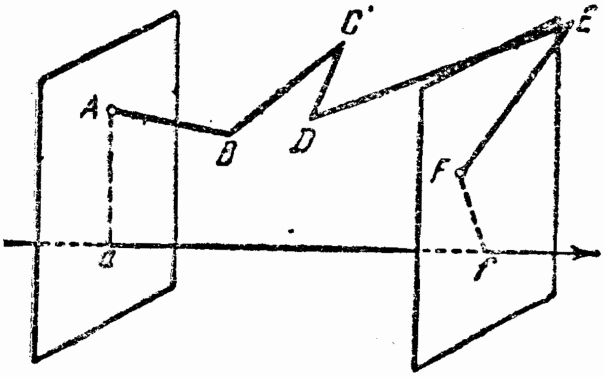
$$\text{պր}_l \overline{AB} = AB \cos\alpha \text{։} \qquad (13)$$

Այս բանաձևը տարածության դեպքում ապացուցելու համար $\overline{AB}$ հատվածի A սկզբից տանենք l առանցքին զուգահեռ և նրա ուղղությունն ունեցող l' առանցք (գծ. 90)։ Ակներևորեն, $\text{պր}_l \overline{AB} = \text{պր}_l \overline{AB}$ և l առանցքի հետ $\overline{AB}$ հատվածի կազմած α անկյունը հավասար է l' առանցքի հետ նույն այդ հատվածի կազմած անկյանը։ Այժմ կարելի է օգտվել այն բանից, որ ապացուցվելիք բանաձևն իրավացի է մի հարթության մեջ գտնվող $\overline{AB}$ հատվածի և l' առանցքի համար։ Մնում է նկատել նաև, որ չնայած առանցքի հետ հատվածի կազմած α անկյունը մենք հարթության վրա վերցնում էինք + կամ — նշանով, ինչպես և թույլ էինք տալիս α-ի համար π-ից մեծ արժեքներ, բայց միշտ կարելի է այդ անկյունը վերցնել բացարձակ արժեքով ոչ մեծ π-ից. բացի դրանից,

(13) բանաձևում կարելի է անկյունը փոխարինել իր բացարձակ մեծությամբ, որ չի ազդի կոսինուսի արժեքի վրա: Այսպիսով, այդ բանաձևում բավական է անկյունը վերցնել 0-ից մինչև π սահմաններում, որ համապատասխանում է անկյան սահմանումին տարածական դեպքի համար:

Նմանապես հեշտ է ստուգել, որ եթե դիտարկվող $\overline{AB}$ հատվածը գտնվում է որոշ U առանցքի վրա, ապա նրա պրոյեկցիան l առանցքի վրա տարածության դեպքում նույնպես հավասար կլինի հատվածի մեծությանը, բազմապատկած l առանցքի հետ U առանցքի կազմած φ անկյան կոսինուսով՝

$$\text{պր}_l\overline{AB} = \text{մեծ}\ \overline{AB}\ \cos\varphi: \qquad (14)$$



Գծ. 91

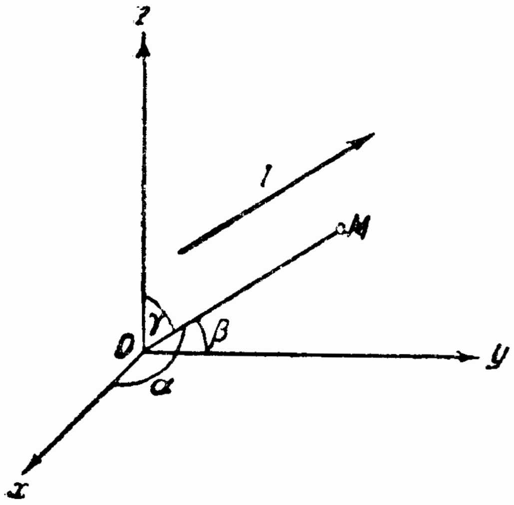
Ուղղությամբ օժտված բեկյալի ու նրա պրոյեկցիայի սահմանումները մնում են նույնը, ինչ որ հարթության դեպքում: Գծ. 91-ում՝

$$\text{պր}\ \overline{ABCDEF} = \text{մեծ}\ \overline{af}:$$

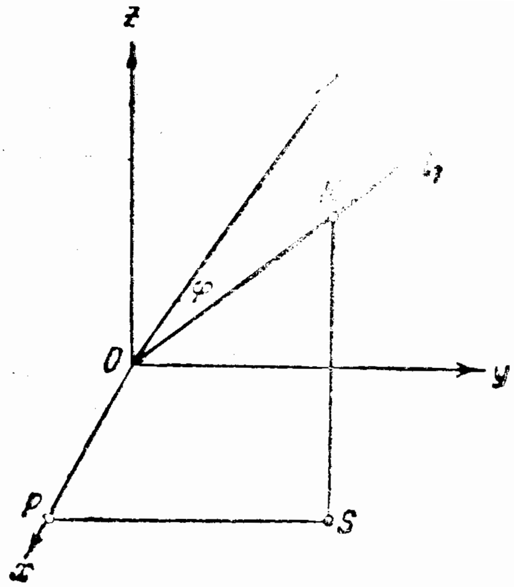
Ինչպես և առաջ, բեկյալի պրոյեկցիան հավասար է նրա հատվածների պրոյեկցիաների գումարին. բեկյալի պրոյեկցիան կախված չէ բեկյալի ձևից, այլ կախված է միայն նրա սկզբի ու ծայրի կետերի դիրքերից. բեկյալի պրոյեկցիան հավասար է նրա փակող հատվածի պրոյեկցիային. փակ բեկյալի պրոյեկցիան հավասար է զրոյի:

§ 4. Երկու առանցքներով կազմված անկյան հաշվումը տարածության մեջ: *Դիտարկենք մի l առանցք տարածության մեջ. դիցուք α-ն, β-ն և γ-ն նրա կազմած անկյուններն են կոորդինատային առանցքների հետ (գծ. 92):*

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ և $\cos\gamma$ թվերն անվանենք այդ առանցքի ուղղորդ կոսինուսներ: Այդ ուղղորդ կոսինուսներն իրարից անկախ չեն, նրանք միմյանց հետ կապված են մի որոշ առնչությամբ: Այդ առնչությունն ստանալու համար, կոորդինատների սկզբնակետից տանենք մի $\overline{OM}$ հատված, որի երկարությունը հավասար է միավորի, իսկ ուղղությունը համընկնում է l առանցքի դրական ուղղության հետ: Այդ հատվածի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա (նրանք, ակներևորեն, M կետի կոորդինատ-



Գծ. 92



Գծ. 93

ները են) կլինեն cosα-ն, cosβ-ն և cosγ-ն: M կետի՝ սկզբնակետից ունեցած հեռավորության (5) բանաձևի համաձայն ունենք՝

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad (15)$$

այսինքն՝ **ամեն մի առանցքի ուղղորդ կոսինուսների քառակուսիների գումարը հավասար է 1-ի:**

Գտնենք երկու առանցքներով կազմված անկյան կոսինուսի արտահայտությունը: Դիտարկենք կոորդինատների սկզբնակետով անցնող երկու առանցքներ՝ l_1 և l_2, դիցուք α_1, β_1, γ_1-ը՝ l_1 առանցքի կազմած անկյուններն են կոորդինատային առանցքների հետ, իսկ α_2, β_2, γ_2-ը՝ l_2-ինը: l_1 առանցքի վրա վերցնենք կոորդինատների սկզբնակետից OM=1 հեռավորություն ունեցող M կետը (M կետի կոորդինատները կլինեն՝ $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$) և M կետի $\overline{OPSM}$ կոորդինատային բեկյալը պրոյեկտենք l_2 առանցքի վրա: Քանի որ բեկյալի պրոյեկցիան հավասար է փակող հատվածի պրոյեկցիային, ապա՝

$$\text{պր}\;\overline{OPSM}=\text{պր}\;\overline{OM}=1\cdot\cos\varphi=\cos\varphi:$$

Մյուս կողմից էլ, բեկյալի պրոյեկցիան հավասար է նրա հատվածների պրոյեկցիաների գումարին՝

$$\text{պր}\;\overline{OPSM}=\text{պր}\;\overline{OP}+\text{պր}\;\overline{PS}+\text{պր}\;\overline{SM}$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\text{պր}\;\overline{OP}+\text{պր}\;\overline{PS}+\text{պր}\;\overline{SM}=\text{պր}\;\overline{OM}=\cos\varphi:$$

Քանի որ՝

$$\text{պր}\ \overline{OP}=\text{մեծ}\ \overline{OP}\cos\alpha_2=\cos\alpha_1\cos\alpha_2,$$
$$\text{պր}\ \overline{PS}=\text{մեծ}\ \overline{PS}\cos\beta_2=\cos\beta_1\cos\beta_2,$$
$$\text{պր}\ \overline{SM}=\text{մեծ}\ \overline{SM}\cos\gamma_2=\cos\gamma_1\cos\gamma_2,$$

ապա՝

$$\cos\varphi=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2. \tag{16}$$

Մասնավորապես, երբ l_1 և l_2 առանցքներն ուղղահայաց են, $\cos\varphi=0$ և (16) բանաձևը տալիս է երկու առանցքների ուղղահայացության պայմանը՝

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0. \tag{17}$$

Դիտողություն։ Մենք միշտ խոսում էինք առանցքի ուղղորդ կոսինուսների մասին։ Այն դեպքում, երբ խոսք կլինի ուղիղի ուղղորդ կոսինուսների մասին, մենք դրանց տակ կհասկանանք այն առանցքի ուղղորդ կոսինուսները, որը կստացվի, երբ տված ուղիղի վրա որպես դրական ուղղություն ընտրենք երկու հնարավոր ուղղություններից որևէ մեկը։ Ակներևորեն, ուղիղի վրա ընտրված դրական ուղղությունն իր հակառակ ուղղությամբ փոխարինելիս, ուղղորդ կոսինուսների նշանները կփոխվեն։

Վարժություններ

1. Կառուցել հետևյալ կետերն իրենց կոորդինատներով՝
ա) (4, 3, 5), բ) (1, 2, −1), գ) (4, 4, 4), դ), (−4, −4, −4)։

2. Նշել հետևյալ կետերի դիրքերի առանձնահատկությունները՝
ա) (4, 0, 0), բ) (0, −7, 0), գ) (0, −7, 2), դ) (−5, 0, 3)։

3. Տրված են (2, −3, −1) և (a, b, c) կետերը։ Գտնել այն կետերի կոորդինատները, որոնք սիմետրիկ են այդ կետերից յուրաքանչյուրին՝ ա) կոորդինատային հարթությունների նկատմամբ, բ) կոորդինատային առանցքների նկատմամբ, գ) կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ։

4. $SP_1P_2P_3P_4$ կանոնավոր քառանկյուն բուրգը, որի յուրաքանչյուր կողն ունի a երկարություն, դասավորված է հետևյալ կերպ. S գագաթը գտնվում է Oz առանցքի վրա, իսկ հիմքը՝ xOy հարթության վրա, ընդ որում P_1P_2 կողը ուղղահայաց է Oy առանցքին, P_1P_4 կողը՝ Ox առանցքին։ Գտնել S, P_1, P_2, P_3, P_4 կետերի կոորդինատները։

5. Գտնել $A(4, -3, 5)$ կետի հեռավորությունը կոորդինատների սկզբնակետից և կոորդինատային առանցքներից։

6. Գտնել (1, 2, 2) և (−1, 0, 1) կետերի հեռավորությունը։

7. Ցույց տալ, որ $A(1, -2, 1)$, $B(3, -3, -1)$, $C(4, 0, 3)$ գագաթներ ունեցող եռանկյունը՝ ուղղանկյուն եռանկյուն է։

8*. Տրված են չորս կետեր՝ (0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 6)։

Գտնել այդ կետերով անցնող սֆերայի (գնդային մակերևույթի) շառավիղը։

9. Գտնել այն կետի կոորդինատները, որն A(1, 1, 1) և B(1, 2, 0) կետերը միացնող $\overline{AB}$ հատվածը բաժանում է 2:1 հարաբերությամբ։

10. Գտնել այն եռանկյան կողմերի երկարությունները և ծանրության կենտրոնի կոորդինատները, որի գագաթները գտնվում են A(2, 5, 0), B(11, 3, 8), C(5, 1, 12) կետերում։

11. $\overline{AB}$ հատվածը C կետով բաժանվում է 5:2 հարաբերությամբ։ A և C կետերը համապատասխանորեն ունեն (3, 7, 4) և (8, 2, 3) կոորդինատները։ Գտնել B կետի կոորդինատները։

12. Երկու կոորդինատային սիստեմներ ունեն առանցքների միևնույն ուղղությունները, բայց տարբեր սկզբնակետեր։ Գիտենալով, որ միևնույն կետն այդ երկու սիստեմներում որոշվում է (1, 1, 1) և (7, 3, —5) կոորդինատներով, գտնել երկու սիստեմների սկզբնակետերը միացնող հատվածի միջնակետի կոորդինատները։

13. Գոյություն ունի՞ արդյոք այնպիսի ճառագայթ, որը կոորդինատային առանցքների հետ կազմի (45°, 45°, 60°) անկյուններ։

14. OM ճառագայթը կոորդինատային առանցքների հետ կազմում է հավասար սուր անկյուններ։ Գտնել այդ ճառագայթի ուղղորդ կոսինուսները։

15. OM ճառագայթը Ox բացասական կիսառանցքի և Oy ու Oz դրական կիսառանցքների հետ կազմում է հավասար սուր անկյուններ։ Գտնել այդ ճառագայթի ուղղորդ կոսինուսները։

16. Գտնել կոորդինատների սկզբնակետով և (2, —2, —1) կետով անցնող ուղիղի ուղղորդ կոսինուսները։

17. Գտնել կոորդինատների սկզբնակետով և (a, a, a) կետով անցնող ուղիղի ուղղորդ կոսինուսները։

18. Գտնել այն ուժի մեծությունն ու ուղղությունը, որի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա համապատասխանաբար հավասար են՝ $X=-6$, $Y=-2$, $Z=9$։

19. Մի որոշ A կետի z ապլիկատը դրական է. $\overline{OA}$ հատվածն ունի $r=6$ երկարություն և Ox առանցքի հետ կազմում է 60°, իսկ Oy առանցքի հետ 45° անկյուն։ Գտնել Oz առանցքի հետ այդ հատվածի կազմած անկյունը և A կետի կոորդինատները։

20. A կետն ունի $x=15$, $y=8$, $z<0$ կոորդինատներ. $\overline{OA}$ հատվածն Ox առանցքի հետ կազմում է 30° անկյուն։ Գտնել այդ հատվածի երկարությունը, նրա ուղղորդ կոսինուսները և A կետի z ապլիկատը։

21. Տրված է A(6, 3, 2) կետը։ Գտնել կոորդինատային հարթությունների հետ OA ճառագայթի կազմած անկյունների կոսինուսները։

22*. Գտնել A(2, 5, —1) և B(5, 1, 11) կետերի հեռավորությունը և նրանցով անցնող ուղիղի ուղղորդ կոսինուսները։

23. Գտնել A(—2, 2, 5) և B(2, —1, 5) կետերի հեռավորությունը և նրանցով անցնող ուղիղի ուղղորդ կոսինուսները։

24. Գտնել xOy և yOz անկյունների կիսորդներով կազմված անկյունը։

25. Գտնել այն երկու ուղիղներով կազմված անկյունը, որոնցից մեկն անցնում է (0, 0, 0) և (10, 5, 10) կետերով, մյուսը՝ (—2, 1, 3) և (0, —1, 2) կետերով։

ԳԼՈՒԽ II

ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՏԱՐՐԵՐԸ

§ **1. Վեկտորներ և սկալյարներ:** *Այն մեծությունները, որոնց հետ հարկ է լինում հանդիպել մեխանիկայում, ֆիզիկայում և մյուս կիրառական դիսցիպլիններում, երկու բնույթի են լինում։ Մի կողմից, այնպիսի մեծություններ, ինչպես ջերմաստիճանը, ժամանակը, զանգվածը, խտությունը, հատվածի երկարությունը, մակերեսը, ծավալը և այլն, լրիվին բնորոշվում են միայն թվային արժեքով։ Մյուս կողմից, այնպիսի մեծություններ, ինչպես ուժը, արագությունը, արագացումը և այլն, լրիվին որոշվում են միայն այն ժամանակ, երբ հայտնի են դառնում նրանց թվային արժեքները և ուղղությունները տարածության մեջ։ Առաջին բնույթի մեծությունները կոչվում են* սկալյար մեծություններ *կամ, ավելի կարճ,* սկալյարներ: *Երկրորդ բնույթի մեծությունները կոչվում են* վեկտորական մեծություններ:

Յուրաքանչյուր վեկտորական մեծություն երկրաչափորեն կարող ենք պատկերել որոշակի երկարություն և որոշակի ուղղություն ունեցող հատվածի օգնությամբ, եթե հատվածի երկարությունը (մասշտաբի ընտրված միավորի դեպքում) ընդունենք հավասար վեկտորական մեծության թվային արժեքին, իսկ հատվածի ուղղությունը համարենք համընկած վեկտորական մեծության ուղղության հետ։

Որոշակի երկարություն և տարածության մեջ որոշակի ուղղություն ունեցող հատվածը (այսինքն՝ ուղղությամբ օժտված հատվածը) մենք անվանելու ենք վեկտոր։ *Այսպիսով, վեկտորը ծառայում է ֆիզիկական վեկտորական մեծությունը երկրաչափորեն պատկերելու համար*[1]*։*

---

[1] *Երբեմն վեկտորական մեծությունը նույնպես վեկտոր են անվանում։*

Երկու վեկտորներ հավասար են համարվում, *եթե տեղի ունեն հետևյալ երեք պայմանները՝* 1) վեկտորների երկարությունները հավասար են, 2) վեկտորները զուգահեռ են, *այսինքն՝ գտնվում են մեկ ուղիղի կամ զուգահեռ ուղիղների վրա,* 3) վեկտորներն ուղղված են դեպի միևնույն կողմը:

Հարկավոր է տարբերել վեկտորի սկիզբը և ծայրը: Նրանց տեղերը փոխելով, մենք կստանանք մի այլ վեկտոր (որն ուղղված է առաջինի հակառակ կողմը): Վեկտորների հավասարության սահմանումից հետևում է, որ վեկտորը զուգահեռ տեղափոխելիս ստացվում է տվածին հավասար վեկտոր: Դրա շնորհիվ, վեկտորի սկիզբը կարելի է տեղափոխել տարածության ցանկացած կետը[1]*: Ընտրելով մի որոշ սկզբնակետ՝* O *կետը, հարմար կլինի ընդունել, որ բոլոր վեկտորները ելնեն, սկիզբ առնեն այդ կետից: Այդ դեպքում մենք կասենք, որ վեկտորները բերված են* O *ընդհանուր սկզբի:*

Պայմանավորվում ենք վեկտորի ուղղությունը գծագրի վրա նշել սլաքով: Գրքի տեքստում վեկտորները կնշանակենք կամ մեկ թավատառով, կամ երկու տառով՝ վերևից սլաք դրած, ընդ որում, առաջին տառը ցույց կտա վեկտորի սկիզբը, երկրորդը՝ ծայրը: Այսպես, O *կետից* M *կետն ընթացող վեկտորը կնշանակենք կամ երկու տառով՝* $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, *կամ միայն մեկ տառով՝ այն տառով, որը գրված է վեկտորի ծայրին. հետևաբար, մենք ընդունում ենք՝*

$$\boldsymbol{M}=\overrightarrow{\mathrm{OM}},\qquad \boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ \text{և այլն:}$$

Եթե վեկտորի սկիզբը չի համընկնում ընտրված O *սկզբնակետի հետ, ապա, թյուրիմացություններից խուսափելու համար, մենք սովորաբար գործ կածենք երկու տառ՝* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$*: Վեկտորի երկարությունը, որ անվանում են նաև վեկտորի մոդուլ կամ վեկտորի սկալյար, նշանակելու ենք նույն տառերով, ինչ որ վեկտորը, սակայն առանց սլաքի (կամ, եթե վեկտորը մեկ տառով է նշանակված, ապա՝ նույն տառով, բայց ոչ թավատառ): Երբեմն վեկտորի երկարությունը նշանակում են հանրահաշվում սովորաբար գործած-*

[1] *Ուղղությամբ օժտված հատվածի համար մուծվում է նոր տերմին՝ վեկտոր, որովհետև այժմ, սահմանելով ուղղությամբ օժտված հատվածների՝ վեկտորների հավասարության գաղափարը, մենք նրանց հետ* գործողություններ *ենք կատարելու որոշակի կանոններով, որոնք դիտարկվում են վեկտորական հանրահաշվում:*

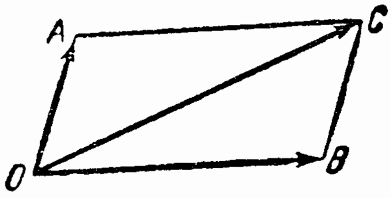
վող մոդուլի նշանով՝ $|\overrightarrow{AB}|$։ Այսպիսով $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի երկարությունը կլինի՝ $AB=|\overrightarrow{AB}|$, M վեկտորի երկարությունը՝ $M=|M|$։

§ **2. Վեկտորների գումարումը:** *Վեկտորական մեծությունների (ուժերի, արագությունների, արագացումների) գումարման՝ մեխանիկայից հայտնի օրենքները հիմք են ծառայում վեկտորների գումարման հետևյալ սահմանման համար՝*

A և B երկու վեկտորների գումար անվանում են այն C վեկտորը, որը ելնում է նրանց ընդհանուր սկզբից և հանդիսանում է նրանց վրա, որպես կողմերի վրա, կառուցված զուգահեռագծի անկյունագիծը *(գծ. 94)*. *նշանակում է՝*

$$C=A+B: \tag{1}$$

Եթե A և B երկու վեկտորները, ընդհանուր սկզբի բերելուց հետո, գտնվում են մեկ ուղիղի վրա և ունեն միևնույն ուղղությունը, ապա նրանց C գումարը, սահմանման համաձայն, մի



Գծ. 94

վեկտոր է, որի երկարությունը հավասար է գումարելի վեկտորների երկարությունների գումարին և ունի նրանց ուղղությունը։ Իսկ եթե գումարելի վեկտորներն ուղղված են դեպի հակառակ կողմեր, ապա նրանց C գումարը մի վեկտոր է, որի երկարությունը հավասար է գումարելի վեկտորների երկարությունների տարբերությանը և ունի մեծ երկարություն ունեցող վեկտորի ուղղությունը։ Այն դեպքում, երբ հակառակ ուղղություններ ունեցող վեկտորների երկարությունները հավասար են, նրանց գումարը մի հատուկ «վեկտոր» է, որի երկարությունը հավասար է զրոյի։ Այդպիսի վեկտորն անվանում են զրո վեկտոր (կամ՝ զրոյական վեկտոր) և նշանակում O նշանով։

Այժմ տեսնենք, թե արդյոք վեկտորների գումարումը բավարարո՞ւմ է այն հիմնական օրենքներին, որոնց ենթարկվում է թվերի գումարումը։ Թվերի գումարման համար մենք ունենք երկու հիմնական օրենք՝

1. Տեղափոխելիության օրենք՝

$$a+b=b+a$$

այսինքն՝ գումարը կախված չէ գումարելիների կարգից (ներթականությունից)։

2. Զուգորդելիության օրենք՝

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

այսինքն՝ գումարն ավելացնելու համար կարելի է հաջորդաբար ավելացնել յուրաքանչյուր գումարելին:

Առաջին օրենքը, ակներևաբար, բավարարվում է. այն ուղղակի բխում է վեկտորների գումարման սահմանումից՝

$$A+B=B+A: \qquad (2)$$

Երկրորդ օրենքին (զուգորդելիությանը) անցնելու համար պետք է նախ պարզաբանել մի քանի վեկտորների գումարի գաղափարը: Այդ նպատակով նախ պարզեցնենք երկու վեկտորների գումարի կառուցումը: Մենք պայմանավորվել ենք հավասար համարել այնպիսի վեկտորները, որոնք ունեն նույն երկարությունը, զուգահեռ են և ուղղված են դեպի միևնույն կողմը: Դրա շնորհիվ, OB *և* $\overrightarrow{AC}$ *վեկտորները (գծ. 94) միմյանց հավասար են: Այստեղից բխում է երկու վեկտորների գումարման այսպիսի կանոն.* առաջին գումարելիի ծայրին կառուցում ենք երկրորդ գումարելին: Այդ բեկյալը փակող վեկտորը կլինի գումար-վեկտորը. նրա սկիզբը համընկնում է առաջին գումարելիի սկզբի հետ, ծայրը՝ երկրորդ գումարելիի ծայրի հետ:

Եռանկյան այս կանոնն այժմ դժվար չէ տարածել ցանկացած թվով գումարելիների դեպքի վրա: Դիցուք, օրինակ, պահանջվում է գտնել A, B և C երեք վեկտորների գումարը՝

$$A+B+C=D,$$

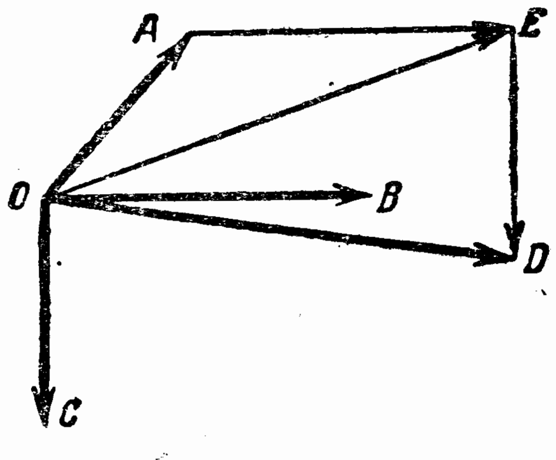
ընդ որում դրանց գումար ասելով մենք պետք է հասկանանք A-ին նախ B և ապա C ավելացնելու արդյունքը: Այլ կերպ ասած, եթե

$$A+B=E,$$

ապա, սահմանման համաձայն, կլինի՝

$$D=E+C:$$

Նախընթաց՝ եռանկյան կանոնով նախ կառուցենք A+B գումարը (գծ. 95), այսինքն՝ A *կետում կառուցենք* $\overrightarrow{AE}=B$ *վեկտորը և* O *կետը միացնենք* E *կետի հետ՝*



Գծ. 95

$\vec{OE} = \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$։ *Այնուհետև ստացված գումարին ավելացնենք* $\boldsymbol{C}$ *վեկտորը, այսինքն՝* $\vec{OE}$ *վեկտորի ծայրին կառուցենք* $\vec{ED} = \boldsymbol{C}$ *վեկտորը և* O *կետը միացնենք* D *կետի հետ։ Այդ ժամանակ՝*

$$\vec{OD} = \boldsymbol{D} = \vec{OE} + \vec{ED} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}:$$

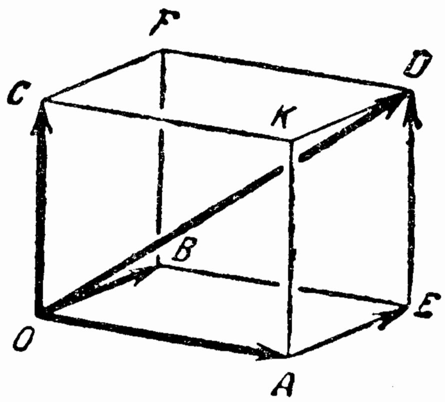
Այստեղից բխում է վեկտորների գումարման այսպիսի կանոն՝

Ցանկացած թվով վեկտորների գումարը կառուցելու համար պետք է առաջին գումարելի վեկտորի ծայրին կառուցել երկրորդը, երկրորդի ծայրին՝ երրորդը և այլն: Ստացված բեկյալը փակող վեկտորը ներկայացնում է որոնելի գումարը. նրա սկիզբը համընկնում է առաջին գումարելիի սկզբի հետ, ծայրը՝ վերջին գումարելիի ծայրի հետ:

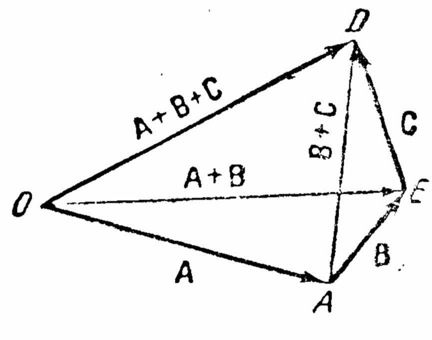
Միևնույն հարթությանը ոչ զուգահեռ երեք վեկտորների գումարը կարելի է ստանալ նաև այլ եղանակով։ Ենթադրենք, թե $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ *վեկտորները մի* O *ընդհանուր սկզբի են բերված՝* $\vec{OA} = \boldsymbol{A}$, $\vec{OB} = \boldsymbol{B}$, $\vec{OC} = \boldsymbol{C}$։ *Այդ վեկտորների վրա կառուցենք զուգահեռանիստ (գծ. 96)։ Նախորդ կանոնի համաձայն՝*

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} = \vec{OA} + \vec{AE} + \vec{ED} = \vec{OD}:$$

Բայց OD *հատվածը զուգահեռանիստի անկյունագիծն է։ Այսպիսով, արված վեկտորների գումարը հավասար է այն զուգահեռանիստի անկյունագիծ-վեկտորին, որի կողերը գումարելի վեկտորներն են։*



Գծ. 96



Գծ. 97

Նկատենք, որ եթե գումարելի վեկտորները զուգահեռ լինեին միևնույն հարթությանը (այդպիսի վեկտորները կոչվում են կոմպլանար վեկտորներ*), ապա մենք չէինք կարող նրանց վրա զուգահեռանիստ կառուցել։*

Այժմ անցնենք զուգորդելիության օրենքի ապացուցմանը՝

$$A+(B+C)=(A+B)+C \qquad (3)$$

Վեկտորների գումարման կանոնի համաձայն (գծ. 97)՝

$$(A+B)+C=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{OD}$$

Բայց այդ նույն $\overrightarrow{OD}$ *վեկտորին հավասար է նաև* $A+(B+C)$ *գումարը, քանի որ՝*

$$A+(B+C)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}$$

Այսպիսով, (3) հավասարությունն ապացուցվեց.

Տեղափոխելիության և զուգորդելիության օրենքներից հետևում է, որ ցանկացած թվով վեկտորների գումարը գտնելիս կարելի է տված վեկտորները գումարել ցանկացած կարգով։

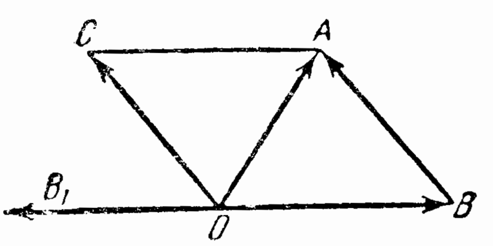
Նկատենք, որ թվերի սովորական գումարի համար գոյություն ունեն նաև զանազան մոնոտոնության օրենքներ՝ *գումարելիների և գումարի մեծությունների բաղդատման վերաբերյալ ինչպես, օրինակ՝ դրական գումարելիների գումարը մեծ է յուրաքանչյուր գումարելիից։ Բոլոր այդ օրենքներն իմաստ չունեն վեկտորների գումարի համար, որովհետև «մեծ» և «փոքր» գաղափարները անկիրառելի են վեկտորների նկատմամբ։*

§ **3. Վեկտորների հանումը։** *Սովորաբար հանումը սահմանվում է որպես գումարման հակադարձ գործողություն՝ տրված գումարով և գումարելիներից մեկով որոնվում է մյուս գումարելին։ Դրան համապատասխան,* A *և* B *երկու վեկտորների տարբերություն կոչվում է այն* C *վեկտորը, որի և* B*-ի գումարը հավասար է* A*-ին՝*

$$A-B=C, \text{ եթե } B+C=A$$

Տրված A *և* B *վեկտորները գծագրի վրա պատկերենք* $\overrightarrow{OA}$ *և* $\overrightarrow{OB}$ *ուղղությամբ օժտված հատվածներով (գծ.98)։* B *կետից* A *կետը տանենք մի վեկտոր և այն նշանակենք* C*։ Այդ դեպքում, ակնեբևաբար, կլինի* $B+C=A$*, հետևաբար՝*

$$A-B=C$$



Գծ. 98

Այսպիսով, մի վեկտորից մյուսը հանելու համար պետք է նրանք բերել ընդհանուր սկզբի և կառուցել վեկտոր՝ հանելի-վեկտորի ծայրից մինչև նվազելի վեկտորի ծայրը։

Այդ նույն գործողությունը կարելի է նաև այլ կերպ կատարել։

Կառուցենք մի $\overrightarrow{OB_1}$ վեկտոր, որի երկարությունը հավասար է $\overrightarrow{OB}$ վեկտորի երկարությանը, բայց ունի հակառակ ուղղությունը. բացի դրանից, OAB եռանկյունը լրացնենք մինչև OBAC զուգահեռագիծը։ Ակներևորեն $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BO}$, հետևաբար՝ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB_1}$։ Նկատելով, որ որոնելի տարբերությունը՝

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC},$$

ստանում ենք հետևյալ հավասարությունը՝

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB_1}=\mathbf{A}+\mathbf{B}_1։$$

Այստեղից այսպիսի կանոն է բխում՝ $\overrightarrow{OA}$ վեկտորից $\overrightarrow{OB}$ վեկտորը հանելու համար պետք է $\overrightarrow{OA}$ վեկտորին ավելացնել մի $\overrightarrow{OB_1}$ վեկտոր, որը երկարությամբ հավասար է $\overrightarrow{OB}$ վեկտորին, բայց ունի հակառակ ուղղությունը։

Հավասար երկարություններ, բայց հակադիր ուղղություններ ունեցող $\overrightarrow{OB}$ և $\overrightarrow{OB_1}$ երկու վեկտորները կանվանենք հակադիր վեկտորներ։ Նրանց գումարը հավասար է զրո-վեկտորի՝

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB_1}=\mathbf{O}։$$

$\overrightarrow{OB}$ վեկտորին հակադիր $\overrightarrow{OB_1}$ վեկտորը պայմանավորվենք նշանակել $-\overrightarrow{OB}$։ Քանի որ $\overrightarrow{OB}=\mathbf{B}$ և $\overrightarrow{OB_1}=-\mathbf{B}$, ուստի վեկտորների հանման համար վերևում ստացված կանոնը կարելի է հետևյալ կերպ ձևակերպել. **A** վեկտորից **B** վեկտորը հանելու համար, պետք է **A**-ին ավելացնել **B**-ին հակադիր $-\mathbf{B}$ վեկտորը՝

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B})։$$

§ 4. Վեկտորի բազմապատկումը թվով։ Գումարելով մի քանի հավասար վեկտորներ, այսինքն՝ վեկտորը որպես գումարելի կրկնելով մի քանի անգամ, մենք հանգում ենք վեկտորը դրական ամբողջ թվով բազմապատկելու գաղափարին։ Սահմանում ենք այսպես՝

$$\mathbf{A}n=\mathbf{A}+\mathbf{A}+\cdot\cdot\cdot+\mathbf{A},$$

որտեղ n-ը **A**-ին հավասար գումարելի վեկտորների թիվն է։ Ակներևաբար, **A**n արտադրյալ վեկտորը կունենա նույն ուղղությունը, ինչ որ A բազմապատկելին, միայն երկարությունը կլինի n անգամ մեծացրած։

Այժմ մուծենք վեկտորը դրական ամբողջ թվի վրա բաժանելու գաղափարը։ Սահմանում ենք այսպես՝

$$\frac{A}{n} = A\frac{1}{n} = B, \text{ եթե } A = Bn\text{։}$$

Այստեղից բխում է, որ A և B վեկտորներն ունեն նույն ուղղությունը, բայց A վեկտորի A երկարությունը n անգամ մեծ է B վեկտորի B երկարությունից։ Այսպիսով, վեկտորը n դրական ամբողջ թվի վրա բաժանելիս, նրա ուղղությունը պահպանվում է, իսկ երկարությունը փոքրանում է n անգամ։

Դրանից հետո կարելի է սահմանել վեկտորի բազմապատկումը $\lambda = \frac{p}{q}$ դրական կոտորակով, որ նշանակում է վեկտորը բազմապատկել p-ով և բաժանել q-ի վրա, ինչպես նաև՝ վեկտորի բազմապատկումը λ դրական իռացիոնալ թվով։ Բոլոր դեպքերում վեկտորի ուղղությունը պահպանվում է, իսկ երկարությունը բազմապատկվում է λ-ով։ Վերջապես, եթե λ բազմապատկիչը բացասական է, ապա պայմանավորվում ենք վեկտորի երկարությունը բազմապատկել $|\lambda|$-ով, իսկ ուղղությունը փոխել հակառակ ուղղությամբ։

Մասնավորապես, A վեկտորը -1-ով բազմապատկելիս ստանում ենք $A \cdot (-1)$ վեկտոր, որն ունի նույն երկարությունը, բայց ուղղված է հակառակ կողմը, այսինքն՝ ստանում ենք A վեկտորին հակադիր վեկտոր։ Այդպիսի վեկտորը, նախորդ պարագրաֆի պայմանի համաձայն, նշանակում ենք $-A$։ Հետևաբար՝

$$A \cdot (-1) = -A, \text{ ընդ որում՝ } A + A(-1) = A - A = 0\text{։}$$

Այսպիսով, մենք սահմանեցինք վեկտորի բազմապատկումը ցանկացած իրական թվով, այն է՝

A վեկտորը λ թվով բազմապատկելիս, վեկտորի երկարությունը բազմապատկվում է $|\lambda|$ -ով, իսկ ուղղությունը պահպանվում է երբ $\lambda > 0$ և փոխվում է հակառակ ուղղությամբ, երբ$\lambda > 0$ ($\lambda = 0$ դեպքում արտադրյալը տալիս է զրո վեկտոր)։

A վեկտորի և λ թվի արտադրյալը մենք գրելու ենք ինչպես $A\lambda$ ձևով, այնպես էլ λA ձևով։ Այսպիսի բազմապատկման համար տեղի ունի բաշխական օրենքը, որը սիմվոլիկ ձևով կարելի է այսպես գրել:

$$(A+B)\lambda=A\lambda+B\lambda: \qquad (4)$$

Մենք կհամոզվենք, որ այս բանաձևը ճիշտ է, եթե նկատենք, որ λ-ով բազմապատկելիս փոխվում են վեկտորների միայն երկարությունները, այսինքն՝ գծագրի մասշտաբները, պատկերները մնում են միմյանց նման: Այդ պատճառով էլ, քանի որ A, B և $A+B=C$ վեկտորները կազմում են զուգահեռագծի կողմերը և անկյունագիծը, ուստի, բոլոր անդամները λ-ով բազմապատկելով, այսինքն՝ միևնույն թվով բազմապատկելով վեկտորների երկարությունները, մենք նորից զուգահեռագիծ կստանանք, որ նշանակում է կպահպանվի

$$A\lambda+B\lambda=C\lambda$$

հավասարությունը: Այս հավասարությունն էլ արտահայտում է հենց բաշխական օրենքը, քանի որ C-ն հավասար է $A+B$ գումարին:

Նշենք նաև, որ վեկտորը թվով բազմապատկելու սահմանումից բխում են հետևյալ հավասարությունները՝

$$A(\lambda_1+\lambda_2)=A\lambda_1+A\lambda_2 \qquad (5)$$

և

$$(A\lambda_1)\lambda_2=(A\lambda_2)\lambda_1=A(\lambda_1\lambda_1), \qquad (6)$$

որտեղ λ_1-ը և λ_2-ը թվեր են:

Այն վեկտորը, որն ունի տված վեկտորի ուղղությունը, իսկ երկարությունը հավասար է 1-ի, կնշանակենք նույնանուն տառով՝ վերևում աջ կողմում դնելով փոքրիկ զրո (այնպիսի վեկտորը, որի երկարությունը հավասար է 1-ի, կոչվում է միավոր վեկտոր): Այդ դեպքում վեկտորը թվով բազմապատկելու սահմանումից հետևում է, որ ամեն մի A վեկտոր կարելի է գրել այսպես՝

$$A=\mathrm{A}A^0: \qquad (7)$$

Իրոք, A^0 վեկտորը A թվով բազմապատկելիս նրա ուղղությունը չի փոխվի, իսկ երկարությունը կհավասարվի A-ի, այսինքն՝ կստանանք հենց A վեկտորը:

§ 5. **Վեկտորի պրոյեկցիաները:** $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ վեկտորի պրոյեկցիա առանցքի վրա կոչվում է այդ առանցքի այն $\overline{\mathbf{ab}}$ հատվածի երկարությունը, որն ընկած է վեկտորի **A** սկզբի և **B** ծայրի **a** և **b** պրոյեկցիաների միջև, վերցրած + նշանով, եթե $\overline{\mathbf{ab}}$ հատվածի ուղղությունը համընկնում է պրոյեկցիաների առանցքի ուղղության հետ. և՝ —նշանով, երբ այդ ուղղությունները հակադիր են։

Այսպիսով, $\overrightarrow{AB}$ *վեկտորի պրոյեկցիան առանցքի վրա՝ առանցքի* $\overline{ab}$ *ուղղությամբ օժտված հատվածի մեծությունն է։*

Պրոյեկցիաների տեսության հիմնական դրույթները (մաս 2. գլ. I, § 3*) կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ՝*

1. Վեկտորի պրոյեկցիան որևէ առանցքի վրա հավասար է վեկտորի երկարությանը, բազմապատկած առանցքով ու վեկտորով կազմված անկյան կոսինուսով՝

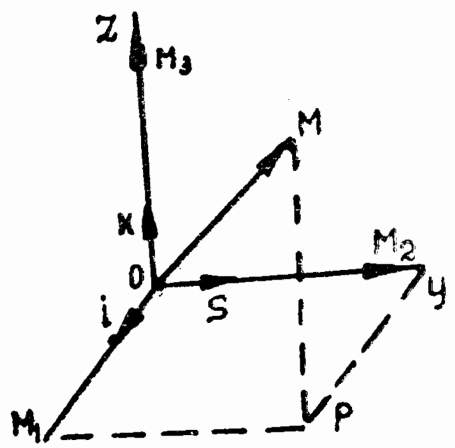
$$\text{պր}\,\overrightarrow{AB}=AB\cos\alpha:$$

Այստեղից, մասնավորապես, հետևում է, որ հավասար վեկտորները ունեն հավասար պրոյեկցիաներ միևնույն առանցքի վրա։

2. Վեկտորների գումարի պրոյեկցիան *(որևէ առանցքի վրա)* հավասար է գումարելի վեկտորների պրոյեկցիաների *(նույն առանցքի վրա)* հանրահաշվական գումարին։

Այսպես, օրինակ,

$$\text{պր}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=$$
$$=\text{պր}\,\boldsymbol{A}+\text{պր}\,\boldsymbol{B}+\text{պր}\,\boldsymbol{C},$$



Գծ. 99

որտեղ բոլոր պրոյեկցիաները վերցրած են միևնույն առանցքի վրա։ Իրոք, վեկտորների գումարը այն բեկյալի փակող վեկտորն է, որի համար որպես հատվածներ ծառայում են գումարելի վեկտորները (տե՛ս § 2)։

Դիտարկենք կոորդինատների մի ուղղանկյուն սիստեմ և մի կամայական $\overrightarrow{OM}$ *վեկտոր (գծ. 99)։* $\overrightarrow{OM}$ *վեկտորի* M *ծայրից տանենք* Oz *առանցքին զուգահեռ ուղիղ մինչև* xOy *հարթության հետ հատվելը* P *կետում. այնուհետև* P *կետից տանենք* Oy *առանցքին զուգահեռ ուղիղ մինչև* Ox *առանցքի հետ հատվելը* M_1 *կետում։ Ակներևորեն, կունենանք՝*

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{PM}:$$

$\overrightarrow{M_1P}$ և $\overrightarrow{PM}$ վեկտորների սկիզբը տեղափոխելով O կետը, դրանք փոխարինենք իրենց հավասար վեկտորներով՝

$$\overrightarrow{M_1P}=\overrightarrow{OM_2}, \quad \overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OM_3},$$

որից հետո կունենանք՝

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3},$$

կամ, այլ կերպ՝

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2+\boldsymbol{M}_3\text{։} \tag{1}$$

Այս հավասարությունը ցույց է տալիս, որ յուրաքանչյուր վեկտոր կարելի է վերլուծել երեք գումարելիների, որոնք գտնվում են կոորդինատային առանցքների վրա։ $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$, $\boldsymbol{M}_3$ գումարելի վեկտորներն անվանվում են $\boldsymbol{M}$ վեկտորի բաղադրիչներ կամ կոմպոնենտներ Oxyz կոորդինատային սիստեմի նկատմամբ։

O սկզբնակետից յուրաքանչյուր առանցքի դրական ուղղությամբ վերցնենք երեք միավոր վեկտորներ, որոնք զույգ-զույգ միմյանց ուղղահայաց կլինեն։ Այդ երեք վեկտորները համապատասխանորեն նշանակենք $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ և անվանենք հիմնական միավոր վեկտորներ։ Վերադառնալով (1) հավասարությանը, նկատենք, որ, քանի որ $\boldsymbol{M}_1$ և $\boldsymbol{i}$ վեկտորները գտնվում են աբսցիսների առանցքի վրա, ապա կարելի է գրել՝

$$\boldsymbol{M}_1=X\boldsymbol{i},$$

որտեղ X-ը $\boldsymbol{M}_1$ վեկտորի երկարությունն է, վերցրած + նշանով, եթե $\boldsymbol{M}_1$ և $\boldsymbol{i}$ վեկտորների ուղղությունները համընկնում են, և՝ — նշանով, եթե նրանք ունեն հակադիր ուղղություններ։ Այլ խոսքով, X-ը $\boldsymbol{M}$ վեկտորի պրոյեկցիան է աբսցիսների առանցքի վրա։ Նման ձևով կստանանք՝

$$\boldsymbol{M}_2=Y\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{M}_3=Z\boldsymbol{k},$$

որտեղ Y-ը և Z-ը $\boldsymbol{M}$ վեկտորի պրոյեկցիաներն են համապատասխանորեն օրդինատների և ապլիկատների առանցքների վրա։ Այսպիսով, օգտագործելով $\boldsymbol{M}$ վեկտորի X, Y, Z պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա, (1) հավասարությունը կարելի է այսպես արտագրել՝

$$\boldsymbol{M}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j},+Z\boldsymbol{k}\text{։} \tag{1'}$$

Այս հավասարությունը տալիս է $\boldsymbol{M}$ վեկտորի վերլուծումն ըստ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ հիմնական միավոր վեկտորների։

էական տարբերություն կա վեկտորի բաղադրիչների և նրա պրոյեկցիաների միջև։ Վեկտորի պրոյեկցիաները՝ դրանք X, Y, Z երեք թվեր են, որոնք հանդիսանում են վեկտորի M ծայրի դեկարտյան կոորդինատները, եթե վեկտորի սկիզբը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում։ M կետի շառավիղ-վեկտոր անվանելով ըսկըզբնակետից ելնող և M կետում վերջացող վեկտորը, մենք կարող ենք ասել, որ M կետի X, Y, Z դեկարտյան կոորդինատները նրա $\overrightarrow{OM}$ շառավիղ-վեկտորի պրոյեկցիաներն են։ Իսկ վեկտորի բաղադրիչները իրենցից ներկայացնում են M_1, M_2, M_3 վեկտորները, որոնց գումարը հավասար է տված M վեկտորին։ Բաղադրիչների և պրոյեկցիաների միջև գոյություն ունի հետևյալ պարզ առնչությունը՝

$$M_1 = \mathrm{X}i, \quad M_2 = \mathrm{Y}j, \quad M_3 = \mathrm{Z}k, \tag{8}$$

այսինքն՝ բաղադրիչն ստացվում է հիմնական միավոր վեկտորը բազմապատկելով պրոյեկցիայով։

(Γ′) հավասարությունը բացառիկ նշանակություն ունի վեկտորների տեսության մեջ։ Այդ հավասարության օգնությամբ կապ է հաստատվում վեկտորների տեսության երկու մասերի՝ վեկտորների երկրաչափական տեսության և հանրահաշվական տեսության միջև։ Վեկտորական հանրահաշիվը հենց այդ երկու կողմերի՝ երկրաչափականի և հանրահաշվականի միացումն է։ Դրանք, փոխադարձաբար լրացնելով միմյանց, ստեղծում են հենց ա՛յն, ինչով օգտակար կերպով աչքի է ընկնում վեկտորական հանրահաշիվը. երկրաչափական տեսությունը հնարավորություն է տալիս լայնորեն օգտագործելու երկրաչափական պատկերացումները, իսկ հանրահաշվականը՝ կատարելու բոլոր հաշվումները։

Փոխանակ լրիվ գրելու՝

$$M = \mathrm{X}i + \mathrm{Y}j + \mathrm{Z}k, \tag{Γ′}$$

հաճախ կարճ նշանակում են՝

$$M\,\{\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}\}։$$

Այստեղ X-ը, Y-ը, Z-ը, ինչպես վերևում ասվել է, նշանակում են M վեկտորի պրոյեկցիաները[1] կամ, որ միևնույնն է, M շառավիղ-վեկտորի M ծայրի կոորդինատները։ Օրինակ՝

$$M\{2, 3, -1\} = 2j + 3i - k։$$

[1] Հետագայում, խոսելով վեկտորի պրոյեկցիաների մասին կոորդինատային առանցքների վրա, մենք երբեմն նրանց պարզապես պրոյեկցիաներ կանվանենք, բաց թողնելով «կոորդինատային առանցքների վրա» բառերը։

§ 6. Գործողություններ պրոյեկցիաներով տրված վեկտորների հետ: *§ 5-ում մենք ցույց տվեցինք, որ վեկտորների գումարի պրոյեկցիան որևէ առանցքի վրա հավասար է գումարելի վեկտորների՝ նույն առանցքի վրա ունեցած պրոյեկցիաների գումարին: Այդ առաջադրությունը կիրառելով յուրաքանչյուր կոորդինատային առանցքի նկատմամբ, եզրակացնում ենք՝*

վեկտորները գումարելիս նրանց համանուն պրոյեկցիաները գումարվում են:

Այդ գրում ենք այսպես.
եթե՝

$$\boldsymbol{A}=X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k},$$

ապա՝

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(X_1+X_2)\boldsymbol{i}+(Y_1+Y_2)\boldsymbol{j}+(Z_1+Z_2)\boldsymbol{k}:$$

Վեկտորների գումարման կանոնից անմիջապես բխում է վեկտորների հանման կանոնը՝

վեկտորը հանելու համար պետք է հանել նրա պրոյեկցիաները,

այսինքն՝

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(X_1-X_2)\boldsymbol{i}+(Y_1-Y_2)\boldsymbol{j}+(Z_1-Z_2)\boldsymbol{k}:$$

Վեկտորը λ թվով բազմապատկելու կանոնը կստանանք, եթե $\boldsymbol{A}=X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k}$ *հավասարության երկու մասերը բազմապատկենք λ-ով, օգտվելով բազմապատկման հատկություններից, որ նշված են § 4-ի (4) և (6) բանաձևերում, կստանանք՝*

$$\lambda\boldsymbol{A}=\lambda X_1\boldsymbol{i}+\lambda Y_1\boldsymbol{j}+\lambda Z_1\boldsymbol{k}:$$

Այսպիսով՝

վեկտորը թվով բազմապատկելու համար, պետք է նրա բոլոր պրոյեկցիաները բազմապատկել այդ թվով:

Օրինակ: Գտնել այն կետի շառավիղ-վեկտորը, որը $A(\boldsymbol{r}_1)$ *և* $B(\boldsymbol{r}_2)$[1] *կետերը միացնող* $\overline{AB}$ *հատվածը բաժանում է λ հարաբերությամբ:*

Գտնենք $\overline{AB}$ *հատվածը տված λ հարաբերությամբ բաժանող* M *կետի շառավիղ-վեկտորը (տե՛ս մաս 2, գլ. I, § 2):*

---

[1] *Կետի շառավիղ վեկտորը պայմանավորվում ենք գրել այդ կետը նշանակող տառի աջ կողմում՝ փակագծերում:*

Ակներևաբար,

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}:$$

Նկատելով, որ՝

$$\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1,\quad \overrightarrow{MB}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r},$$

նախորդ պայմանն այսպես կգրենք՝

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1=\lambda(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}),$$

որտեղից՝

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1=\lambda\boldsymbol{r}_2-\lambda\boldsymbol{r} \text{ և } (1+\lambda)\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{r}_2:$$

Հետևաբար՝

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{r}_2}{1+\lambda}: \tag{9}$$

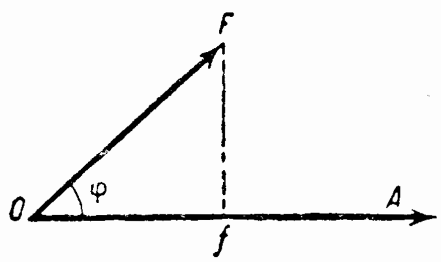
A և B տրված կետերի և M որոնելի կետի կոորդինատները համապատասխանորեն նշանակելով՝ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) և $(x, y, z,)$, (9) բանաձևը պրոյեկցիաների միջոցով այսպես կգրենք՝

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\qquad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}:$$

Այս բանաձևերը մենք ստացել էինք I գլխի § 2-ում:

§ 7. Վեկտորների սկալյար արտադրյալը: Ֆիզիկայում և մեխանիկայում հաճախ գործ են ունենում հետևյալ խնդրի հետ. գտնել **F** ուժի աշխատանքը, եթե այն կետը, որի վրա ազդում է այդ ուժը, կատարել է $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{A}$ տեղափոխությունը: Եթե կետը շարժվում է ուժի ուղղությամբ, ապա, ըստ սահմանման, ուժի աշխատանքը հավասար է ուժի մեծության և տեղափոխության երկարության արտադրյալին, այսինքն՝ AF: Իսկ եթե կետը շարժվում է ուժի ուղղության նկատմամբ φ անկյան տակ, ապա աշխատանք կատարում է $\overrightarrow{OF}$ ուժի միայն այն բաղադրիչը, որն ուղղված է OA գծով, իսկ ուղղահայաց բաղադրիչը հավասարակշռվում է դիմադրությամբ: Ուժը պրոյեկտելով ճանապարհի ուղղության վրա, կստանանք (գծ. 100)՝

$$\text{պր}\,\boldsymbol{F}=\mathrm{F}\cos\varphi:$$



Գծ. 100

Հետևաբար, ուժի աշխատանքը հավասար կլինի՝

$$\text{պր}\,\boldsymbol{F}.\mathrm{A}=\mathrm{AF}\cos\varphi:$$

Այսպիսով, տրված **F** և **A** երկու վեկտորներով մենք որոշեցինք AF cos φ սկալյարը: Վերջինս անվանում են **F** և **A** վեկտորների սկալյար *արտադրյալ։ Այսպիսով, սահմանում ենք՝*

Երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալ կոչվում է այն թիվը, որը հավասար է այդ վեկտորների երկարությունների արտադրյալին, բազմապատկած նրանցով կազմված անկյան կոսինուսով։

A և B վեկտորների սկալյար արտադրյալն ընդունված է նշանակել հետևյալ երեք ձևերից մեկով՝

$$A\cdot B = AB = (AB)։$$

Սահմանման համաձայն ունենք՝

$$AB = \mathrm{AB}\cos(\widehat{A,B}), \tag{10}$$

որտեղ $(\widehat{A,B})$-ն նշանակում է A և B վեկտորներով կազմված անկյունը։ Նկատելով, որ $\mathrm{B}\cos(\widehat{A,B})$*-ն B վեկտորի պրոյեկցիան է A վեկտորի ուղղության վրա, կարող ենք գրել՝*

$$AB = \mathrm{A}\,պր_{\mathrm{A}} B, \tag{10'}$$

ինչպես և, նման ձևով՝

$$AB = \mathrm{B}\,պր_{\mathrm{B}} A, \tag{10''}$$

որ բառերով նշանակում է՝

Երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը հավասար է նրանցից մեկի երկարությանը, բազմապատկած մյուսի պրոյեկցիայով առաջինի ուղղության վրա։

Մասնավորապես, եթե $B=B^\circ$ միավոր վեկտոր է, ապա՝

$$AB^\circ = 1\,պր_{\mathrm{B}^\circ} A = պր_{\mathrm{B}^\circ} A,$$

այսինքն՝ A վեկտորն սկալյարորեն բազմապատկելով միավոր վեկտորով, ստանում ենք *A* վեկտորի պրոյեկցիան միավոր վեկտորի ուղղության վրա։

§ 8. Սկալյար արտադրյալի հիմնական հատկությունները։

I. Երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը զրո է դառնում այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ վեկտորներից գոնե մեկը զրո վեկտոր է կամ, երբ վեկտորներն ուղղահայաց են։

Իրոք, եթե $\mathrm{A}=0$, *կամ* $\mathrm{B}=0$, *կամ* $\cos(\widehat{A,B})=0$, *ապա* $\mathrm{AB}\cos(\widehat{A,B})=0$*։ Հակադարձաբար, եթե $AB=0$ և բազմապատկվող վեկտորները զրո վեկտորներ չեն, ապա* $\mathrm{AB}\cos(\widehat{A,B})=0$

պայմանից, $A \neq 0$ *և* $B \neq 0$ *դեպքում, բխում է, որ՝*

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}})=0, \text{ այսինքն՝ } \boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B}.$$

Քանի որ զրո վեկտորի ուղղությունն անորոշ է, ուստի զրո վեկտորը կարելի է համարել ուղղահայաց ամեն մի վեկտորի։ Դրա շնորհիվ, սկալյար արտադրյալի նշված հատկությունը կարելի է ձևակերպել ավելի կարճ՝

վեկտորների սկալյար արտադրյալը զրո է դառնում այն և միայն ա՛յն դեպքում, երբ վեկտորներն ուղղահայաց են։

II. Սկալյար արտադրյալն օժտված է տեղափոխական հատկությամբ՝

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}. \tag{11}$$

Այս հատկությունն ուղղակի բխում է արտադրյալի սահմանումից, որի համաձայն՝

$$\boldsymbol{AB}=\mathrm{AB}\cos(\widehat{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}}) \text{ և } \boldsymbol{BA}=\mathrm{BA}\cos(\widehat{\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}}),$$

իսկ $(\widehat{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}})$*-ն և և* $(\widehat{\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}})$*-ն՝ միևնույն անկյան տարբեր նշանակումներն են։*

III. *Բացառիկ կարևոր նշանակություն ունի* բաշխական օրենքը։ *Այդ օրենքն այստեղ նույնքան շատ կիրառություններ ունի, որքան և սովորական թվաբանության կամ հանրահաշվի մեջ, որտեղ այն ձևակերպվում է այսպես՝* գումարը բազմապատկելու համար պետք է բազմապատկել յուրաքանչյուր գումարելին և ստացած արտադրյալները գումարել, *այսինքն՝*

$$(a+b)c=ac+bc.$$

Հայտնի է, որ բազմանիշ թվերի բազմապատկումը թվաբանությունում կամ բազմանդամների բազմապատկումը հանրահաշվում հիմնված են բազմապատկման այդ հատկության վրա։

Այդ օրենքը ճիշտ այդպիսի հիմնական նշանակություն ունի նաև վեկտորական հանրահաշվում, որովհետև նրա հիման վրա մենք կարող ենք բազմանդամների բազմապատկման սովորական կանոնը կիրառել նաև վեկտորների նկատմամբ։ Ապացուցենք, որ

ցանկացած $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ երեք վեկտորների համար իրավացի է հետևյալ հավասարությունը՝

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}. \tag{12}$$

Սկալյար արտադրյալի երկրորդ սահմանման համաձայն, որն արտահայտվում է (10″) *բանաձևով, կունենանք՝*

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\ \boldsymbol{C}=\mathrm{C}\ \text{պր}_{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}):$$

Այժմ կիրառելով պրոյեկցիաների 2-րդ հատկությունը (§ 5), *կգտնենք՝*

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\mathrm{C}(\text{պր}_{C}\boldsymbol{A}+\text{պր}_{C}\boldsymbol{B})=\mathrm{C}\ \text{պր}_{C}\boldsymbol{A}+\mathrm{C}\ \text{պր}_{C}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC},$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել:

IV. Սկալյար արտադրյալն օժտված է զուգորդական հատկությամբ թվային բազմապատկիչի նկատմամբ:

Այդ հատկությունն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$(\boldsymbol{AB})\lambda=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\lambda), \tag{13}$$

այսինքն՝ վեկտորների սկալյար արտադրյալը թվով բազմապատկելու համար բավական է այդ թվով բազմապատկել բազմապատկիչներից մեկը:

Ապացուցման համար մենք առանձին-առանձին հաշվենք (13) *հավասարության ձախ և աջ մասերը (ընդունելով* $\lambda\geqslant 0$*)՝*

$$(\boldsymbol{AB})\lambda=\mathrm{AB}\lambda\cos(\widehat{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}}),$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\lambda)=\boldsymbol{A}(\mathrm{B}\lambda\boldsymbol{B}^{\circ})=\mathrm{AB}\lambda\cos(\widehat{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{\circ}})$$

և նկատենք, որ $(\widehat{\boldsymbol{AB}})$ *և* $(\widehat{\boldsymbol{AB}^{\circ}})$ *անկյունները հավասար են, որովհետև* $\boldsymbol{B}$ *և* $\boldsymbol{B}^{\circ}$ *վեկտորները նույն ուղղությունն ունեն:* (13) *բանաձևը հեշտ է ստուգել նաև* $\lambda<0$ *դեպքում:*

Որպես ապացուցած հատկության մասնավոր դեպք, նշենք հետևյալ առաջադրությունը՝ երկու վեկտորներ սկալյարորեն բազմապատկելու համար կարելի է նրանցից մեկն սկալյարորեն բազմապատկել երկրորդի ուղղությունն ունեցող միավոր վեկտորով և ստացած արտադրյալը բազմապատկել երկրորդի երկարությամբ, այսինքն՝

$$\boldsymbol{DC}=(\boldsymbol{DC}^{\circ})\mathrm{C}:$$

§ 9. Պրոյեկցիաներով տրված վեկտորների սկալյար արտադրյալը: *$\boldsymbol{A}$ վեկտորի պրոյեկցիաները նշանակելով* $\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Z}_1$, *իսկ* $\boldsymbol{B}$ *վեկտորինը՝* $\mathrm{X}_2, \mathrm{Y}_2, \mathrm{Z}_2$, $\boldsymbol{A}$ *և* $\boldsymbol{B}$ *վեկտորների*

$$\boldsymbol{AB}=(\mathrm{X}_1\boldsymbol{i}+\mathrm{Y}_1\boldsymbol{j}+\mathrm{Z}_1\boldsymbol{k})(\mathrm{X}_2\boldsymbol{i}+\mathrm{Y}_2\boldsymbol{j}+\mathrm{Z}_2\boldsymbol{k})$$

սկալյար արտադրյալն արտահայտենք այդ պրոյեկցիաների միջոցով:

Բաշխական կանոնի համաձայն, վեկտորների գումարները բազմապատկվում են ինչպես բազմանդամները: Հետևաբար, կստանանք՝

$$\boldsymbol{AB}=X_1X_2\boldsymbol{ii}+Y_1X_2\boldsymbol{ji}+Z_1X_2\boldsymbol{ki}+X_1Y_2\boldsymbol{ij}+Y_1Y_2\boldsymbol{jj}+Z_1Y_2\boldsymbol{kj}+$$
$$+X_1Z_2\boldsymbol{ik}+Y_1Z_2\boldsymbol{jk}+Z_1Z_2\boldsymbol{kk}: \qquad (14)$$

Քանի որ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$*-ն՝ զույգ-զույգ միմյանց ուղղահայաց միավոր վեկտորներ են, ուստի՝*

$$\boldsymbol{ij}=0,\ \boldsymbol{jk}=0,\ \boldsymbol{ki}=0,$$

$$\boldsymbol{ii}=1,\ \boldsymbol{jj}=1,\ \boldsymbol{kk}=1:$$

Հետևաբար, $\boldsymbol{AB}$ *արտադրյալի համար ստացված* (14) *արտահայտության մեջ վեց գումարելիներ կվերանան, կմնան երեքը և վերջնականապես կստանանք՝*

$$\boldsymbol{AB}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2, \qquad (15)$$

այսինքն՝ վեկտորների սկալյար արտադրյալը հավասար է նրանց համանուն պրոյեկցիաների արտադրյալների գումարին:

Աստիճանի սովորական սահմանումը կիրառելով, բնական կլինի վեկտորի սկալյար արտադրյալն ինքն իրենով անվանել վեկտորի սկալյար քառակուսի: (15) *բանաձևը* $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$ *դեպքի համար կտա՝*

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA}=X_1^2+Y_1^2+Z_1^2:$$

Մյուս կողմից, սկալյար արտադրյալի սահմանումից (§ 7) կունենանք՝

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA}=\mathrm{AA}\cos 0=\mathrm{A}^2$$

հետևաբար, վեկտորի երկարության համար կստանանք հետևյալ բանաձևը՝

$$\mathrm{A}^2=X_1^2+Y_1^2+Z_1^2, \qquad (16)$$

որտեղից՝

$$\mathrm{A}=\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}, \qquad (16')$$

այսինքն՝ վեկտորի երկարությունը հավասար է իր պրոյեկցիաների քառակուսիների գումարից քառակուսի արմատին:

Նկատելով, որ $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^\circ$ *միավոր վեկտորի պրոյեկցիաները նրա համար կլինեն ուղղորդ կոսինուսներ (գլ.* I, *§ 4),* (16) *բանաձևից կստանանք՝*

$$1=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma,$$

որը համընկնում է I գլխի § 4-ի (15) բանաձևի հետ։

Դիցուք այժմ տված են երկու կետեր՝ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *և* $M_2(x_2, y_2, z_2)$*։*

Գտնենք նրանց հեռավորությունը։ Նկատենք, որ

$$\boldsymbol{A}=\overrightarrow{M_1M_2}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$$

վեկտորը հետևյալ երկու վեկտորների տարբերությունն է՝

$$\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$$

և

$$OM_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}։$$

Հետևաբար, կունենանք՝

$$X=x_2-x_1,$$
$$Y=y_2-y_1,$$
$$Z=z_2-z_1,$$

այսինքն՝ վեկտորի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա հավասար են նրա ծայրի և սկզբի համանուն կոորդինատների տարբերություններին։

Այս արտահայտությունները տեղադրելով (16) *և* (16′) *բանաձևերի մեջ, կստանանք՝*

$$A^2=M_1M_2^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,$$

կամ՝

$$A=M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

որը համընկնում է I *գլխի* § *2-ի* (6) *բանաձևի հետ, այսինքն՝* երկու կետերի հեռավորության քառակուսին հավասար է այդ կետերի համանուն կոորդինատների տարբերությունների քառակուսիների գումարին։

§ **10. Վեկտորի ուղղությունը։** *Վեկտորների սկալյար արտադրյալի սահմանման համաձայն՝*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=AB\cos\varphi,$$

որտեղ φ*-ն՝* $\boldsymbol{A}$ *և* $\boldsymbol{B}$ *վեկտորներով կազմված անկյունն է։ Այդ բանաձևից ստանում ենք՝*

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}{AB}, \qquad (17)$$

այսինքն՝ երկու վեկտորներով կազմված անկյան կոսինուսը հավասար է նրանց սկալյար արտադրյալին՝ բաժանած երկարությունների արտադրյալի վրա:

Այդ կոտորակի համարիչն ու հայտարարն արտահայտելով վեկտորների պրոյեկցիաներով [§ *9*, (15) *և* (16′)], *կստանանք՝*

$$\cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}: \tag{17′}$$

(17) և (17′) բանաձևերում մասնավորապես ընդունելով $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}$ *և նկատելով, որ այդ դեպքում* $B=1$, $X_2=1$, $Y_2=0$, $Z_2=0$, *կստանանք՝*

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{Ai}}{A}, \tag{18}$$

կամ՝

$$\cos\alpha=\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}}, \tag{18′}$$

որտեղ α*-ն* OX *առանցքով և* $\boldsymbol{A}$ *վեկտորով կազմված անկյունն է: Նման ձևով, վերցնելով* $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}$ *և* $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{k}$, *կստանանք՝*

$$\cos\beta=\frac{\boldsymbol{Aj}}{A},\qquad \cos\gamma=\frac{\boldsymbol{Ak}}{A} \tag{19}$$

կամ՝

$$\cos\beta=\frac{Y_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}},\quad \cos\gamma=\frac{Z_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}}: \tag{19′}$$

Վերջին բանաձևերը հնարավորություն են տալիս վեկտորի ուղղորդ կոսինուսները (այսինքն՝ կոորդինատային առանցքների հետ վեկտորի կազմած անկյունների կոսինուսները) հաշվել վեկտորի պրոյեկցիաների միջոցով:

Այնուհետև, (17′) բանաձևը մասնավորապես $\boldsymbol{A}^{\circ}$ *և* $\boldsymbol{B}^{\circ}$ *միավոր վեկտորների համար կտա՝*

$$\cos\varphi=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2, \tag{20}$$

որտեղ α_1, β_1, γ_1*-ը և* α_2, β_2, γ_2*-ը համապատասխանորեն* $\boldsymbol{A}^{\circ}$ *և* $\boldsymbol{B}^{\circ}$ *վեկտորների կազմած անկյուններն են կոորդինատային առանցքների հետ: Այս բանաձևն էլ համընկնում է* I *գլ.* § *4-ի (16) բանաձևի հետ:*

Ստացված արդյունքները լուսաբանելու նպատակով դիտարկենք մի քանի օրինակներ:

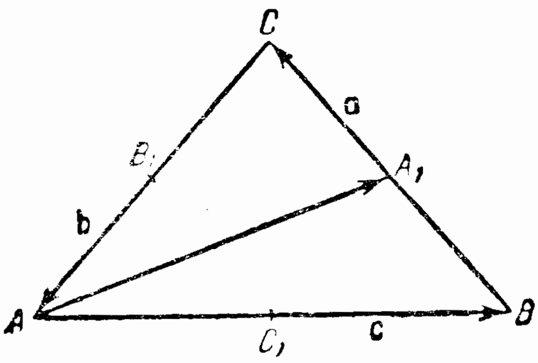
Օ ր ի ն ա կ 1. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ երեք վեկտորներն ինչպիսի՞ պայմանի պետք է բավարարեն, որպեսզի հնարավոր լինի նրանցից եռանկյուն կազմել, յուրաքանչյուրի սկիզբը համատեղելով մյուս երկու վեկտորներից մեկի ծայրի հետ։

Ակներևորեն, դրա համար անհրաժեշտ և բավարար պայմանն այն է, որ $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ վեկտորների գումարը հավասար լինի զրոյի՝

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0։$$

Օ ր ի ն ա կ 2. Ապացուցել, որ հնարավոր է կառուցել այնպիսի եռանկյուն, որի կողմերը հավասար և զուգահեռ են տրված ABC եռանկյան միջնագծերին։

ABC եռանկյան կողմերի միջնակետերը նշանակենք A_1, B_1, C_1 (գծ. 101) և եռանկյան միջնագծերը ներկայացնող $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ վեկտորներն արտահայտենք եռանկյան կողմերը ներկայացնող $\mathbf{a}=\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{CA}$ և $\mathbf{c}=\overrightarrow{AB}$ վեկտորներով։ Գծագրից երևում է, որ՝



Գծ. 101

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}=+\mathbf{c}\frac{\mathbf{a}}{2},$$

քանի որ՝

$$\overrightarrow{BA_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\mathbf{a}։$$

Նման ձևով կգտնենք նաև՝

$$\overrightarrow{BB_1}=\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}}{2},\quad \overrightarrow{CC_1}=\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}}{2}։$$

Մնում է ստուգել 1-ին օրինակի պայմանը, որը բավարար պայման է, որպեսզի $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ և $\overrightarrow{CC_1}$ վեկտորներից հնարավոր լինի եռանկյուն կազմել, այն է՝

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\mathbf{c}+\frac{\mathbf{a}}{2}+\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}}{2}+\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}}{2}=\frac{3}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=0։$$

Քանի որ 1-ին օրինակի պայմանը բավարարվում է, ուստի $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ և $\overrightarrow{CC_1}$ վեկտորներից իրոք կարելի է եռանկյուն կազմել։

Օ ր ի ն ա կ 3. Կետի վրա ազդում են երեք ուժեր, որոնց պրոյեկցիաները ուղղանկյուն կոորդինատային առանցքների վրա հավասար են՝

$$X_1=1,\ Y_1=2,\ Z_1=3,$$
$$X_2=-2,\ Y_2=3,\ Z_2=-4,\ X_3=3,\ Y_3=-4,\ Z_3=5։$$

Գտնել համազորի մեծությունն ու ուղղությունը։

Համազորի պրոյեկցիաները նշանակելով X, Y, Z, կունենանք՝

$$X=X_1+X_2+X_3=2,$$
$$Y=Y_1+Y_2+Y_3=1,\ Z=Z_1+Z_2+Z_3=4։$$

Հետևաբար, $\mathbf{R}$ համազորի R մեծությունը կլինի՝

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=\sqrt{21},$$

իսկ ուղղությունը կորոշվի հետևյալ բանաձևերով՝

$$\cos\widehat{(\mathbf{R},x)}=\frac{X}{R}=\frac{2}{\sqrt{21}},$$

$$\cos\widehat{(\mathbf{R},y)}=\frac{Y}{R}=\frac{1}{\sqrt{21}},$$

$$\cos\widehat{(\mathbf{R},z)}=\frac{Z}{R}=\frac{4}{\sqrt{21}}\text{։}$$

Օ ր ի ն ա կ 4. Գտնել $\mathbf{A}\{1,\ 2,\ 3\}$ *և* $\mathbf{B}\{2, -1,\ 4\}$ *վեկտորներով կազմված անկյունը։*

(17′) բանաձևով կստանանք՝

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 2+2\cdot -1+3\cdot 4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}}=\frac{12}{7\sqrt{6}}=\frac{2}{7}\sqrt{6}\text{։}$$

Օ ր ի ն ա կ 5. Տրված է OAB *եռանկյունը։ Այդ դեպքում՝* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$։ *Հաշվենք* AB *վեկտորի սկալյար քառակուսին՝*

$$\overrightarrow{AB}^2=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})^2=\overrightarrow{AO}^2+2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2,$$

կամ՝

$$AB^2=OA^2+OB^2+2OA\cdot OB\cos\widehat{(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OB})}\text{։}$$

OAB *եռանկյան* O *ներքին անկյունը նշանակելով* φ, *վերջին բանաձևին սովորական տեսք կտանք՝*

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA.OB\cos\varphi,$$

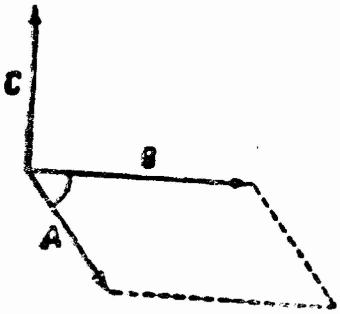
քանի որ՝

$$\widehat{(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OB})}=\pi-\varphi\text{։}$$

§ **11. Վեկտորական արտադրյալ։** ***A*** *և* ***B*** երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալ կոչվում է այն ***C*** նոր վեկտորը, որի երկարությունը թվապես հավասար է ***A*** և ***B*** վեկտորների վրա կառուցած զուգահեռագծի մակերեսին, ուղղահայաց է այդ վեկտորների հարթությանը և ուղղված է դեպի այնպիսի կողմ, որպեսզի այդ ***C*** վեկտորի շուրջը կարճագույն պտույտը ***A***-ից դեպի ***B***-ն կատարվի ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ, եթե նայենք ***C*** վեկտորի ծայրից (գծ. 102)։

Եթե ***A*** *և* ***B*** *վեկտորները զուգահեռ են, նրանց վեկտորական արտադրյալը համարվում է հավասար զրո վեկտորի։*

Այս սահմանումից հետևում է, որ C վեկտորի C երկարության համար կունենանք՝



Գծ. 102

$$C = AB\sin(\widehat{A, B}), \tag{21}$$

այսինքն՝ երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալի երկարությունը հավասար է բազմապատկվող վեկտորների երկարությունների արտադրյալին, բազմապատկած նրանցով կազմված անկյան սինուսով:

A և B վեկտորների վեկտորական արտադրյալը նշանակում են՝

$$C = A\times B \text{ կամ } C = [AB]:$$

Վեկտորական արտադրյալը հավասար է զրո վեկտորի այ՛ն և միայն այն դեպքում, երբ բազմապատկվող վեկտորներից գոնե մեկը զրո վեկտոր է կամ այդ վեկտորները զուգահեռ են (կոլինեար են)[1]:

Իսկապես, եթե $A=0$ *կամ* $B=0$ *կամ* $\sin(\widehat{A, B})=0$, *ապա* $AB\sin(\widehat{A, B})=0$, *ուստի նաև* $A\times B=0$: *Հակադարձաբար, եթե* $A\times B=0$ *և բազմապատկվող վեկտորներից ոչ մեկը զրո վեկտոր չէ, այսինքն՝* $A\neq 0$ *և* $B\neq 0$, *ապա* $AB\sin(\widehat{A, B})=0$ *պայմանից հետևում է, որ* $\sin(\widehat{A, B})=0$, *այսինքն՝* $A \parallel B$:

Քանի որ զրո վեկտորը կարելի է ամեն մի վեկտորին կոլինեար համարել, ապա կարող ենք ասել, որ վեկտորական արտադրյալը հավասար է զրո վեկտորի այ՛ն և միայն այն դեպքում, երբ բազմապատկվող վեկտորները կոլինեար են: *Այսպիսով, վեկտորների կոլինեարության պայմանը կլինի՝*

$$A\times B=0: \tag{22}$$

Մասնավորապես միշտ կլինի՝

$$A\times A=0, \tag{22'}$$

որի շնորհիվ ավելորդ է մուծել վեկտորի վեկտորական քառակու-

[1] *Զուգահեռ վեկտորները կոչվում են նաև կոլինեար վեկտորներ:*

ու գաղափարը, մինչդեռ մենք սահմանեցինք վեկտորի սկալյար քառակուսին՝ սկալյար արտադրյալի կապակցությամբ։

Դիտողություն։ A և B վեկտորների կոլինեարության (22) պայմանը կարելի է փոխարինել հետևյալ պայմանով՝

$$A=\lambda B,$$

որտեղ λ-ն մի որոշ թիվ է (§ 4) (համարելով $B\neq 0$)։

Եթե A և B վեկտորները միմյանց ուղղահայաց են, ապա $\sin(\widehat{A,B})=1$ և, նշանակում է, արտադրյալ-վեկտորի երկարությունը այս դեպքում, հավասար է բաղմապատկիչ-վեկտորների երկարությունների արտադրյալին՝

$$\left|A\times B\right|=AB,\ \text{եթե}\ A\perp B։ \tag{23}$$

Օրինակ 1. Ստուգել հետևյալ հավասարությունների իրավացիությունը.

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i},$$

որտեղ $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$,$\mathbf{k}$ -ն հիմնական կոորդինատային վեկտորներն են։

Քանի որ $\mathbf{i}$ և $\mathbf{j}$ վեկտորներն ուղղված են Ox և Oy առանցքներով, ապա $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ վեկտորն ուղղված կլինի Oz առանցքով։ Մյուս կողմից, այդ վեկտորի երկարությունը հավասար է $\mathbf{i}$ և $\mathbf{j}$ վեկտորների վրա կառուցված ուղղանկյան մակերեսին, այսինքն՝ 1-ի։ Հետևաբար, $\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{k}$։ Նմանապես պարզ է նաև, որ $\mathbf{k}\times\mathbf{j}$ ունի միավոր երկարություն և ուղղված է Ox առանցքի բացասական ուղղությամբ, հետևաբար, $\mathbf{k}\times\mathbf{j}=\mathbf{i}$։

Օրինակ 2. Ցույց տալ, որ $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2+(\mathbf{AB})^2=A^2B^2$։

Իրոք, քանի որ՝

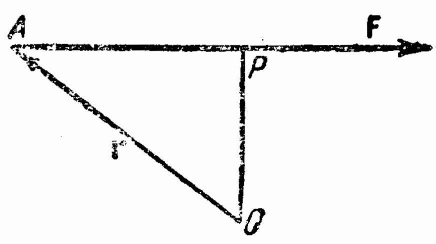
$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2=A^2B^2\sin^2(\widehat{\mathbf{A},\mathbf{B}})$$

$$(\mathbf{AB})^2=A^2B^2\cos^2(\widehat{\mathbf{A},\mathbf{B}}),$$

ուստի գումարելով, կստանանք՝

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2+(\mathbf{AB})^2=A^2B^2։$$

Մեխանիկայում կարևոր նշանակություն ունի տվյալ կետի նկատմամբ ուժի մոմենտի գաղափարը։ Եթե F ուժը կիրառված է A կետում (գծ. 103), ապա O կետի նկատմամբ F ուժի մոմենտ կոչվում է այն M վեկտորը, որը որոշվում է



գծ. 103

$$M=r\times F$$

բանաձևով, որտեղ $\vec{r} = \vec{OA}$*-ն կիրառման կետի շառավիղ-վեկտորն է։ Վեկտորական արտադրյալի սահմանումից հետևում է, որ մոմենտի մեծությունը հավասար է ուժի մեծությանը, բազմապատկած O կետի՝ այն ուղիղից ունեցած OP հեռավորությամբ, որի երկարությամբ ազդում է ուժը։*

§ 12. Վեկտորական արտադրյալի հիմնական հատկությունները։

1. Բազմապատկիչները տեղափոխելիս վեկտորական արտադրյալը բազմապատկվում է —1-ով, *այսինքն՝*

$$B \times A = -(A \times B)։ \qquad (24)$$

*Իսկապես, **A** և **B** վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռագծի մակերեսը, ինչպես և նրա հարթությունը, չեն փոխվի **A** և **B** վեկտորները տեղափոխելիս։ Այդ պատճառով* $A \times B$ *և* $B \times A$ *վեկտորներն ունեն հավասար երկարություններ և կոլինեար են։ Սակայն նրանց ուղղությունները հակառակ են. իրոք, եթե* $A \times B$ *վեկտորի ծայրից նայենք **A** և **B** վեկտորների հարթությանը, ապա **B**-ից դեպի **A**-ն կարճագույն պտույտը կկատարվի ժամացույցի սլաքի շարժման ուղղությամբ։ Հետևաբար,* $B \times A$ *վեկտորը պետք է ուղղված լինի դեպի հակառակ կողմը։*

*Նկատենք նաև, որ **A** և **B** վեկտորները կոլինեար լինելու դեպքում (24) հավասարությունն ակներև է, քանի որ այդ ժամանակ* $A \times B$ *և* $B \times A$ *վեկտորները՝ զրո վեկտորներ են։*

2. Վեկտորական արտադրյալն օժտված է զուգորդական հատկությամբ թվային բազմապատկիչի նկատմամբ, *որ արտահայտվում է հետևյալ բանաձևերով՝*

$$\lambda(A \times B) = \lambda A \times B = A \times \lambda B, \qquad (25)$$

այսինքն՝ վեկտորական արտադրյալը թվով բազմապատկելու համար բավական է այդ թվով բազմապատկել բազմապատկիչներից մեկը։

Ապացուցենք, օրինակ, (25) բանաձևի առաջին մասը, սահմանափակվելով այն դեպքով, երբ $\lambda > 0$։

$\lambda(A \times B)$ *և* $\lambda A \times B$ *վեկտորների հավասարությունն ապացուցելու համար ամենից առաջ նկատենք, որ այդ վեկտորների երկարությունները հավասար են՝*

$$|\lambda(A \times B)| = \lambda |A \times B| = \lambda AB \sin\ (\widehat{A, B}),$$

$$|\lambda \mathbf{A}\times \mathbf{B}|=|\lambda \mathbf{A}|\,B\sin(\widehat{\lambda \mathbf{A}, \mathbf{B}})=\lambda AB\sin(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}})\text{։}$$

Այնուհետև, քանի որ վեկտորը դրական թվով բազմապատկելիս նրա ուղղությունը չի փոխվում, ապա այդ երկու վեկտորներն ունեն միևնույն ուղղությունը։

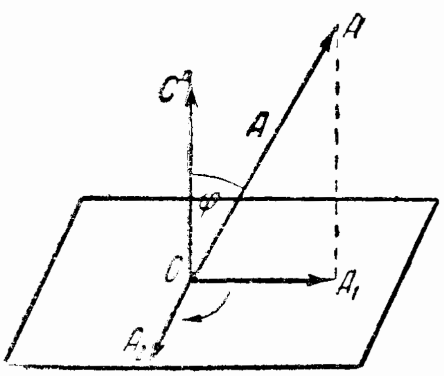
3. Վեկտորական արտադրյալը ենթարկվում է բաշխական օրենքին, *այսինքն՝*

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times \mathbf{C}=\mathbf{A}\times \mathbf{C}+\mathbf{B}\times \mathbf{C}\text{։} \tag{26}$$

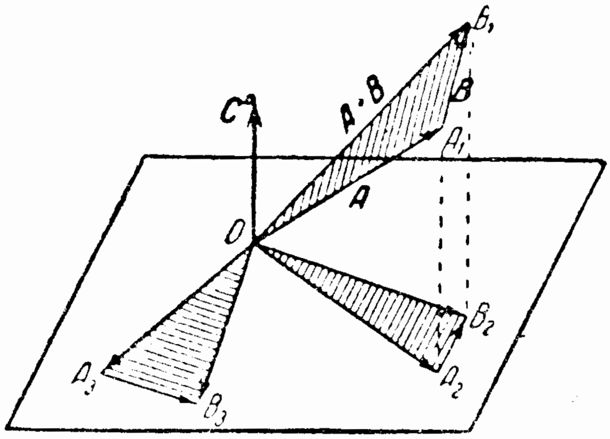
Ապացուցման համար նախ նկատենք, որ $\mathbf{A}\times\mathbf{C}^\circ$ *արտադրյալը, որտեղ* $\mathbf{C}^\circ$*-ն միավոր վեկտոր է, կարելի է կառուցել այսպես (գծ. 104).* $\mathbf{A}=\overrightarrow{OA}$ *վեկտորը պրոյեկտենք* $\mathbf{C}^\circ$*-ին ուղղահայաց հարթության վրա և ստացված* $\overrightarrow{OA_1}$ *վեկտոր-պրոյեկցիան այդ հարթության մեջ O կետի շուրջը պտտենք ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ 90°-ով (եթե հարթությանը նայենք* $\mathbf{C}^\circ$ *վեկտորի ծայրից)։ Ստացված* $\overrightarrow{OA_2}$ *վեկտորն էլ հենց հավասար կլինի* $\mathbf{A}\times\mathbf{C}^\circ$ *վեկտորին։ Իսկապես՝*

ա) $OA_2=OA_1=A\cos(90^\circ-\varphi)=A\sin\varphi$,

որտեղ φ*-ն՝* $\mathbf{A}$ *և* $\mathbf{C}^\circ$ *վեկտորներով կազմված անկյունն է,*



Գծ. 104



Գծ. 105

բ) $\overrightarrow{OA_2}$ *վեկտորն ուղղահայաց է* $\mathbf{A}$ *և* $\mathbf{C}^\circ$ *վեկտորներին և ուղղված է դեպի այն կողմը, որտեղից* $\mathbf{A}$*-ից դեպի* $\mathbf{C}^\circ$*-ն կարճագույն պտույտը կատարվում է ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ։*

Ուրեմն՝ $\overrightarrow{OA_2}=\mathbf{A}\times\mathbf{C}^\circ$։

Դիցուք այժմ տրված են C° միավոր վեկտորը, նրան ուղղահայաց p հարթությունը և OA_1B_1 եռանկյունը (գծ. 105), որտեղ՝

$$\overrightarrow{OA_1}=A, \quad \overrightarrow{A_1B_1}=B \text{ և } \overrightarrow{OB_1}=A+B,$$

OA_1B_1 եռանկյունը պրոյեկտենք p հարթության վրա և OA_2B_2 պրոյեկցիան p հարթության մեջ ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ պտտենք 90°-ով։ Կստանանք OA_3B_3 եռանկյունը, որի մեջ նախորդի համաձայն՝

$$\overrightarrow{OB_3}=(A+B)\times C^\circ, \quad \overrightarrow{OA_3}=A\times C^\circ, \quad \overrightarrow{A_3B_3}=B\times C^\circ\text{։}$$

Քանի որ

$$\overrightarrow{OB_3}=\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{A_3B_3},$$

ապա՝

$$(A+B)\times C^\circ=A\times C^\circ+B\times C^\circ\text{։} \qquad (27)$$

Նկատելով, որ $C=CC^\circ$, այժմ (27) հավասարության երկու մասերը բազմապատկենք C սկալյարով։ Կիրառելով վեկտորական արտադրյալի 2-րդ հատկությունը, կստանանք՝

$$(A+B)\times CC^\circ=A\times CC^\circ+B\times CC^\circ$$

կամ՝

$$(A+B)\times C=A\times C+B\times C,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Օ ր ի ն ա կ 1. Ցույց տալ, որ $(A-B)\times(A+B)=2(A\times B)$, և պարզել այդ հավասարության երկրաչափական իմաստը, $A-B$ և $A+B$ վեկտորները պատկերելով զուգահեռագծի անկյունագծերով։

Իսկապես՝

$$(A-B)\times(A+B)=A\times A-B\times A+A\times B-B\times B=$$

$$=-B\times A+A\times B=A\times B+A\times B=2(A\times B)\text{։}$$

Երկրաչափորեն այս նշանակում է, որ տված զուգահեռագծի անկյունագծերի վրա կառուցած նոր զուգահեռագծի մակերեսը հավասար է տված զուգահեռագծի մակերեսի կրկնապատիկին։

Օ ր ի ն ա կ 2. Դիցուք ABC եռանկյան գագաթները տված են իրենց շառավիղ-վեկտորներով՝ $A(r_1)$, $B(r_2)$, $C(r_3)$։ Գտնել այն S վեկտորը, որը ներկայացնում է ABC եռանկյան մակերեսը, որի եզրագծի շրջանցման ուղղությունն ընտրված է A-ից դեպի B-ն և B-ից դեպի C-ն, այսինքն՝ այն S վեկտորը, որի երկարությունը թվապես հավասար է տված եռանկյան մակերեսին և ուղղահայաց է եռանկյան հարթությանը, ընդ որում նա պետք է ուղղված լինի դեպի ա՛յն կողմը, որտեղից եզրագծի շրջանցման նշված ուղղությունը կերևա ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ։

Քանի որ $\overrightarrow{AB}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2$, ապա S-ի համար կարելի է գրել՝

$$S=\frac{1}{2}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2)=$$

$$=\frac{1}{2}(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3)+\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)-\frac{1}{2}(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_2)-\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_3)=$$

$$=\frac{1}{2}(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_3\times\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2):$$

§ 13. Պրոյեկցիաներով տրված վեկտորների վեկտորական արտադրյալը: *A վեկտորի պրոյեկցիաները նշանակելով X_1, Y_1, Z_1, իսկ B վեկտորինը՝ X_2, Y_2, Z_2, A և B վեկտորների վեկտորական արտադրյալն արտահայտենք այդ պրոյեկցիաների միջոցով՝*

$$A\times B=(X_1\mathbf{i}+Y_1\mathbf{j}+Z_1\mathbf{k})\times(X_2\mathbf{i}+Y_2\mathbf{j}+Z_2\mathbf{k}):$$

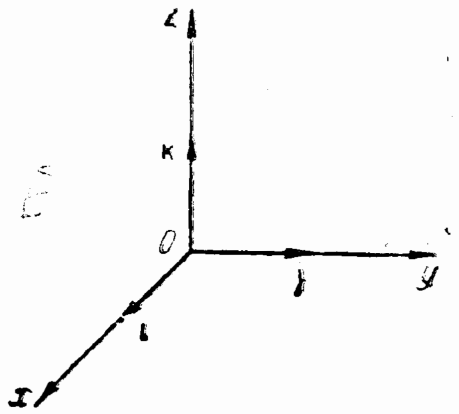
Բաշխման կանոնի համաձայն, վեկտորների գումարները բազմապատկվում են ինչպես բազմանդամները, միայն պետք է պահպանել արտադրիչների կարգը: Հետևաբար, ստանում ենք՝

$$\begin{aligned}A\times B= & X_1X_2(\mathbf{i}\times\mathbf{i})+Y_1X_2(\mathbf{j}\times\mathbf{i})+Z_1X_2(\mathbf{k}\times\mathbf{i})+\\ & +X_1Y_2(\mathbf{i}\times\mathbf{j})+Y_1Y_2(\mathbf{j}\times\mathbf{j})+Z_1Y_2(\mathbf{k}\times\mathbf{j})+\\ & +X_1Z_2(\mathbf{i}\times\mathbf{k})+Y_1Z_2(\mathbf{j}\times\mathbf{k})+Z_1Z_2(\mathbf{k}\times\mathbf{k}):\end{aligned}\tag{28}$$

Քանի որ $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$-ն փոխադարձաբար ուղղահայաց միավոր վեկտորներ են և $\mathbf{j}$-ից դեպի $\mathbf{k}$-ն կատարվող պտույտն ունի ժամացույցի սլաքի շարժման հակառակ ուղղությունը, երբ նայում ենք $\mathbf{i}$-ի ծայրից (տես՛ գծ. 106), ապա՝

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0, \quad \mathbf{i}\times\mathbf{j}=-\mathbf{j}\times\mathbf{i}=\mathbf{k},\\ &\mathbf{j}\times\mathbf{k}=-\mathbf{k}\times\mathbf{j}=\mathbf{i}, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=-\mathbf{i}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}.\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

Հետևաբար, $A\times B$ արտադրյալի համար ստացած (28) արտահայտության մեջ երեք գումարելիները կվերանան, իսկ մյուսները զույգ-զույգ կմիանան և կստանանք՝



Գծ. 106

$$A\times B=$$

$$=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\mathbf{i}+(Z_1X_2-Z_2X_1)\mathbf{j}+(X_1Y_2-X_2Y_1)\mathbf{k}:\tag{30}$$

Այս բանաձևը կարելի է գրել նաև հեշտ հիշվող սիմվոլիկ ձևով, եթե օգտագործենք 3-րդ կարգի դետերմինանտի[1] *գաղափարը՝*

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \qquad (31)$$

Գործնական հաշվումների համար կարելի է խորհուրդ տալ հետևյալ կարգը՝

1) կազմում ենք երկու տողից և երեք սյունից բաղկացած աղյուսակ, բազմապատկելիի պրոյեկցիաների տակ գրելով բազմապատկիչի պրոյեկցիաները՝

$$\left\| \begin{matrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{matrix} \right\|.$$

2) արտադրյալի առաջին պրոյեկցիան ստանալու համար այդ աղյուսակում ծածկում ենք առաջին սյունը և հաշվում մնացած 2-րդ կարգի դետերմինանտը. երկրորդ պրոյեկցիան ստանալու համար ծածկում ենք աղյուսակի երկրորդ սյունը և մնացած 2-րդ կարգի դետերմինանտը վերցնում ենք հակառակ նշանով. վերջապես, երրորդ պրոյեկցիան ստանալու համար ծածկում ենք աղյուսակի երրորդ սյունը և մնացած 2-րդ կարգի դետերմինանտը վերցնում իր նշանով։

Օրինակ, եթե բազմապատկվող վեկտորներն են՝ $\boldsymbol{A}\{3, 4, 8\}$*-ը և* $\boldsymbol{B}\{5, 1, 7\}$*-ը, ապա, օգտվելով*

$$\left\| \begin{matrix} 3 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 7 \end{matrix} \right\|$$

աղյուսակից, կգտնենք $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ *արտադրյալի պրոյեկցիաները, այն է՝* 20, 19, −17։

Նկատենք, որ $\boldsymbol{A}\{X_1, Y_1, Z_1\}$ *և* $\boldsymbol{B}\{X_2, Y_2, Z_2\}$ *վեկտորների զուգահեռության* $\boldsymbol{A}\times B=0$ *(22) պայմանը այժմ, (30) բանաձևի շնորհիվ, կարելի է արտահայտել հետևյալ հավասարումներով՝*

$$Y_1Z_2-Z_1Y_2=0,\quad Z_1X_2-X_1Z_2=0,\quad X_1Y_2-X_2Y_1=0, \qquad (32)$$

կամ

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2}, \qquad (32')$$

[1] *Դետերմինանտի գաղափարը տրված է 1-ին մասի* VI *գլխում։*

այսինքն՝ եթե վեկտորները կոլինեար են, ապա նրանց պրոյեկցիաները համեմատական են, և, հակադարձաբար, եթե պրոյեկցիաները համեմատական են, ապա վեկտորները կոլինեար են։

Նկատենք, որ անցումն (32)-ից (32′)-ին կարող ենք կատարել, եթե միայն X_2, Y_2, Z_2 թվերից ոչ մեկը զրո չէ։ Սակայն, շնորհիվ այն բանի, որ (32′) հավասարությունները շատ ավելի պարզ տեսք ունեն և հետագայում շարունակ կիրառվելու են, մենք այդ հավասարումները կգրենք նաև այն դեպքերում, երբ հայտարարներից ոմանք հավասար կլինեն զրոյի։ Գրության այդպիսի ձևն, անշուշտ, տառացիորեն չպետք է հասկանալ (քանի որ զրոյի վրա բաժանել չի կարելի), այլ պայմանականորեն, պարզապես որպես (32) հավասարությունները գրելու կրճատ ձև։ Այդպիսով, հետագայում (32′)-ը մեզ համար նշանակելու է նույնը, ինչ և (32)-ը։

Այսպես, օրինակ՝

$$\frac{X_1}{0}=\frac{Y_1}{0}=\frac{Z_1}{2}$$

հավասարությունները նշանակում են, որ

$$2Y_1=0\cdot Z_1, \qquad 0\cdot Z_1=2X_1, \qquad 0\cdot X_1=0\cdot Y_1,$$

այսինքն, որ՝ $X_1=0$, $Y_1=0$։

Օրինակ 1. Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե նրա գագաթներն են՝

$$A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2), \quad C(x_3, y_3, z_3)։$$

Քանի որ $\overrightarrow{AB}$ վեկտորն ունի x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 պրոյեկցիաները, իսկ $\overrightarrow{AC}$ վեկտորը՝ x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1 պրոյեկցիաները, ապա՝

$$\text{մակ. } ABC=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}^2}.$$

Օրինակ 2. Հաշվել $A(1, 2, 3)$, $B(3, 4, 5)$, $C(2, 4, 7)$ գագաթներ ունեցող ABC եռանկյան A անկյան սինուսը։

Քանի որ $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{AC}$ վեկտորները, համապատասխանորեն, ունեն 2, 2, 2 և 1, 2, 4 պրոյեկցիաները, ապա՝

$$\sin A = \frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{AB\cdot AC} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix}2&2\\2&4\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}2&2\\4&1\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix}2&2\\1&2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+4^2}} = \frac{\sqrt{56}}{\sqrt{21\cdot 12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}։$$

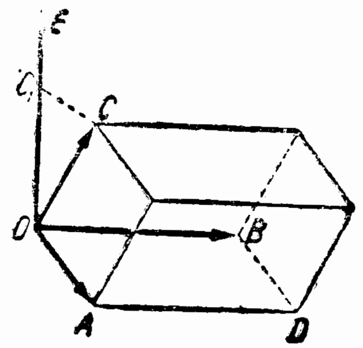
Անկյունը պետք է սուր վերցնել, եթե $BC^2 < AB^2+AC^2$, *և բութ, եթե* $BC^2 > AB^2+AC^2$։ *Տվյալ դեպքում A անկյունը սուր է։*

§ **14. Վեկտորա-սկալյար արտադրյալ։** *Տեսնենք, թե ի՞նչ կարելի է ասել երեք վեկտորների արտադրյալի վերաբերյալ։ Եթե* **A** *և* **B** *վեկտորները բազմապատկենք սկալյարորեն, կստանանք սկալյար։ Մի երրորդ* **C** *վեկտոր բազմապատկելով այդ սկալյարով, մենք կստանանք* **C**-*ին կոլինեար վեկտոր։*

Բոլորովին այլ արդյունք կստացվի, եթե տված երկու վեկտորները բազմապատկենք վեկտորապես. կստանանք մի նոր վեկտոր՝ $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$։ *Հետաքրքրական է հետազոտել այդ վեկտորի ինչպես սկալյար, այնպես էլ վեկտորական արտադրյալը մի նոր* **C** *վեկտորի հետ։ Առաջին դեպքում կունենանք* $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\mathbf{C}$ *վեկտորա-սկալյար արտադրյալը, իսկ երկրորդ դեպքում՝* $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ *վեկտորա-վեկտորական կամ՝ կրկնակի վեկտորական արտադրյալը։*

$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\mathbf{C}$ *վեկտորա-սկալյար արտադրյալն անվանում են նաև խառն արտադրյալ և նշանակում* $(\mathbf{ABC})$ *կամ՝* $\mathbf{ABC}$։

Վեկտորա-սկալյար արտադրյալի կիրառությունների համար շատ կարևոր է պարզել նրա երկրաչափական իմաստը։ Դիցուք տված **A**, **B** *և* **C** *վեկտորները կոմպլանար չեն։* $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{E}$ *վեկտորական արտադրյալը մի վեկտոր է, որի երկարությունը հավասար է* **A** *և* **B** *վեկտորների վրա կառուցած* OADB *զուգահեռագծի մակերեսին և ուղղահայաց է այդ զուգահեռագծի հարթությանը (գծ. 107)։*



Գծ. 107

$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{EC}$ *սկալյար արտադրյալը հավասար է առաջին բազմապատկիչի* E *երկարությանը, բազմապատկած* **C** *վեկտորի պրոյեկցիայով առաջին վեկտորի ուղղության վրա։ Այդ* C_1 *պրոյեկցիան, որպես* **C** *վեկտորի պրոյեկցիա հարթության ուղղահայացի վրա, հավասար է* **C** *վեկտորի* C *ծայրի հեռավորությանը* OADB *զուգահեռագծի հարթությունից, վերցրած + կամ — նշանով։*

A, **B**, **C** *վեկտորների, որպես կողերի, վրա կառուցենք զուգահեռանիստ։ Այդ զուգահեռանիստի բարձրությունը կլինի մեր* *ստացած C_1 պրոյեկցիայի բացարձակ մեծությունը, իսկ հիմքի՝ OADB զուգահեռագծի մակերեսը թվապես հավասար է E վեկտորի երկարությանը:*

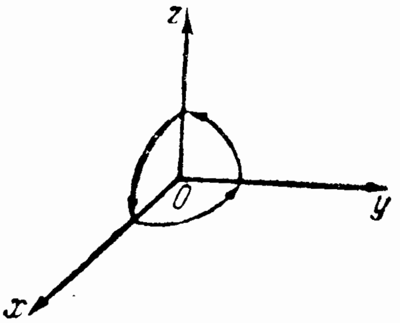
Այսպիսով, $EC=EC_1$ արտադրյալը բացարձակ մեծությամբ հավասար է զուգահեռանիստի հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալին, այսինքն՝ զուգահեռանիստի ծավալին: Ընդ որում պետք է նկատել, որ սկալյար արտադրյալը տալիս է զուգահեռանիստի ծավալը երբեմն դրական նշանով, երբեմն էլ բացասական: Դրական նշան է ստացվում այն դեպքում, երբ E և C վեկտորները սուր անկյուն են կազմում, իսկ բացասական նշան՝ երբ բութ անկյուն են կազմում: Երբ E և C վեկտորները սուր անկյուն են կազմում, C վեկտորը գտնվում է OADB հարթության նույն կողմում, որ կողմում գտնվում է E վեկտորը, և, հետևաբար, նրա C ծայրից A-ից դեպի B պտույտը կերևա այնպես, ինչպես E վեկտորի E ծայրից, այն է՝ դրական ուղղությամբ (ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ):

Երբ E և C վեկտորները բութ անկյուն են կազմում, C վեկտորը գտնվում է OADB հարթության ոչ նույն կողմում, ինչ որ E վեկտորը, այլ՝ հակառակ կողմում: Հետևաբար, նրա C ծայրից A-ից դեպի B պտույտը կերևա բացասական ուղղությամբ (ժամացույցի սլաքի շարժման ուղղությամբ): Այլ կերպ ասած, (ABC) արտադրյալը դրական է, եթե A, B և C վեկտորները կազմում են հիմնական սիստեմի հետ համանուն սիստեմ (միմյանց նկատմամբ այնպես են դասավորված, ինչպես և Ox, Oy, Oz առանցքները), և բացասական է, եթե այդ վեկտորները կազմում են հիմնական սիստեմին հականուն սիստեմ:

Այսպիսով, մենք ստանում ենք հետևյալ թեորեման՝

Երեք ոչ կոմպլանար վեկտորների $(ABC)=(A\times B)C$ վեկտորասկալյար արտադրյալը մի թիվ է, որի բացարձակ մեծությունն արտահայտում է A, B, C վեկտորների վրա, որպես կողերի վրա կառուցած զուգահեռանիստի ծավալը, իսկ նշանը դրական է, եթե այդ վեկտորները կազմում են հիմնական սիստեմի հետ համանուն սիստեմ, և բացասական է՝ հակառակ դեպքում:

Այս թեորեմայից հետևում է, որ վեկտորա-սկալյար արտադրյալի բացարձակ մեծությունը կմնա նույնը, ինչպիսի հերթականությամբ էլ վեկտորները բազմապատկելու լինենք: Ինչ վերաբերում է նշանին, ապա նա որոշ դեպքերում դրական կլինի, ուրիշ դեպքերում՝ բացասական. այդ կախված է նրանից, թե մեր վեկտորները, վերցրած որոշ կարգով, արդյո՞ք հիմնական սիստեմի հետ համանուն սիստեմ են կազմում, թե՞ ոչ։ Նկատենք, որ մեզ մոտ կոորդինատային առանցքներն այնպես են դասավորված, որ նրանք միմյանց հաջորդում են ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ, երբ նայում ենք նրանցով կազմված եռանիստ անկյան ներսը (գծ. 108)։ Նրանց հերթականությունը չի խախտվի, եթե մենք սկսենք երկրորդ կամ երրորդ առանցքից, միայն թե ուղղությունը պահպանենք, այն է՝ ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությունը։ Այդպիսի դեպքում արտադրյալի բազմապատկիչները շրջանաձև տեղափոխություն են կատարում։



Գծ. 108

Այսպիսով, ստանում ենք հետևյալ թեորեման՝

վեկտորա-սկալյար արտադրյալի երեք բազմապատկիչների շրջանաձև տեղափոխությունը նրա մեծությունը չի փոխում, իսկ հարևան երկու բազմապատկիչների տեղափոխությունը փոխում է արտադրյալի նշանը՝

$$(\mathbf{ABC})=(\mathbf{BCA})=(\mathbf{CAB})=$$
$$=-(\mathbf{BAC})=-(\mathbf{CBA})=-(\mathbf{ACB})։ \qquad (33)$$

Ե՞րբ կարող է վեկտորա-սկալյար արտադրյալը զրո դառնալ։ Ակներևորեն, այն դեպքում, եթե՝ ա) բազմապատկիչներից թեկուզ մեկը զրո վեկտոր է, բ) բազմապատկվող վեկտորներից թեկուզ երկուսը կոլինեար են (և, հետևաբար, նրանց վեկտորական արտադրյալը հավասար է զրո վեկտորի), մասնավորապես՝

$$(\mathbf{AAB})=(\mathbf{ABA})=(\mathbf{BAA})=0. \qquad (34)$$

գ) երեք վեկտորները կոմպլանար են (զուգահեռ են միևնույն հարթությանը), որովհետև այդ դեպքում $\mathbf{A}\times\mathbf{B}\perp\mathbf{C}$ և, հետևաբար՝

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\mathbf{C}=0։$$

Բոլոր երեք դեպքերը միացնելով, կարող ենք ասել, որ $(\mathbf{ABC})=0$, եթե $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ վեկտորները կոմպլանար են։ Այժմ ենթադրենք, թե $(\mathbf{ABC})=0$։ Այդ դեպքում, եթե վեկտորներից ոչ մեկը զրո չէ և ոչ մի զույգը կոլինեար չէ, ապա $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ և $\mathbf{C}$ վեկտորները պետք է ուղղահայաց լինեն, քանի որ նրանց սկալյար արտադրյալը հավասար է զրոյի։ Քանի որ, բացի դրանից,

$A\times B$ *վեկտորն ուղղահայաց է* A *և* B *վեկտորներին, ապա* A, B, C *վեկտորները կոմպլանար են: Հետևաբար, կարելի է ասել, որ*

$$(ABC)=0 \tag{35}$$

հավասարությունը անհրաժեշտ և բավարար պայման է A, B, C վեկտորների կոմպլանարության համար:

Այստեղից, մասնավորապես, հետևում է, որ (33) բանաձևերը, որոնք ապացուցել էինք ոչ կոմպլանար վեկտորների համար, իրավացի են մնում նաև նրանց կոմպլանարության դեպքում:

Օ ր ի ն ա կ 1. Ցույց տալ, որ եռանկյուն բուրգի ծավալը հավասար է նրա մի գագաթից ելնող երեք վեկտոր-կողերից կազմած վեկտորա-սկալյար արտադրյալի բացարձակ մեծության $\frac{1}{6}$*-ին:*

Իրոք, ABCD *եռանկյուն բուրգի ծավալը կարելի է դիտել որպես* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ *վեկտորների վրա, որպես կողերի վրա կառուցած զուգահեռանիստի ծավալի* $\frac{1}{6}$ *մաս՝*

$$\text{ծավ. } ABCD = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD})\right|:$$

Օ ր ի ն ա կ 2. Հետևյալ արտահայտության մեջ բացել փակագծերը՝

$$((A+B)\ (B+C)\ (C+A)):$$

Այս արտահայտությունն իրենից ներկայացնում է՝

$$[(A+B)\times(B+C)]\ (C+A):$$

Վեկտորական արտադրյալը կլինի՝

$$A\times B+B\times B+A\times C+B\times C=A\times B+A\times C+B\times C:$$

Ստացվածը սկալյարորեն բազմապատկելով $(C+A)$*-ով, կունենանք՝*

$$(A\times B)C+(A\times \cancel{C})\cancel{C}+(B\times C)C+(A\times B)A+(A\times C)\cancel{A}+(B\times C)A=$$
$$=(A\times B)C+(B\times C)A=(ABC)+(BCA)=(ABC)+(ABC)=2(ABC):$$

§ 15. Վեկտորա-սկալյար արտադրյալը պրոյեկցիաներով: A *վեկտորի պրոյեկցիաները նշանակելով* X_1, Y_1, Z_1, B *վեկտորինը՝* X_2, Y_2, Z_2, *և* C *վեկտորինը* X_3, Y_3, Z_3, *նախ գտնենք* $A\times B$ *արտադրյալի պրոյեկցիաները, որոնք, (30) բանաձևերի համաձայն, կլինեն՝*

$$\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}: \tag{ա}$$

Այժմ, գիտենալով $(A\times B)C$ սկալյար արտադրյալի $A\times B$ բազմապատկիչի (ա) պրոյեկցիաները և C բազմապատկիչի X_3, Y_3, Z_3 պրոյեկցիաները, այդ արտադրյալը, (15) բանաձևի համաձայն, կգրենք այսպես՝

$$(ABC)=(A\times B)C=X_3\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}+Y_3\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}+Z_3\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}.$$

Սակայն, այս հավասարության աջ մասն իրենից ներկայացնում է

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

երրորդ կարգի դետերմինանտի վերլուծումն ըստ երրորդ տողի էլեմենտների։ Այսպիսով, վերջնականապես կունենանք՝

$$(ABC)=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}, \tag{36}$$

այսինքն՝ իրենց պրոյեկցիաներով տրված երեք վեկտորների վեկտորա-սկալյար արտադրյալը հավասար է այդ պրոյեկցիաներից կազմած 3-րդ կարգի դետերմինանտին։ Ընդ որում պետք է հիշել, որ դետերմինանտի 1-ին, 2-րդ և 3-րդ տողերում սովորական կարգով գրվում են բազմապատկվող վեկտորներից 1-ինի, 2-րդի և 3-րդի պրոյեկցիաները։

Օգտվելով (36) բանաձևից, տեսնում ենք, որ (35) պայմանը, որն անհրաժեշտ է և բավարար $A\{X_1\ \ Y_1\ \ Z_1\}$, $B\{X_2,\ \ Y_2,\ \ Z_2\}$ և $C\{X_3\ \ Y_3\ \ Z_3\}$ վեկտորների կոմպլանարության համար, այժմ կարելի է գրել այսպես՝

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}=0. \tag{37}$$

Օրինակ 1. Հաշվել (ABC) արտադրյալը, եթե՝

$$A\{3,\ 4,\ 2\},\qquad B\{3,\ 5,\ -1\},\ C\{2,\ 3,\ 5\}.$$

Օգտվելով (36) բանաձևից, գրում ենք՝

$$ABC=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=14.$$

Օրինակ 2. Ստանալ տրված $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $C(x_3,\ y_3,\ z_3)$ և $D(x_4,\ y_4,\ z_4)$ չորս կետերի՝ մեկ հարթության մեջ գտնվելու պայմանը.

Որոնելի պայմանը համասարազոր է $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, և $\overrightarrow{AD}$ վեկտորների կոմպլանարության պայմանին և, հետևաբար, (37) բանաձևի համաձայն կարող է գրվել այսպես

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = 0։$$

Օ ր ի ն ա կ 3. Նույն նշանակումները պահպանելով՝ ABCD եռանկյուն բուրգի V ծավալի համար, կստանանք՝

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}, \qquad (բ)$$

Իրոք, § 14-ի 1-ին օրինակից ունենք՝

$$V = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right)։$$

Քանի որ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AD}$ վեկտորները համապատասխանաբար ունեն հետևյալ պրոյեկցիաները՝

$$x_2-x_1,\quad y_2-y_1,\quad z_2-z_1,$$
$$x_3-x_1,\quad y_3-y_1,\quad z_3-z_1,$$
$$x_4-x_1,\quad y_4-y_1,\quad z_4-z_1,$$

ապա, տեղադրելով այս արժեքները (36) բանաձևում, կստանանք (բ) բանաձևը, որտեղ դետերմինանտի առաջ պետք է վերցնել այն նշանը, ինչ որ կունենա ինքը՝ դետերմինանտը։

§ 16. Կրկնակի վեկտորական արտադրյալ։

Մենք դիտարկեցինք վեկտորա-սկալյար արտադրյալը։ Այժմ անցնենք վեկտորա-վեկտորական արտադրյալին՝

$$(A\times B)\times C,$$

որը հաճախ անվանում են կրկնակի վեկտորական արտադրյալ։

Վեկտորա-սկալյար արտադրյալի համար մենք ստացանք երկրաչափական գեղեցիկ մեկնաբանություն։ Իսկ այստեղ մենք կստանանք մի բանաձև, որը նշանակալից չափով հեշտացնում է վեկտորա-վեկտորական արտադրյալի հաշվումը։ Այդ բանաձևը հետևյալ տեսքն ունի՝

$$(A\times B)\times C = B(AC) - A(BC)։ \qquad (38)$$

Կրկնակի վեկտորական արտադրյալը, որը մի նոր վեկտոր է, նշանակելով D, գտնենք նրա D_x, D_y, D_z պրոյեկցիաները։ Այդ նպատակով նախ գտնենք $A\times B$ վեկտորի պրոյեկցիաները, որոնք, (30) բանաձևի համաձայն, կլինեն (այստեղ $\boldsymbol{A}$ վեկտորի պրոյեկցիաները նշանակում ենք՝ A_x, A_y, A_z և նման ձևով մյուս վեկտորներինը)՝

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_x = A_yB_z - A_zB_y,$$
$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_y = A_zB_x - A_xB_z,$$
$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_z = A_xB_y - A_yB_x\text{:}$$

Այնուհետև, կիրառելով նույն (30) բանաձևը $\boldsymbol{D}$ վեկտորի համար, կստանանք՝

$$D_x = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_y\, C_z - (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_z\, C_y =$$
$$= (A_zB_x - A_xB_z)C_z - (A_xB_y - A_yB_x)C_y =$$
$$= B_x(A_yC_y + A_zC_z) - A_x(B_yC_y + B_zC_z)\text{:}$$

Գումարելով ու հանելով $A_xB_xC_x$, կստանանք՝

$$D_x = B_x(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) - A_x(B_xC_x + B_yC_y + B_zC_z),$$

որն ավելի կարճ կարելի է այսպես գրել՝

$$D_x = B_x(\boldsymbol{AC}) - A_x(\boldsymbol{BC})\text{:}$$

Նման բանաձևեր են ստացվում նաև մյուս երկու պրոյեկցիաների համար՝

$$D_y = B_y(\boldsymbol{AC}) - A_y(\boldsymbol{BC}),$$
$$D_z = B_z(\boldsymbol{AC}) - A_z(\boldsymbol{BC})\text{:}$$

Գիտենալով $\boldsymbol{D}$ վեկտորի պրոյեկցիաները, ինքը՝ $\boldsymbol{D}$ վեկտորը կգրվի այսպես՝

$$\boldsymbol{D} = D_x\boldsymbol{i} + D_y\boldsymbol{j} + D_z\boldsymbol{k},$$

որտեղ տեղադրելով D_z-ի, D_y-ի և D_z-ի համար հենց նոր գտած արտահայտությունները, կստանանք՝

$$\boldsymbol{D} = (B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k})(\boldsymbol{AC}) - (A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k})(\boldsymbol{BC}),$$

կամ՝

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})\text{:}$$

$\boldsymbol{D}$-ն փոխարինելով իր արժեքով, կստանանք հենց (38) բանաձևը։

Նկատենք, որ կրկնակի վեկտորական արտադրյալի մեջ շատ կարևոր է տարբերել բազմապատկման կարգը։ Այսպես, օրինակ, հաշվելով $\boldsymbol{A}\times(\mathrm{B}\times\boldsymbol{C})$ արտադրյալը, մենք բոլորովին այլ վեկտոր կստանանք, այն է՝

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = -(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\times\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{AB})\text{:}$$

Այսինքն՝ ստանում ենք այսպիսի բանաձև՝

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})։ \tag{39}$$

Համեմատելով միմյանց հետ (38) և (39) բանաձևերը, կարելի է ձևակերպել հետևյալ կանոնը, որով ավելի հեշտ կարելի է հիշել կրկնակի վեկտորական արտադրյալի վերլուծման բանաձևը, այն է՝

կրկնակի վեկտորական արտադրյալը հավասար է միջին վեկտորին՝ բազմապատկած մյուս երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալով, հանած փակագծի ներսի եզրային վեկտորը՝ բազմապատկած մյուս երկուսի սկալյար արտադրյալով:

A, B, C վեկտորների շրջանաձև տեղափոխությամբ, (38) բանաձևով կստանանք երեք տարբեր վեկտորներ՝

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}),$$
$$(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}),$$
$$(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})։$$

Այս երեք հավասարությունները գումարելով, կստանանք հետևյալ նույնությունը՝

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}+(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\times\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B}=0։$$

(39) բանաձևի կիրառություններից մեկը հետևյալն է՝

յուրաքանչյուր B վեկտոր կարելի է վերլուծել երկու բաղադրիչների, որոնցից մեկը զուգահեռ է, իսկ մյուսը՝ ուղղահայաց կամայապես տված A վեկտորին:

Իսկապես, (39) բանաձևում ընդունելով $C=A$, կստանանք՝

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^2)-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})։$$

Այս հավասարությունը լուծելով B-*ի նկատմամբ, կստանանք՝*

$$\boldsymbol{B}=\frac{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})}{\boldsymbol{A}^2}\boldsymbol{A}+\frac{1}{\boldsymbol{A}^2}[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})], \tag{41}$$

որտեղ աջ մասի առաջին գումարելի վեկտորն, ակներևորեն, զուգահեռ է A վեկտորին, իսկ երկրորդ գումարելի վեկտորը՝ ուղղահայաց է նույն վեկտորին։

(41) բանաձևն առանձնապես պարզ տեսք է ընդունում, երբ A-ն միավոր վեկտոր է։ Այդ դեպքում A=1 *և ստացվում է՝*

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})։ \tag{42}$$

Մենք դիտարկեցինք երեք վեկտորների արտադրյալների երկու դեպք. Նրանք մեծ դեր են կատարում վեկտորական հանրահաշվում։ Չորս և ավելի թվով վեկտորների արտադրյալները կարելի է բերել մեր դիտարկած արտադրյալներին։

Օ ր ի ն ա կ 1. Ցույց տալ, որ եթե $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, ապա

$$\mathbf{a}\times\{\mathbf{a}\times[\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]\}=a^4\mathbf{b}։$$

Իսկապես՝

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}(\mathbf{ab})-\mathbf{b}(\mathbf{aa})=-\mathbf{b}a^2։$$

Ստացված հավասարությունը ձախից վեկտորապես բազմապատկելով $\mathbf{a}$-ով, կգտնենք՝

$$\mathbf{a}\times[\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]=\mathbf{a}\times(-\mathbf{b}a^2)=-a^2(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=a^2(\mathbf{b}\times\mathbf{a})։$$

Նույն գործողությունը կրկնելով այս հավասարության նկատմամբ, կստանանք՝

$$\mathbf{a}\times\{\mathbf{a}\times[\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]\}=a^2[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a})]=a^2\mathbf{b}(\mathbf{aa})-a^2\mathbf{a}(\mathbf{ab})=\mathbf{ab},$$

որ և պահանջվում էր։ Ընթերցողին խորհուրդ ենք տալիս այս արդյունքը ստուգել երկրաչափորեն։

Օ ր ի ն ա կ 2. Հաշվել $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$։

Ժամանակավորապես նշանակելով $(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\mathbf{e}$, մենք $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{e}$ վեկտորասկալյար արտադրյալում բազմապատկիչների շրջանաձև տեղափոխություն կատարենք, որն, ինչպես գիտենք, թույլատրելի է։ Այսպիսով, կստանանք՝

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{e}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{e})=\mathbf{a}[\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]=\mathbf{a}(\mathbf{c}(\mathbf{bd})-\mathbf{d}(\mathbf{bc}))=(\mathbf{ac})(\mathbf{bd})-(\mathbf{ad})(\mathbf{bc}),$$

այսինքն՝

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\begin{vmatrix}\mathbf{ac} & \mathbf{ad}\\ \mathbf{bc} & \mathbf{bd}\end{vmatrix}։$$

Մասնավորապես $\mathbf{d}=\mathbf{a}$ դեպքում կստանանք՝

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=a^2((\mathbf{bc})-(\mathbf{ab})(\mathbf{ac})։$$

Վարժություններ

1. Տրված են կոորդինատների երկու ուղղանկյուն դեկարտյան սիստեմներ, որոնց առանցքներն ունեն միևնույն ուղղությունները։ Նոր սկզբնակետի շառավիղ-վեկտորն է՝ $\mathbf{r}_0\{a, b, c\}$։ Գտնել կապը կամայական կետի՝ հին և նոր սիստեմների նկատմամբ $\mathbf{r}\{x, y, z\}$ և $\mathbf{r}_1\{x_1, y_1, z_1\}$ շառավիղ-վեկտորների միջև։

2*. Տրված են կոորդինատների երկու ուղղանկյուն դեկարտյան սիստեմներ ընդհանուր սկզբնակետով։ Գտնել կամայական կետի x, y, z կոորդինատները հին սիստեմի նկատմամբ՝ արտահայտված նույն կետի x_1, y_1, z_1 կոորդինատներով նոր սիստեմի նկատմամբ։

3. Գտնել ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատների ձևափոխման բանաձևերը ընդհանուր դեպքում։

4. Ապացուցել, որ եթե քառանկյան անկյունագծերը միմյանց կիսում են, ապա քառանկյունը զուգահեռագիծ է։

5. Եռանկյան գագաթները տրված են իրենց $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ շառավիղ-վեկտորներով։ Գտնել եռանկյան միջնագծերի հատման կետի շառավիղ-վեկտորը։ Պատասխանն արտահայտել նաև դեկարտյան կոորդինատներով։

6. Տված են երեք նյութական կետեր, որտեղ կենտրոնացած են m_1, m_2, m_3 զանգվածները։ Գտնել այդ կետերի սիստեմի ծանրության կենտրոնի շառավիղ-վեկտորը, ինչպես և նրա դեկարտյան կոորդինատները։

7. Ապացուցել, որ $\mathbf{A}\{3, 2, 1\}$ և $\mathbf{B}\{2, -3, 0\}$ վեկտորներն ուղղահայաց են։

8. Գտնել $\mathbf{A}\{1, 1, 1\}$ վեկտորի երկարությունը և ուղղությունը։

9. Գտնել $\mathbf{A}\{4, -3, 4\}$ վեկտորի պրոյեկցիան $\mathbf{B}\{2, 2, 1\}$ վեկտորի ուղղության վրա։

10* Տված է OACB զուգահեռագիծը, որտեղ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}=\mathbf{A}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}=\mathbf{B}$։ Երկրաչափորեն մեկնաբանել հետևյալ բանաձևերը՝

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2+(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2=2(\mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2),$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2-(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2=4\mathbf{A}\mathbf{B},$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B})=\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2։$$

Այս հավասարություններից վերջինն ինչպիսի՞ նշանակություն ունի շեղանկյան համար։

11. Ապացուցել, որ $\mathbf{x}=\mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{a}(\mathbf{bc})$ վեկտորն ուղղահայաց է $\mathbf{c}$ վեկտորին։

12. Ապացուցել, որ եռանկյան երեք բարձրությունները հատվում են մեկ կետում։

13. Ինչպիսի՞ անկյուն են կազմում հետևյալ երկու վեկտորները՝

$$\mathbf{A}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-4\mathbf{k} \text{ և } \mathbf{B}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}։$$

14. Որոշել $\mathbf{a}$ և $\mathbf{b}$ վեկտորներով կազմված անկյունը, եթե հայտնի է, որ $\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ վեկտորն ուղղահայաց է $7\mathbf{a}-5\mathbf{b}$ վեկտորին, իսկ $\mathbf{a}-4\mathbf{b}$ վեկտորը՝ $7\mathbf{a}-2\mathbf{b}$ վեկտորին։

15. Արտածել երկու անկյունների գումարի կոսինուսի բանաձևը։

16. Տված է, որ՝ $\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{c}\neq 0$։ Կարելի՞ է արդյոք այստեղից եզրակացնել, որ $\mathbf{a}=\mathbf{b}$։

17*. Արտածել $\sin(\alpha-\beta)$-ի բանաձևը։

18. Գտնել այն զուգահեռագծի մակերեսի մեծությունը, որի կողմերը $\mathbf{a}=\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ և $\mathbf{b}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ վեկտորներն են։

19. Հաշվել այն եռանկյան մակերեսը, որի գագաթները գտնվում են $A(3, 4, -1)$, $B(2, 0, 3)$, $C(-3, 5, 4)$ կետերում։

20. Գտնել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե հայտնի են նրա երկու կողմերի պրոյեկցիաները՝

$$\overrightarrow{CA}\{X_1, Y_1, Z_1\}, \quad \overrightarrow{CB}\{X_2, Y_2, Z_2\}։$$

21. Պահպանելով № 20 խնդրի նշանակումները, գտնել C անկյան սինուսը։

22. Հաշվել $\mathbf{ij}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ վեկտորա-սկալյար արտադրյալը։

23. Ցույց տալ, որ $\mathbf{abc}=\mathbf{ab}(\mathbf{c}+\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})$։

24. Ցույց տալ, որ $\{3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 2\}$ *և* $\{9, 14, 16\}$ *վեկտորները կոմպլանար են։*

25. Ցույց տալ, որ $A(1, 0, 1)$, $B(4, 4, 6)$, $C(2, 2, 3)$ *և* $D(10, 14, 17)$ *չորս կետերը գտնվում են մեկ հարթության մեջ։*

26. Եռանկյուն բուրգի գագաթները գտնվում են $A(0, 0, 0)$, $B(3, 4, -1)$, $C(2, 3, 5)$, $D(6, 0, -3)$ *կետերում։ Հաշվել բուրգի ծավալը։*

27. Նախորդ խնդրի տվյալներով գտնել A *գագաթից իջեցրած բարձրության երկարությունը։*

28. Տված են $\mathbf{a}\{3, 0, -1\}$, $\mathbf{b}\{2, 4, 3\}$, $\mathbf{c}\{-1, 3, 2\}$, $\mathbf{d}\{2, 0, 1\}$ *վեկտորները։ Հաշվել* $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ *և* $(\mathbf{a}\times\mathbf{c})(\mathbf{b}\times\mathbf{d})$*։*

29 Երկու ուղիղներից մեկն անցնում է* $A(3, 0, -1)$ *կետով և զուգահեռ է* $\mathbf{B}\{2, 4, 3\}$ *վեկտորին, իսկ մյուսն անցնում է* $C(-1, 3, 2)$ *կետով և զուգահեռ է* $\mathbf{D}\{2, 0, 1\}$ *վեկտորին։ Գտնել կարճագույն հեռավորությունն այդ ուղիղների միջև։*

30 Գտնել* $A(3, 4, 2)$ *կետի հեռավորությունն այն ուղիղից, որն անցնում է* $B(1, 2, 3)$ *կետով և զուգահեռ է* $\mathbf{C}\{6, 6, 7\}$ *վեկտորին։*

ԳԼՈՒԽ III

ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՆՇԱՆԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

§ 1. Մակերևույթի հավասարումը: Անալիտիկ երկրաչափության մեջ ամեն մի մակերևույթ դիտարկում են որպես կետերի երկրաչափական տեղ։ Մակերևույթի այդպիսի սահմանումն իր մեջ պարունակում է նրա բոլոր կետերի համար ընդհանուր հատկություն։ Տվյալ մակերևույթի կամայական կետի կոորդինատները մի որոշ ուղղանկյուն կոորդինատային սիստեմի նկատմամբ նշանակելով x, y, z, մենք մակերևույթի բոլոր կետերի և միայն նրանց համար ընդհանուր հատկությունը արտահայտում ենք մի որոշ հավասարման միջոցով x-ի, y-ի և z-ի միջև։ Այդպիսով, x, y և z փոփոխականների միջև կազմում է մի հավասարում, որին բավարարում են տվյալ մակերևույթի ցանկացած կետի կոորդինատները և միայն նրանք։ Այդ հավասարումն անվանում են մակերևույթի հավասարում, իսկ նրա մեջ մտնող x, y, z կոորդինատները՝ ընթացիկ կոորդինատներ:

Այդպիսով, հնարավորություն է ստեղծվում մակերևույթի երկրաչափական հատկությունների հետազոտումը հանգեցնել նրանց համապատասխանող հավասարման անալիտիկ հատկությունների հետազոտման։

Դիտարկենք տրված մակերևույթների հավասարումները կազմելու վերաբերյալ մի քանի պարզագույն օրինակներ։

Օրինակ 1. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որը կիսում է $A(1, 2, 3)$ և $B(2, -1, 4)$ կետերը միացնող հատվածը և ուղղահայաց է նրան։

Ակներևորեն, այդ հարթությունը այնպիսի կետերի երկրաչափական տեղն է, որոնք հավասարապես են հեռացած A և B կետերից։ Վերցնենք նրա վրա մի կամայական $M(x, y, z)$ կետ։ Երկու կետերի հեռավորության բանաձևերի համաձայն կունենանք՝

$$AM=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2},$$

$$BM=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}\text{։}$$

Այս հեռավորությունները միմյանց հավասարեցնելով, կստանանք՝

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}\text{։}$$

Այստեղից, հավասարության երկու մասերը քառակուսի բարձրացնելով, պարզեցումներից հետո կստանանք՝

$$2x-6y+2z-7=0\text{։}$$

Սա էլ հենց տված հարթության հավասարումն է։

Օրինակ 2. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որը կիսում է XOZ և YOZ հարթությունների միջև գտնվող երկնիստ անկյունը և անցնում է առաջին ութնորդով։

Պարզ է, որ այդ հարթությունն այն կետերի երկրաչափական տեղն է, որոնք հավասարապես են հեռացած XOZ և YOZ կոորդինատային հարթություններից։ Հետևաբար, այդ հարթության յուրաքանչյուր կետի համար, և միայն այդպիսի կետերի համար, տեղի ունի $|x|=|y|$ հավասարությունը։

Բացի դրանից, հեշտ է համոզվել, որ տված հարթության ցանկացած կետի համար այդ երկու կոորդինատներն ունեն միևնույն նշանը (առաջին և հինգերորդ ութնորդներում՝ դրական, իսկ երրորդ և յոթերորդ ութնորդներում՝ բացասական)։ Հետևաբար, հարթության յուրաքանչյուր կետի համար աբսցիսը հավասար է օրդինատին՝

$$x=y,\ \text{կամ՝}\ x-y=0\text{։}$$

Հենց այս էլ տված հարթության որոնելի հավասարումն է։

Միանգամայն նման ձևով ստացվում է նաև այն հարթության հավասարումը, որը կիսում է նույն երկնիստ անկյունը XOZ և YOZ կոորդինատային հարթությունների միջև, բայց անցնում է երկրորդ ութնորդով։ Տարբերությունը միայն նրանումն է, որ այդ հարթության ցանկացած կետի աբսցիսն ու օրդինատը, բացարձակ մեծությամբ հավասար լինելով, ունեն հակադիր նշաններ։ Այդ պատճառով էլ նրա հավասարումը կլինի՝

$$x=-y,\ \text{կամ՝}\ x+y=0\text{։}$$

Օրինակ 3. Գտնել YOZ կոորդինատային հարթության հավասարումը։ Ակներևորեն, այդ հարթությունն այն կետերի երկրաչափական տեղն է, որոնց աբսցիսները հավասար են զրոյի։ Այդ պատճառով նրա հավասարումը կլինի՝ $x=0$։ Համանման ձևով XOZ հարթության հավասարումը կլինի՝ $y=0$։

Օրինակ 4. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որը զուգահեռ է XOY կոորդինատային հարթությանը և գտնվում է նրանից c հեռավորության վրա՝ z-ի դրական արժեքների կողմում։

Այդ հարթությունը այն կետերի երկրաչափական տեղն է, որոնց ապլիկատները հավասար են c-ի։ Այդ պատճառով էլ նրա հավասարումը կլինի՝ $z=c$։

Օ ր ի ն ա կ 5. *Գտնել այն սֆերայի*[1] *հավասարումը, որի կենտրոնը գտնվում է* $C(a, b, c)$ *կետում, իսկ շառավիղը հավասար է* R*-ի։*

Սֆերայի կամայական M *կետի կոորդինատները նշանակելով* x, y, z, *բոլոր* M *կետերի համար ընդհանուր հատկությունն արտահայտենք անալիտիկորեն։ Սֆերայի սահմանումից հետևում է, որ* M *կետի հեռավորությունը* C *կենտրոնից հաստատուն մեծություն է, որը հավասար է* R*-ի, այսինքն՝*

$$CM = R\text{։} \qquad (1)$$

CM*-ը որոշելով որպես* C *և* M *երկու կետերի հեռավորություն (մաս 2-րդ, գլ* I, § *2), մենք առաջին հավասարությունը կարտահայտենք* M *կետի ընթացիկ կոորդինատներով՝*

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = R\text{։}$$

Այս հավասարման երկու մասերը քառակուսի բարձրացնելով, այն արմատից կազատենք և սֆերայի հավասարումը *կստանանք վերջնական տեսքով՝*

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2\text{։} \qquad (2)$$

Այս հավասարման մեջ a, b, c *և* R *հաստատունները, համապատասխանորեն, կենտրոնի կոորդինատները և սֆերայի շառավիղն են, իսկ* x, y *և* z *փոփոխականները՝ սֆերայի կամայական կետի կոորդինատները։ Մասնավորապես, եթե սֆերայի կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, ապա* $a=b=c=0$, *և (2) հավասարումն ավելի պարզ տեսք է ընդունում՝*

$$x^2+y^2+z^2=R^2\text{։}$$

§ **2. Հավասարման երկրաչափական իմաստը:** *Մենք տեսանք, որ ամեն մի մակերևույթ, դիտարկելով այն որպես կետերի երկրաչափական տեղ, կարող է ներկայացվել մի հավասարումով մակերևույթի կետերի կոորդինատների միջև։ Հակադարձաբար,* x, y, *և* z *փոփոխականների միջև ամեն մի հավասարում, ընդհանրապես ասած, որոշում է մի մակերևույթ որպես այնպիսի կետերի երկրաչափական տեղ, որի* x, y *և* z *կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը։*

§ **3. Երկու հիմնական խնդիր:** §§ *1 և 2-ում շարադրվածից բխում է, որ կարելի է առաջադրել հետևյալ երկու հիմնական խնդիրները,*

1. Տրված է մակերևույթը որպես կետերի երկրաչափական տեղ: Կազմել այդ մակերևույթի հավասարումը:

2. Տրված է հավասարում x, y և z կոորդինատների միջև: Հետազոտել այդ հավասարումով որոշվող մակերևույթի ձևը:

§ **4. Սֆերա:** *Մենք տեսանք, որ* R *շառավիղ և* $C(a, b, c)$ *կենտրոն ունեցող սֆերան ունի հետևյալ հավասարումը՝*

---

[1] *Սֆերա կոչվում է գնդային մակերևույթը։*

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2։ \qquad (2)$$

Փակագծերը բացելով, այս հավասարմանը կտանք հետևյալ տեսքը՝

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+$$
$$+(a^2+b^2+c^2-R^2)=0։ \qquad (2')$$

Այս հավասարումն ունի երկրորդ չափման և առաջին չափման անդամներ և ազատ անդամ (զրո չափման անդամ) x-ի, y-ի և z-ի նկատմամբ։ Այդպիսի հավասարումն անվանում են երկրորդ աստիճանի հավասարում։ Ուրեմն, սֆերային համապատասխանում է երկրորդ աստիճանի հավասարում ընթացիկ կոորդինատների նկատմամբ։ Սակայն, ակներևաբար, երկրորդ աստիճանի ոչ ամեն մի հավասարում սֆերա կորոշի։ Իսկապես, (2′) հավասարումից տեսնում ենք, որ սֆերայի հավասարման մեջ կոորդինատների քառակուսիների գործակիցները միմյանց հավասար են, իսկ կոորդինատների արտադրյալներ ունեցող անդամները (xy, yz, zx) բացակայում են։ Հակադարձաբար, եթե տեղի ունեն այդ երկու պայմանները, այն է՝ 1) x^2-ու, y^2-ու և z^2-ու գործակիցները հավասար են, 2) բացակայում են xy, yz և zx անդամները, ապա տվյալ հավասարումը որոշում է մի սֆերա, քանի որ նա կբերվի (2′) տեսքին՝ քառակուսի անդամների գործակցի վրա բաժանելով[1]։

Այսպիսով, տրված երկրորդ աստիճանի հավասարման տեսքով մենք կարող ենք որոշել՝ նա սֆերա՞ է որոշում, թե ոչ։ Օրինակի համար՝

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-4=0$$

հավասարումը սֆերա է որոշում, քանի որ նրա մեջ կոորդինատների քառակուսիների գործակիցները հավասար են և կոորդինատների արտադրյալներ պարունակող անդամներ չկան։ Եթե ցանկանում ենք իմանալ սֆերայի չափը և նրա դիրքը տվյալ կոորդինատային սիստեմի նկատմամբ, մենք պետք է որոշենք նրա շառավիղն ու կենտրոնի կոորդինատները։ Այդ նպատակով, մենք տրված հավասարումը կբերենք (2) տեսքին։ Այդպիսի ձևափոխությունը ոչ այլ ինչ է, եթե ոչ (2′) հավասարման ներկայացնելը (2) տեսքով։ Տվյալ հավասարման մեջ վերցնենք x պարու-

[1] Մասնավոր դեպքում նման հավասարումը կարող է որոշել զրո շառավիղ ունեցող սֆերա (այսինքն՝ կետ) կամ կետերի կեղծ տեղ։

նակող անդամները, այն է՝ x^2-2x, և այդ երկանդամը լրացնենք մինչև $(x-1)$ տարբերության լրիվ քառակուսին։ Կստանանք՝

$$x^2-2x=(x-1)^2-1։$$

Նույն կերպ վարվելով y և z պարունակող անդամների հետ, կըստանանք

$$y^2-4y=(y-2)^2-4, \quad z^2=(z-0)^2։$$

Այս բոլորից հետո տված հավասարումը կգրվի այսպես՝

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-0)^2=9։$$

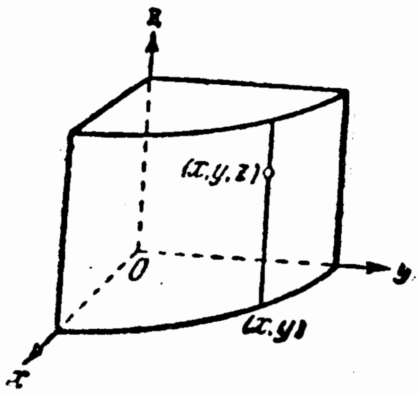
Այս հավասարումը բաղդատելով (2)-ի հետ, տեսնում ենք, որ՝

$$a=1, \quad b=2, \quad c=0, \quad R=3։$$

§ 5. **Գլանային մակերևույթներ։** Ենթադրենք, որ տված հավասարումը z չի պարունակում՝

$$F(x, y)=0։$$

xOy կոորդինատային հարթության վրա այս հավասարումը որոշում է մի L գիծ՝ այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց x և y կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը։ Այդ հավասարմանը բավարարում են նաև տարածության այն բոլոր կետերի կոորդինատները, որոնց առաջին երկու կոորդինատները համընկնում են L գծի որևէ կետի կոորդինատների հետ, այսինքն՝ տարածության այն կետերի կոորդինատները, որոնց պրոյեկցիաները xOy հարթության վրա L գծի կետերն են։ Այդպիսի կետերի համախումբը մի մակերևույթ է, որը գծվում է Oz առանցքին զուգահեռ և L գծի հետ հատվող ուղիղով (գծ. 109)։ Ընդհանրապես, այն մակերևույթը, որն առաջանում է տված մի որոշ ուղիղին զուգահեռ և տված L գիծը հատող ուղիղներով, կոչվում է գլանային մակերևույթ։ L գիծը կոչվում է նրա ուղղորդ գիծ, իսկ գլանային մակերևույթը առաջացնող ուղիղները՝ ծնիչներ։ Այսպես, ուրեմն, $F(x, y)=0$ հավասարումը որոշում է մի գլանային մակերևույթ, որի ծնիչները զուգահեռ են Oz առանցքին։



Գծ. 109

Համապատասխանաբար, յուրաքանչյուր գլանային մակերևույթ, որի ծնիչները զուգահեռ են Oz առանցքին, կարող է ներկայացվել $F(x, y)=0$ տեսք ունեցող հավասարումով։ Իրոք, այդ դեպքում L ուղղորդ գիծը կարելի է վերցնել xOy կոորդինատային հարթությունում և հենց այդ գծի հավասարումը, դիտարկված տարածության մեջ, կորոշի տված գլանային մակերևույթը։

Ճիշտ այդպես էլ, եթե հավասարումը x (կամ y) փոփոխականը չի պարունակում, ապա նա որոշում է այնպիսի գլանային մակերևույթ, որի ծնիչները զուգահեռ են Ox (կամ Oy) առանցքին։

Օ ր ի ն ա կ 1.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4}$$

հավասարումը որոշում է մի գլանային մակերևույթ, որի ուղղորդ գիծն էլիպս է xOy հարթությունում, իսկ ծնիչները զուգահեռ են Oz առանցքին։ Այդ մակերևույթը կոչվում է էլիպսական գլան։

Օ ր ի ն ա կ 2.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{5}$$

հավասարումը որոշում է մի գլանային մակերևույթ, որի ուղղորդ գիծը հիպերբոլ է xOy հարթությունում, իսկ ծնիչները զուգահեռ են Oz առանցքին։ Այդ մակերևույթը կոչվում է հիպերբոլական գլան։

Օ ր ի ն ա կ 3.

$$y^2=2px \tag{6}$$

հավասարումը որոշում է մի գլանային մակերևույթ, որի ուղղորդ գիծը պարաբոլ է xOy հարթությունում, իսկ ծնիչները զուգահեռ են Oz առանցքին։ Այդ մակերևույթը կոչվում է պարաբոլական գլան։

§ **6. Տարածության մեջ գտնվող գծի հավասարումները։** Տարածության մեջ ամեն մի գիծ կարելի է դիտարկել որպես երկու մակերևույթների հատման արդյունք։ Դիցուք

$$f(x, y, z)=0 \text{ և } f_1(x, y, z)=0 \tag{7}$$

այն մակերևույթների հավասարումներն են, որոնց հատումը տալիս է L գիծը։ Քանի որ L գծի ցանկացած կետը գտնվում է միաժամանակ երկու մակերևույթների վրա էլ, ապա նրա կոորդինատները պետք է բավարարեն (7) երկու հավասարումներին էլ։ Ուրեմն, գիծը տարածության մեջ դիտարկվում է որպես այնպիսի կետերի երկրաչափական տեղ, որոնց կոորդինատները բավարարում են երկու հավասարումների (7) սիստեմին։ Հակադարձաբար, երկու հավասարումների (7) սիստեմը տարածության մեջ գիծը որոշում է որպես այնպիսի կետերի երկրաչափական տեղ, որոնց կոորդինատները բավարարում են հավասարումների այդ սիստեմին։ (7) հավասարումներն անվանում են տարածության մեջ L գծի հավասարումներ:

Ակներևաբար, կարելի է տարբեր կերպ ընտրել այն մակերևույթները, որոնց հատումը տալիս է L գիծը. այս հանգամանքը համապատասխանում է այն փաստին, որ (7) սիստեմի փոխարեն կարելի է վերցնել որևէ այլ՝ նրան համարժեք սիստեմ։ Այսպես, օրինակ, Oz առանցքի հավասարումներ կլինեն՝

$$x=0 \text{ և } y=0։$$

Սակայն՝

$$x+y=0 \text{ և } x-y=0$$

հավասարումները նույնպես որոշում են Oz առանցքը։

Տանենք տված L գծով անցնող երկու գլանային մակերևույթներ, որոնց ծնիչները զուգահեռ են Oy և Oz առանցքներին։ Այդ գլանային մակերևույթների հավասարումները կունենան հետևյալ տեսքը (§ 5)՝

$$F(x, z)=0, \ F_1(x, y)=0։ \qquad (8)$$

Քանի որ L գիծը կարելի է դիտարկել որպես այդ գլանային մակերևույթների հատում, ուստի հավասարումների (8) սիստեմը որոշում է հենց L գիծը։ (8) հավասարումներից յուրաքանչյուրը, դիտարկվելով համապատասխան կոորդինատային հարթությունում, ներկայացնում է, հետևաբար, տրված L գծի պրոյեկցիան xOz և xOy հարթությունների վրա։ Անալիտիկորեն (8) հավասարումները կարելի է ստանալ (7) հավասարումներից, համապատասխանորեն y և z փոփոխականներն արտաքսելու միջոցով։

Օ ր ի ն ա կ։ Գրել այն շրջանագծի հավասարումները, որն ստացվում է $x^2+y^2+z^2=1$ սֆերան $z=\frac{1}{2}$ հարթությամբ հատելով։

Շրջանագծի որոնելի հավասարումները կլինեն՝

$$x^2+y^2+z^2=1 \text{ և } z=\frac{1}{2},$$

կամ՝

$$x^2+y^2=\frac{3}{4} \text{ և } z=\frac{1}{2}\text{։}$$

Վերջին սիստեմի միայն առաջին հավասարումը xOy *կոորդինատային հարթության վրա ներկայացնում է շրջանագիծ, որը հանդիսանում է որոնելի շրջանագծի պրոյեկցիան այդ հարթության վրա։ Այդ պրոյեկցիան իր չափսերով համընկնում է որոնելի շրջանագծի հետ, որովհետև այս վերջինս գտնվում է պրոյեկցիաների հարթությանը զուգահեռ հարթությունում։*

§ 7. Երեք մակերևույթների հատումը։ *Եթե*

$$F(x, y, z)=0,$$

$$F_1(x, y, z)=0,$$

$$F_2(x, y, z)=0$$

երեք հավասարումներով որոշվող երեք մակերևույթներն ունեն ընդհանուր կետ, ապա այդ կետի կոորդինատները բավարարում են երեք հավասարումներից յուրաքանչյուրին։

Ակներևորեն, իրավացի է նաև հակադարձ առաջադրությունը՝ եթե որևէ կետի կոորդինատները բավարարում են այդ երեք հավասարումներին, ապա այդ կետը պատկանում է բոլոր երեք մակերևույթներին։ Այդ պատճառով էլ, եթե ցանկանում ենք գտնել երեք մակերևույթների հատման կետերը, պետք է նրանց հավասարումները համատեղ լուծել։ Այդ երեք հավասարումների սիստեմի յուրաքանչյուր իրական լուծումը կտա մակերևույթների հատման մի կետ։

Իսկ եթե հավասարումների սիստեմն անհամատեղ սիստեմ է կամ նրա բոլոր լուծումները կեղծ են, ապա բոլոր երեք մակերևույթների համար ընդհանուր կետեր չկան։

Վարժություններ

1. *Կազմել 4 միավոր շառավիղ և (—1, 2, 3) կետը կենտրոն ունեցող սֆերայի հավասարումը։*

2. *Գտնել հետևյալ սֆերայի կենտրոնն ու շառավիղը.*

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-7=0\text{։}$$

3. *Գտնել* $x^2+y^2+z^2-2x=0$ *սֆերայի կենտրոնն ու շառավիղը։*

4. *Գտնել* $2x^2+2y^2+2z^2-5y-8=0$ *սֆերայի կենտրոնն ու շառավիղը։*

5. *Կազմել այն սֆերայի հավասարումը, որն ունի (1, 3, —2) կենտրոնը և անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով։*

6. *Կազմել այն սֆերայի հավասարումը, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և (2, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, —1) կետերով։*

7. Կազմել

$$x^2+y^2-z=0, \quad z=x-1$$

գծի պրոյեկցիայի հավասարումն xOy հարթության վրա։

8. Ինչպիսի՞ գիծ է որոշում հավասարումների հետևյալ սիստեմը՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \; z=c։$$

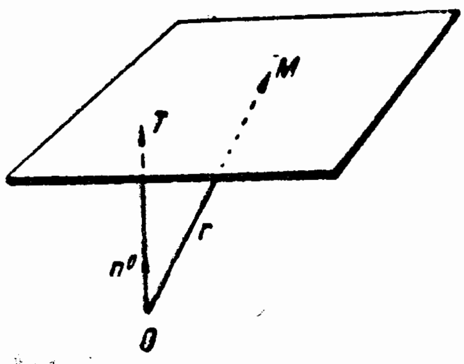
9. Ինչպիսի՞ մակերևույթ է որոշում հետևյալ հավասարումը՝

$$x^2+y^2-2x=0։$$

ԳԼՈՒԽ IV

ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆ

§ 1. Հարթության նորմալ հավասարումը: *Տարածության մեջ հարթության դիրքը լրիվ կորոշվի, եթե տրված լինեն նրա* p *հեռավորությունն* O *սկզբնակետից, այսինքն՝* O *կետից հարթության վրա իջեցրած* OT *ուղղահայացի* p *երկարությունը, և* $\boldsymbol{n}^{\circ}$ *միավոր վեկտորը, որն ուղղահայաց է հարթությանը և ուղղված է* O *սկզբնակետից դեպի հարթությունը (գծ. 110)։*



Գծ. 110.

Երբ M *կետը հարթության վրա շարժվում է, նրա* $\boldsymbol{r}$ *շառավիղ-վեկտորն այնպես է փոփոխվում, որ միշտ կապված է մնում մի որոշ պայմանով։ Տեսնենք, թե ո՞րն է այդ պայմանը։ Ակներևաբար, տված հարթության վրա գտնվող ամեն մի* M$(\boldsymbol{r})$ *կետի համար ունենք՝*

$$\text{պր}_{\mathrm{n}^{\circ}}\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\mathrm{OT}=\mathrm{p}\text{։} \qquad (1)$$

Այս պայմանը տեղի ունի միայն տված հարթության կետերի համար. այն խախտվում է, երբ M *կետը գտնվում է հարթությունից դուրս։ Այսպիսով, (1) հավասարությունն արտահայտում է մի հատկություն, որն ընդհանուր է տված հարթության բոլոր կետերի և միայն ա՛յդ կետերի համար։* II *գլխի* § *7-ի համաձայն, ունենք՝*

$$\text{պր}_{\mathrm{n}^{\circ}}\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}^{\circ},$$

և նշանակում է, (1) հավասարումը կարելի է գրել այսպիսի տեսքով՝

$$rn^{\circ}-p=0։ \qquad (1')$$

Այս հավասարումն արտահայտում է այն պայմանը, որի դեպքում M(*r*) կետը գտնվում է տված հարթության վրա, և կոչվում է այդ հարթության նորմալ հավասարում։ Հարթության կամայական M կետի *r* շառավիղ-վեկտորը կոչվում է ընթացիկ շառավիղ-վեկտոր:

Հարթության (1′) հավասարումը գրված է վեկտորական տեսքով։ Կոորդինատներին անցնելու համար կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք վեկտորների O սկզբնակետում և նկատենք, որ որպես n° միավոր վեկտորի պրոյեկցիաներ Ox, Oy, Oz առանցքների վրա ծառայում են առանցքների հետ այդ վեկտորի կազմած α, β, γ անկյունների կոսինուսները, իսկ որպես M կետի *r* շառավիղ-վեկտորի պրոյեկցիաներ՝ M կետի x, y, z կոորդինատները, այսինքն՝ ունենք՝

$$n^{\circ}\,\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\} \text{ և } r\,\{x,\ y,\ z\}։$$

(1′) հավասարումը կոորդինատների միջոցով կգրվի այսպես՝

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0։ \qquad (2)$$

Հարթության (1′) վեկտորական հավասարումը (2) կոորդինատային հավասարման բերելիս մենք օգտվեցինք II գլխի § 9-ի (15) բանաձևից, որը վեկտորների սկալյար արտադրյալն արտահայտում է նրանց պրոյեկցիաների միջոցով։ (2) հավասարումն արտահայտում է այն պայմանը, որի դեպքում M(x, y, z) կետը գտնվում է տվյալ հարթության վրա, և կոչվում է այդ հարթության նորմալ հավասարում կոորդինատային տեսքով: Ստացված (2) հավասարումը՝ առաջին աստիճանի է x-ի, y-ի, z-ի նկատմամբ։ Այս նշանակում է, որ ամեն մի հարթություն կարող է ներկայացվել առաջին աստիճանի հավասարումով ընթացիկ կոորդինատների նկատմամբ:

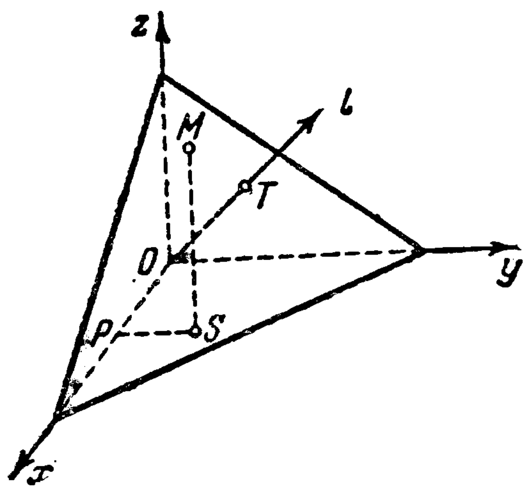
Նկատենք, որ մեր արտածած (1′) և (2) հավասարումներն ուժի մեջ են մնում նաև այն դեպքում, երբ p=0, այսինքն՝ երբ տրված հարթությունն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով։ Այդ դեպքում որպես n° կարելի է ընդունել տված հարթությանն ուղղահայաց և հակադիր ուղղություններ ունեցող երկու միավոր վեկտորներից ցանկացածը։

Դիտողություն։ Հարթության (2) նորմալ հավասարումը կարելի է արտածել, չօգտվելով վեկտորական մեթոդից (գծ. 111)։

Վերցնենք մի կամայական հարթություն և սկզբնակետից տանենք այդ հարթության ուղղահայաց l ուղիղը։ Այդ ուղիղի վրա դրական ուղղությունն ընտրենք կոորդինատների սկզբնակետից դեպի տված հարթությունը (եթե հարթությունն անցնի սկզբնակետով, ապա l ուղիղի վրա դրական ուղղությունը կարելի է կամայապես ընտրել)։

Տարածության մեջ այդ հարթության դիրքը լիովին որոշվում է կոորդինատների սկզբնակետից նրա ունեցած p հեռավորությամբ (այսինքն՝ l առանցքի այն OT հատվածի երկարությամբ, որը գտնվում է կոորդինատների O սկզբնակետի և հարթության հետ l-ի հատման T կետի միջև) և կոորդինատային առանցքների հետ l առանցքի կազմած α, β, γ անկյուններով։ Երբ $M(x, y, z)$ կետը շարժվում է հարթության վրա, նրա x, y, z կոորդինատները փոփոխվում են այնպես, որ միշտ մի որոշ պայմանով կապված են մնում միմյանց հետ։ Տեսնենք, թե ո՞րն է այդ պայմանը։

Գծ. 111-ում կառուցենք հարթության M կամայական կետի $\overline{OPSM}$ կոորդինատային բեկյալը։ Վերցնենք այդ բեկյալի պրոյեկցիան l առանցքի վրա։ Հիշելով, որ բեկյալի պրոյեկցիան հավասար է նրա փակող կողմի պրոյեկցիային (գլ. I, § 3), կունենանք՝



Գծ. 111

$$\text{պր}\,\overline{OPSM} = \text{պր}\,\overline{OM} = p. \qquad (3)$$

Մյուս կողմից, հայտնի է, որ բեկյալի պրոյեկցիան հավասար է նրա օղակների պրոյեկցիաների գումարին (գլ. I, § 3), հետևաբար, (3) հավասարությունը կարելի է այսպես գրել՝

$$\text{պր}\,\overline{OP} + \text{պր}\,\overline{PS} + \text{պր}\,\overline{SM} = p. \qquad (4)$$

Քանի որ հատվածի պրոյեկցիան հավասար է այդ հատվածի մեծությանը, բազմապատկած պրոյեկցիայի առանցքով և այն առանցքով կազմված անկյան կոսինուսով, որի վրա գտնվում է հատվածը (գլ. I, § 3), ուստի՝

$$\text{պր}\,\overline{OP} = x\cos\alpha, \quad \text{պր}\,\overline{PS} = y\cos\beta, \quad \text{պր}\,\overline{SM} = z\cos\gamma.$$

Այս արժեքները տեղադրելով (4)-ում, կստանանք՝

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p,$$

կամ՝

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Ինչպես արդեն ասել ենք, (2) հավասարումն արտահայտում է այն պայմանը, որի դեպքում $M(x, y, z)$ կետը գտնվում է տված հարթության վրա և կոչվում է այդ հարթության նորմալ հավասարում։ Ստացված (2) հավասարումն առաջին աստիճանի է x-ի, y-ի, z-ի նկատմամբ, ուրեմն՝ յուրաքանչյուր հարթություն կարող է ներկայացվել ընթացիկ կոորդինատների նկատմամբ առաջին աստիճանի հավասարումով։

§ 2. **Երեք փոփոխականների միջև առաջին աստիճանի հավասարման երկրաչափական իմաստը: Առաջին աստիճանի ընդհանուր հավասարման բերումը նորմալ տեսքի:** *Նախորդ պարագրաֆում ապացուցվեց, որ յուրաքանչյուր հարթություն կարելի է ներկայացնել առաջին աստիճանի հավասարումով: Այժմ ապացուցենք դրա հակադարձ թեորեման՝* յուրաքանչյուր առաջին աստիճանի հավասարում երեք փոփոխականների միջև որոշում է մի հարթություն:

Վերցնենք մի առաջին աստիճանի հավասարում ընդհանուր տեսքով՝

$$Ax+By+Cz+D=0: \tag{5}$$

A, B, C *գործակիցները դիտարկենք որպես մի* $\boldsymbol{n}$ *հաստատուն վեկտորի պրոյեկցիաներ* Ox, Oy, Oz *առանցքների վրա, իսկ* x, y, z *փոփոխական կոորդինատները՝ որպես* M *կետի* $\boldsymbol{r}$ *շառավիղ-վեկտորի պրոյեկցիաներ նույն առանցքների վրա: Այդ դեպքում (5) հավասարումը կարելի է վեկտորական տեսքով գրել այսպես (գլ.* II, § *9)՝*

$$\boldsymbol{rn}+D=0: \tag{5'}$$

Ցույց տանք, որ այս հավասարումը կարելի է բերել (1′) նորմալ հավասարման տեսքին:

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

1) Դիցուք $D<0$:

(5′) հավասարումը բաժանենք $\boldsymbol{n}$ *վեկտորի* n *մոդուլի վրա, կըստանանք՝*

$$\boldsymbol{rn}^{\circ}+\frac{D}{n}=0,$$

քանի որ $\frac{\boldsymbol{n}}{n}=\boldsymbol{n}^{\circ}$: $\frac{D}{n}$ *բացասական թիվը նշանակելով*—p, *որտեղ* p-*ն դրական է, կունենանք*

$$\boldsymbol{rn}^{\circ}-p=0$$

նորմալ հավասարում:

2) Եթե $D>0$, *ապա, (5′) հավասարումը բաժանելով* $(-n)$-*ի վրա, կստանանք՝*

$$\boldsymbol{r}(-\boldsymbol{n}^{\circ})-\frac{D}{n}=0:$$

$\frac{D}{n}$ դրական թիվը նշանակելով p, դարձյալ կստանանք նորմալ հավասարում։

3) Եթե $D=0$, ապա (5′) հավասարումը կարելի է բաժանել ինչպես n-ի, այնպես էլ (—n)-ի վրա։ Առաջին դեպքում կստանանք $\mathbf{r}\mathbf{n}^{\circ}=0$, իսկ երկրորդ դեպքում՝ $\mathbf{r}(-\mathbf{n}^{\circ})=0$։ Դրանցից յուրաքանչյուրն (1′) տեսքի նորմալ հավասարում է։

Այսպիսով, (5′) հավասարումը միշտ կարելի է բերել (1′) նորմալ հավասարման տեսքին։ Բայց նորմալ հավասարումը հարթություն է որոշում։ Հետևաբար, նաև (5′) հավասարումը, ինչպես և սկզբնական (5) հավասարումը, նույնպես հարթություն է որոշում։ Այսպիսով, թեորեման ապացուցվեց։ (5) հավասարումը կոչվում է հարթության ընդհանուր հավասարում։

Պայմանավորվենք զրոյից տարբեր ամեն մի վեկտոր, որն ուղղահայաց է տվյալ հարթությանը, անվանել այդ հարթության նորմալ վեկտոր։ Այդ դեպքում $\mathbf{n}\{A, B, C\}$ վեկտորը կլինի (5) հարթության նորմալ վեկտորներից մեկը։ Այդպիսով, (5) հավասարման մեջ ընթացիկ կոորդինատների A, B, C գործակիցները պարզ երկրաչափական իմաստ ունեն. նրանք՝ հարթության նորմալ վեկտորներից մեկի պրոյեկցիաներն են կոորդինատային առանցքների վրա։ Հավասարման D ազատ անդամը անմիջական երկրաչափական իմաստ չունի, բայց նրա բացարձակ մեծությունը, բաժանված $\mathbf{n}$ նորմալ վեկտորի n երկարության վրա, հավասար է հարթության հեռավորությանը կոորդինատների սկզբնակետից։

Հեշտ է տեսնել, որ հարթության (2) նորմալ հավասարումը կոորդինատային տեսքով՝ (5) ընդհանուր հավասարման մասնավոր դեպքն է։ Այդ այն դեպքն է, երբ որպես հարթության նորմալ վեկտոր ընտրված է սկզբնակետից ելնող և հարթությանն ուղղահայաց միավոր վեկտորը։

Շարադրվածից հետևում է (5) կամ (5′) հավասարումը (2) կամ (1′) նորմալ տեսքի բերելու հետևյալ եղանակը.

Հարթության ընդհանուր հավասարումը նորմալ տեսքի բերելու համար այն պետք է բաժանել $\mathbf{n}\{A, B, C\}$ վեկտորի երկարության վրա, վերջինս վերցնելով + կամ — նշանով, նայած թե D ազատ անդամը բացասակա՞ն է, թե դրական։ Այլ խոսքով, (5) առաջին աստիճանի ընդհանուր հավասարումը նորմալ տեսքի բերելու համար պետք է այն բազմապատկել

$$M=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{6}$$

բազմապատկիչով, արմատի նշանը վերցնելով (5) հավասարման D ազատ անդամի նշանի հակառակը (D=0 դեպքում M-ի *նշանը կարելի է կամայապես ընտրել)։ Այդ* M *բազմապատկիչը կոչվում է* նորմավորող բազմապատկիչ։

(5) հավասարումը M-*ով բազմապատկելուց հետո ընդունում է*

$$MAx+MBy+MCz+MD=0$$

տեսքը և պետք է համընկնի (2) նորմալ հավասարման հետ։ Հետևաբար, պետք է լինեն՝

$$MA=\cos\alpha, \quad MB=\cos\beta, \quad MC=\cos\gamma, \quad MD=-p \tag{7}$$

Այս հավասարությունների մեջ տեղադրելով M-*ի համար (6) բանաձևով գտած արժեքը,* $\cos\alpha$-*ի,* $\cos\beta$-*ի,* $\cos\gamma$-*ի և* p-*ի համար կստանանք հետևյալ բանաձևերը՝*

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, & \cos\beta &= \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, & p &= \frac{D}{\mp\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Այս բանաձևերում արմատների առջև պետք է վերցնել վերին նշանները, եթե $D<0$ $(M>0)$, *և՝ ստորին նշանները, եթե* $D>0$։

Դիտողություն։ Առաջին աստիճանի հավասարման երկրաչափական իմաստի պարզումը, ինչպես և ընդհանուր հավասարումը նորմալ տեսքի բերելու կանոնը կարելի է ստանալ չդիմելով վեկտորական մեթոդին, ելնելով ընդհանուր տեսքով տրված (5) առաջին աստիճանի հավասարումից, հարց տանք մեզ՝ ո՞րն է տարածության այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց x, y, z *կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը։ Ցույց տանք, որ այդպիսի կետերի երկրաչափական տեղը հարթություն է։ Այդ նպատակով՝ մեր հավասարումը բազմապատկենք* M *հաստատուն բազմապատկիչով և այդ բազմապատկիչն ընտրենք այնպես, որպեսզի ստացվի նորմալ հավասարում, այսինքն՝ (2) տեսքի հավասարում։ (5) հավասարումը կգրվի այսպես՝*

$$MAx+MBy+MCz+MD=0 \tag{9}$$

Որպեսզի այս հավասարումն ունենա (2) հավասարման տեսքը, պետք է ընդունել՝

$$MA=\cos\alpha, \quad MB=\cos\beta, \quad MC=\cos\gamma, \quad MD=-p \tag{10}$$

Այս հավասարություններից հեշտությամբ կգտնենք M, α, β, γ *և* p *անհայտները՝ արտահայտված* A, B, C, D *հայտնի գործակիցների միջոցով, եթե օգտվենք հետևյալ օժանդակ հավասարությունից (2-րդ մաս, գլ.* I, § 4*)՝*

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1։ \tag{11}$$

Իսկապես, (10) հավասարություններից առաջին երեքը քառակուսի բարձրացնելով և գումարելով, կունենանք՝

$$M^2A^2+M^2B^2+M^2C^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

կամ՝

$$M^2(A^2+B^2+C^2)=1,$$

որտեղից՝

$$M=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}։ \tag{6}$$

Այս բանաձևում արմատի առջև պետք է վերցնել հավասարման ազատ անդամի նշանի հակառակ նշանը, ինչպես այդ երևում է (10)-ի վերջին հավասարությունից։ M*-ի համար գտած արժեքը տեղադրելով (10) հավասարությունների մեջ,* $\cos\alpha$*-ի,* $\cos\beta$*-ի,* $\cos\gamma$*-ի և* p*-ի համար կստանանք (8) բանաձևը։*

Այսպես, ուրեմն (5) հավասարումը նորմալ տեսքի է բերվում, բազմապատկելով այն (6) բանաձևով որոշվող M *բազմապատկիչով։ Այդ* M *բազմապատկիչը կոչվում է* **նորմավորող բազմապատկիչ**։ *Քանի որ նորմալ հավասարումը, ինչպես նախորդ պարագրաֆում տեսանք, հարթություն է որոշում, ապա այստեղից հետևում է, որ (5)* **ընդհանուր հավասարումը նույնպես հարթություն է որոշում։** *Այսպիսով,* **ամեն մի առաջին աստիճանի հավասարում x-ի, y-ի, z-ի միջև որոշում է մի հարթություն՝** *որպես այնպիսի կետերի երկրաչափական տեղ, որոնց կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը։*

Դիտողություն 2. Եթե երկու հավասարումներ որոշում են միևնույն հարթությունը, ապա նրանց համապատասխան գործակիցները համեմատական են։ Իսկապես, նորմալ տեսքի բերելով, այդ երկու հավասարումներն էլ կդառնան միևնույն նորմալ հավասարումը։ Նրանցից յուրաքանչյուրի գործակիցները համեմատական են այդ նորմալ հավասարման համապատասխան գործակիցներին, հետևաբար, միմյանց ևս համեմատական են։

Օրինակ։ Հարթության $x-2y+2z-3=0$ *հավասարումը բերել նորմալ տեսքի։*

Նորմավորող բազմապատկիչը կլինի՝

$$M=\frac{1}{+\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{1}{3}։$$

Տված հավասարումը բազմապատկելով M*-ի այդ արժեքով, կստանանք՝*

$$\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-1=0։$$

Հետևաբար, տվյալ հարթության համար ունենք՝

$$\cos\alpha=\frac{1}{3},\quad \cos\beta=-\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=\frac{2}{3},\quad p=1։$$

§ 3. Հարթության ընդհանուր հավասարման հետազոտումը։ *Տեսնենք, թե*

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{12}$$

հավասարումով որոշվող հարթությունը ինչպիսի՞ մասնավոր դիրք կունենա կոորդինատային առանցքների նկատմամբ, եթե այդ հավասարման որոշ գործակիցներ զրո դառնան։

Եթե $D=0$, *ապա (12) հավասարմանը կբավարարեն* $x=y=z=0$ *արժեքները, այսինքն՝ սկզբնակետի կոորդինատները. ուրեմն՝ հարթությունը կանցնի կոորդինատների սկզբնակետով։*

Եթե $C=0$, *ապա (12) հավասարումը կդառնա՝*

$$Ax+By+D=0։ \tag{12}$$

Այս հավասարումը դիտարկելով xOy *հարթության մեջ, կունենանք ուղիղ գիծ։ Իսկ եթե նույն հավասարումը դիտարկենք տարածության մեջ, մենք կունենանք այնպիսի կետերի երկրաչափական տեղ, որոնք* xOy *հարթության վրա պրոյեկտվում են այդ ուղղի կետերում։ Ուրեմն, (12′) հավասարումը որոշում է մի հարթություն, որը զուգահեռ է* Oz *առանցքին*[1]*։*

Համանման ձևով կարելի է ցույց տալ, որ $B=0$ *դեպքում*

$$Ax+Cz+D=0$$

հավասարումով որոշվում է մի հարթություն, որը զուգահեռ է Oy *առանցքին, իսկ* $A=0$ *դեպքում*

$$By+Cz+D=0$$

հավասարումով՝ մի հարթություն, որը զուգահեռ է Oz *առանցքին։ Ընդհանրապես,* եթե հարթության հավասարման մեջ բացակայում է z, y կամ x կոորդինատը, այդ նշանակում է տվյալ հարթությունը զուգահեռ է, համապատասխանորեն, Oz, Oy կամ Ox առանցքին։

Այժմ ընդունենք, որ հավասարման երկու գործակիցներն են զրոյի հավասար, օրինակի համար՝

---

[1] *Նույն եզրակացությանը կհանգեինք, եթե հիշեինք, որ* A, B, C *գործակիցները տրված հարթությանը նորմալ վեկտորի պրոյեկցիաներն են։ Եթե* $C=0$, *ապա այդ վեկտորը* Oz *առանցքին ուղղահայաց է, որ նշանակում է, թե հարթությունն ինքը զուգահեռ է* Oz *առանցքին։*

$$D=C=0.$$

Այդ դեպքում

$$Ax+By=0$$

հավասարումը որոշում է, նախորդի համաձայն, մի հարթություն, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և զուգահեռ է Oz առանցքին, այսինքն՝ դա մի հարթություն է, որն անցնում է Oz առանցքով։ Համանման ձևով

$$Ax+Cz=0$$

հավասարումը որոշում է մի հարթություն, որն անցնում է Oy առանցքով, իսկ

$$By+Cz=0$$

հավասարումը՝ մի հարթություն, որն անցնում է Ox առանցքով։

Եթե զրոյի հավասար են ընթացիկ կոորդինատների մոտ գրված երկու գործակիցներ, օրինակ՝

$$A=B=0,$$

ապա այդ դեպքում

$$Cz+D=0$$

հավասարումը որոշում է մի հարթություն, որը զուգահեռ է և՛ Ox առանցքին, և՛ Oy առանցքին, այսինքն՝ զուգահեռ է xOy հարթությանը։ Նման ձևով

$$By+D=0 \text{ և } Ax+D=0$$

հավասարումները որոշում են, համապատասխանորեն, xOz և yOz հարթություններին զուգահեռ հարթություններ։

Եթե, վերջապես, հավասարման երեք գործակիցները հավասար են զրոյի, օրինակ՝

$$B=C=D=0,$$

ապա այդ դեպքում

$$Ax=0, \text{ կամ՝ } x=0$$

հավասարումը որոշում է yOz կոորդինատային հարթությունը։

Նման ձևով $By=0$ *և* $Cz=0$, *կամ՝* $y=0$ *և* $z=0$ *հավասարումները որոշում են, համապատասխանաբար,* xOz *և* xOy *կոորդինատային հարթությունները:*

§ 4. Հարթության հավասարումը հատվածներով: *Դիտարկենք մի հարթություն, որը հատում է բոլոր երեք կոորդինատային առանցքները և սկզբնակետով չի անցնում: Այդպիսի հարթության հավասարումը կարելի է գրել*

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{13}$$

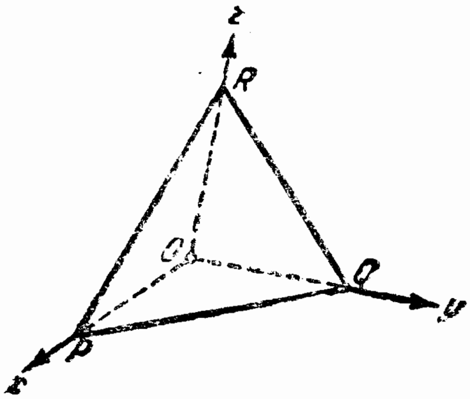
տեսքով, որտեղ A, B, C, D *գործակիցներից ոչ մեկը զրո չէ: Կոորդինատային առանցքներից այդ հարթության կտրած հատվածների մեծությունները նշանակենք* a, b, c *(գծ. 112):*

Քանի որ $P(a, 0, 0)$, $Q(0, b, 0)$ *և* $R(0, 0, c)$ *կետերը գտնվում են տված հարթության վրա, ուստի այդ կետերի կոորդինատները պետք է բավարարեն նրա հավասարմանը, այսինքն՝*

$$Aa+D=0,\ Bb+D=0,\ Cc+D=0,$$

որտեղից կստանանք՝

$$A=-\frac{D}{a},\ B=-\frac{D}{b},\ C=-\frac{D}{c}: \tag{14}$$



Գծ. 112

A, B, C *գործակիցների այս արժեքները տեղադրելով հարթության (13) հավասարման մեջ, կստանանք՝*

$$-D\frac{x}{a}-D\frac{y}{b}-D\frac{z}{c}+D=0:$$

Կրճատելով D*-ի վրա, որը, մեր ենթադրության համաձայն, զրոյի հավասար չէ, կստանանք՝*

$$-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}+1=0,$$

կամ՝

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1: \tag{15}$$

Այս էլ հենց հարթության հավասարումն է (առանցքներից կըտրած) հատվածներով:

Օրինակ։ $3x-4y+z-5=0$ հարթության հավասարումը գրել առանցքներից կտրած հատվածներով։

Տված հավասարման մեջ դնելով $y=z=0$, կգտնենք a-ի արժեքը՝

$$3x-5=0,\ \text{որտեղից՝}\quad x=\frac{5}{3},\qquad \text{ուրեմն՝}\quad a=\frac{5}{3}\text{։}$$

Նման ձևով, ընդունելով $x=z=0$, կգտնենք b-ի արժեքը՝

$$-4y-5=0,\ \text{որտեղից՝}\ y=-\frac{5}{4},\ \text{ուրեմն՝}\ b=-\frac{5}{4}\text{։}$$

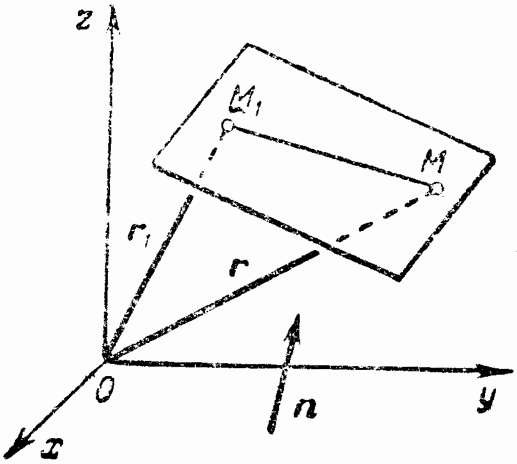
Վերջապես, ընդունելով $x=y=0$, կգտնենք c-ի արժեքը՝

$$z-5=0,\ \text{որտեղից}\ z=5,\ \text{ուրեմն՝}\ c=5\text{։}$$

Հետևաբար, հարթության հավասարումն առանցքներից կտրած հատվածներով կլինի՝

$$\frac{x}{\frac{5}{3}}+\frac{y}{-\frac{5}{4}}+\frac{z}{5}=1\text{[1]։}$$

§ 5. Տվյալ կետով անցնող հարթության հավասարում։ Դիցուք պահանջվում է գտնել M_1 կետով անցնող հարթության հավասարում, ընդ որում M_1 կետը տրված է $\mathbf{r}_1\{x_1, y_1, z_1\}$ շառավիղ-վեկտորի միջոցով։ Վերցնենք մի որևէ $\mathbf{n}\{A, B, C\}\neq 0$ վեկտոր և գտնենք M_1 կետով անցնող և այդ վեկտորին ուղղահայաց հարթության հավասարումը։ Այդ հարթությունը նշանակենք P (*գծ. 113*)։



Գծ. 113

Հարթության ցանկացած M կետի շառավիղ-վեկտորը նշանակենք $\mathbf{r}\{x, y, z\}$։

Այդ դեպքում $\overrightarrow{M_1M}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$ վեկտորը,

---

[1] Կարող ենք նաև այսպես վարվել. հավասարման ազատ անդամը տեղափոխենք աջ մասը և բաժանենք նրա վրա՝

$$3x-4y+z=5,\quad \frac{3x}{5}-\frac{4y}{5}+\frac{z}{5}=1,$$

որտեղից, համարիչներում թողնելով միայն x, y, z կոորդինատները, կստանանք՝

$$\frac{x}{\frac{5}{3}}+\frac{y}{-\frac{5}{4}}+\frac{z}{5}=1,$$

Այստեղից էլ հենց երևում է, որ $a=\frac{5}{3}$, $b=-\frac{5}{4}$, $z=5$։ *Ծանոթ. թարգմ.*։

գտնվելով P հարթության վրա, ուղղահայաց կլինի n վեկտորին, ուստի նրանց սկալյար արտադրյալը հավասար կլինի զրոյի՝

$$n(r-r_1)=0\text{։} \qquad (16)$$

Այս հավասարությունը՝ M կետի P հարթության վրա գտնվելու պայմանն է. նա ճիշտ է այդ հարթության բոլոր կետերի համար և խախտվում է, հենց որ M կետը P հարթությունից դուրս է ընկնում։

(16) հավասարումը P հարթության վեկտորական հավասարումն է։ Վեկտորների սկալյար արտադրյալը նրանց պրոյեկցիաների միջոցով արտահայտելով, նույն հարթության հավասարումը կստանանք կոորդինատային տեսքով՝

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0\text{։} \qquad (17)$$

Ինչպես արտածումից երևում է, n վեկտորը, հետևաբար, նաև նրա A, B, C պրոյեկցիաները, միանգամայն կամայական են (սակայն, անշուշտ, մենք բացառում ենք $A=B=C=0$ դեպքը, քանի որ $n\neq 0$)։

Փոփոխելով A-ի, B-ի, C-ի արժեքները, մենք կստանանք M_1 կետով անցնող տարբեր հարթություններ։ Այսպիսով, (17) հավասարումը A, B, C գործակիցների ցանկացած արժեքների դեպքում արտահայտում է M_1 կետով անցնող հարթություն։

Դիտողություն։ Տվյալ կետով անցնող հարթության հավասարումը կարելի է արտածել, չօգտվելով վեկտորական մեթոդից։ Դիցուք պետք է գտնել $M_1(x_1, y_1, z_1)$ կետով անցնող հարթության հավասարումը։ Որոնելի հավասարումը վերցնենք ընդհանուր տեսքով՝

$$Ax+By+Cz+D=0\text{։}$$

Քանի որ, ըստ պայմանի, որոնելի հարթությունն անցնում է $M_1(x_1, y_1, z_1)$ կետով, ուստի այդ կետի կոորդինատները պետք է բավարարեն հարթության հավասարմանը. այդ նշանակում է, որ պետք է տեղի ունենա հետևյալ պայմանը՝

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0\text{։}$$

Սկզբնական հավասարումից հանելով այս նույնությունը, կստանանք որոնելի հավասարումը՝

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0, \qquad (17)$$

որտեղ A, B, C գործակիցները կամայական են. դրանց արժեքները ցանկացած եղանակով փոփոխելով, կստանանք տարբեր հարթություններ: Բայց նրանք բոլորը կանցնեն $M_1(x_1\ y_1\ z_1)$ կետով, որի մեջ կարելի է համոզվել նաև անմիջականորեն, այդ կետի կոորդինատները տեղադրելով (17) հավասարման մեջ. նա նույնություն կդառնա՝ գործակիցների արժեքներից անկախ:

Այսպիսով, (17) հավասարումը A, B, C գործակիցների ցանկացած արժեքների դեպքում (բացի $A=B=C=0$ դեպքից) ներկայացնում է $M_1(x_1, y_1, z_1)$ կետով անցնող հարթություն:

Օ ր ի ն ա կ ։ Կազմել $M(1, 2, 3)$ կետով անցնող հարթության հավասարումը։

Որոնելի հավասարումը կլինի՝

$$A(x-1)+B(y-2)+C(z-3)=0։$$

§ 6. Տված երեք կետերով անցնող հարթության հավասարումը։ Դիցուք պետք է գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է մեկ ուղիղի վրա չդասավորված երեք տված կետերով։ Այդ կետերի շառավիղ-վեկտորները նշանակելով $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, իսկ ընթացիկ շառավիղ-վեկտորը՝ $\mathbf{r}$, որոնելի հավասարումը հեշտությամբ կստանանք վեկտորական տեսքով։ Իսկապես, $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ և $\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1$ վեկտորները կոմպլանար են, քանի որ բոլորը գտնվում են որոնելի հարթության մեջ։ Հետևաբար, այդ վեկտորների վեկտորա-սկալյար արտադրյալը պետք է հավասար լինի զրոյի՝

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)=0։ \tag{18}$$

Սա էլ հենց տված $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ երեք կետերով անցնող հարթության հավասարումն է վեկտորական տեսքով։

Կոորդինատային տեսքով հավասարումը ստանալու համար, ենթադրենք, թե վեկտորները տված են իրենց պրոյեկցիաներով՝ $\mathbf{r}\,\{x, y, z\}$, $\mathbf{r}_1\,\{x_1, y_1, z_1\}$, $\mathbf{r}_2\,\{x_2, y_2, z_2\}$, $\mathbf{r}_3\,\{x_3, y_3, z_3\}$։ Այս դեպքում (18) պայմանը պրոյեկցիաների միջոցով կգրվի այսպես (գլ. II, § 15)՝

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0։ \tag{18'}$$

Եթե տված երեք կետերը գտնվեին մեկ ուղիղի վրա, ապա $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ և $\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1$ վեկտորները կոլինյար կլինեն։ Այդ դեպքում

(18′) հավասարման ձախ մասում գրված դետերմինանտի վերջին երկու տողերի համապատասխան էլեմենտները համեմատական լինեն, որի շնորհիվ դետերմինանտը նույնաբար զրո կլիներ։ Հետևաբար, այդ դեպքում (18′) հավասարումը x-ի, y-ի, z-ի ցանկացած արժեքների համար նույնություն կդառնար։ Երկրաչափորեն այդ նշանակում է, որ տարածության ամեն մի կետով անցնում է այնպիսի հարթություն, որի վրա են գտնվում նաև տրված երեք կետերը։

Դիտողություն 1. Այս նույն խնդիրը կարելի է լուծել, չօգտըվելով վեկտորներից։

Տված երեք կետերի կոորդինատները նշանակելով (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), գրենք առաջին կետով անցնող որևէ մի հարթության հավասարում՝

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0։ \tag{17}$$

Որպեսզի ստանանք որոնելի հարթության հավասարումը, պետք է պահանջենք, որ (17) հավասարմանը բավարարեն մյուս երկու կետերի կոորդինատները, այսինքն՝

$$\left.\begin{aligned} A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)&=0,\\ A(x_3-x_1)+B(y_3-y_1)+C(z_3-z_1)&=0։\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Այս (19) հավասարումներից պետք է գտնել երկու գործակիցների հարաբերությունները երրորդ գործակցին (ասենք թե՝ $\frac{A}{C}$ և $\frac{B}{C}$ հարաբերությունները) և գտած արժեքները տեղադրել (17) հավասարման մեջ։

Օրինակ 1. Կազմել (1, 2, 3), (—1, 0, 0) և (3, 0, 1) կետերով անցնող հարթության հավասարումը։

Տված կետերից առաջինով անցնող ամեն մի հարթության հավասարում կլինի՝

$$A(x-1)+B(y-2)+C(z-3)=0։ \tag{17′}$$

Այս հարթության մյուս երկու կետերով անցնելու պայմանները կլինեն՝

$$2A+2B+3C=0 \text{ և } 2A-2B-2C=0, \tag{19′}$$

կամ՝

$$2\frac{A}{C}+2\frac{B}{C}+3=0 \text{ և } 2\frac{A}{C}-2\frac{B}{C}-2=0։$$

Այս երկու հավասարումները գումարելով, կստանանք՝

$$4\frac{A}{C}+1=0, \text{ որտեղից՝ } \frac{A}{C}=-\frac{1}{4}։$$

Տեղադրելով երկրորդ հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$\frac{B}{C}=-\frac{5}{4}.$$

Այսպիսով, կարելի է գրել՝

$$A:B:C=1:5:(-4).$$

(17′) հավասարման մեջ A-ի, B-ի, C-ի փոխարեն տեղադրելով համապատասխանաբար նրանց համեմատական 1, 5, —4 թվերը, կստանանք՝

$$(x-1)+5(y-2)-4(z-3)=0,$$

կամ՝

$$x+5y-4z+1=0.$$

Օրինակ 2. Կազմել (0, 0, 0), (1, 1, 1) և (2, 2, 2) կետերով անցնող հարթության հավասարումը։

(0, 0, 0) կետով անցնող ամեն մի հարթության հավասարում կգրվի այսպես՝

$$Ax+By+Cz=0.$$

Այս հարթության՝ (1, 1, 1) և (2, 2, 2) կետերով անցնելու պայմանները կլինեն՝

$$A+B+C=0 \text{ և } 2A+2B+2C=0.$$

Երկրորդ հավասարումը կրճատելով 2-ով, տեսնում ենք, որ $\frac{A}{C}$ և $\frac{B}{C}$ երկու անհայտ հարաբերությունները որոշելու համար ունենք ընդամենը մեկ հավասարում, այն է՝

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}+1=0.$$

Այստեղից ստանում ենք՝ $\frac{A}{C}=-\frac{B}{C}-1$։ Այժմ հարթության $\frac{A}{C}x+\frac{B}{C}y+$ $+z=0$ հավասարման մեջ $\frac{A}{C}$-ի փոխարեն դնելով նրա համար ստացած արտահայտությունը, կստանանք՝

$$\left(-\frac{B}{C}-1\right)x+\frac{B}{C}y+z=0,$$

կամ՝

$$(B+C)x-By-Cz=0.$$

Սա էլ հենց որոնելի հարթության հավասարումն է. այն կախված է B *և* C *կամայական մեծություններից (այն է՝* $\frac{B}{C}$ *հարաբերությունից)։ Այդ նշանակում է, որ անթիվ բազմությամբ հարթություններ կան, որոնք անցնում են տված երեք կետերով (տված երեք կետերը գտնվում են մեկ ուղիղի վրա)։*

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն 2։ Մեկ ուղիղի վրա չգտնվող երեք տված կետերով հարթություն անցկացնելու խնդիրն ընդհանուր տեսքով հեշտությամբ կլուծվի, եթե օգտվենք դետերմինանտներից։ Իսկապես, քանի որ (17) և (19) հավասարումներում A, B, C *գործակիցները չեն կարող միաժամանակ զրոյի հավասարվել, ուստի, այդ հավասարումները դիտարկելով որպես համասեռ սիստեմ՝* A, B, C *անհայտներով, կարող ենք գրել այդ սիստեմի համար զրոյից տարբեր լուծում գոյություն ունենալու անհրաժեշտ և բավարար պայմանը (մաս 1-ին, գլ.* VI, §6)՝

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0։$$

Այս դետերմինանտը վերլուծելով ըստ առաջին տողի էլեմենտների, կստանանք առաջին աստիճանի հավասարում x, y, z *ընթացիկ կոորդինատների նկատմամբ, որին կբավարարեն, մասնավորապես, տված երեք կետերի կոորդինատները։*

Այս վերջին հանգամանքը պարզ կերևա, նաև, եթե դետերմինանտի միջոցով գրված հավասարման մեջ x, y, z *ընթացիկ կոորդինատների տեղը դնենք տված երեք կետերից ցանկացած կետի կոորդինատները։ Ձախ մասում կստացվի այնպիսի դետերմինանտ, որի մեջ կամ առաջին տողի էլեմենտները զրոներ են, կամ կան երկու միատեսակ տողեր։ Այդպիսով, մեր կազմած հավասարումը ներկայացնում է մի հարթություն, որն անցնում է տված երեք կետերով։*

§ 7. Երկու հարթություններով կազմված անկյունը։ *Դիցուք տված հարթությունների հավասարումներն են՝*

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2+0։ \qquad (20)$$

Երկու հարթություններով կազմած անկյուն ասելով, մենք հասկանալու ենք այդ հարթություններով կազմված երկու հարևան երկնիստ անկյուններից ցանկացած անկյունը (հարթությունների զուգահեռության դեպքում նրանցով կազմված անկյունը կարելի է համարել 0-ի կամ π-ի հավասար՝ ըստ ցանկության)։ Այդ երկնիստ անկյուններից մեկը հավասար է տված հարթություններին ուղղահայաց $\{A_1, B_1, C_1\}$ և $\{A_2, B_2, C_2\}$ վեկտորներով կազմված φ անկյանը, որը որոշվում է II գլխի § 10-ի (17′) բանաձևով, այն է՝

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\ \sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}: \tag{21}$$

Դիտողություն։ (21) բանաձևի արտածումը կարելի է կատարել առանց վեկտորներին դիմելու։ Որպեսզի հաշվենք (20) հավասարումներով տված հարթություններով կազմված φ անկյունը, նկատենք, որ հարթություններով կազմված երկնիստ անկյուններից մեկը հավասար է կոորդինատների սկզբնակետից այդ հարթություններին իջեցրած ուղղահայացներով կազմված անկյանը։ (20) հարթությունների հավասարումները գրելով նորմալ տեսքով՝

$$\left.\begin{aligned} x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1-p_1=0,\\ x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2-p_2=0, \end{aligned}\right\} \tag{20′}$$

կունենանք (գլ. I, § 4)՝

$$\cos\varphi=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2. \tag{22}$$

Քանի որ (տե՛ս (8) բանաձևերը)՝

$$\cos\alpha_1=\pm\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},\qquad \cos\alpha_2=\pm\frac{A_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

$$\cos\beta_1=\pm\frac{B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},\qquad \cos\beta_2=\pm\frac{B_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

$$\cos\gamma_1=\pm\frac{C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},\qquad \cos\gamma_2=\pm\frac{C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

ապա, այս արժեքները տեղադրելով (22) հավասարության մեջ, կգտնենք՝

$$\cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}: \tag{21′}$$

Այս (21′) բանաձևում կարելի է վերցնել ցանկացած նշանը (+ կամ —), որը համապատասխանում է երկու կից երկնիստ անկյուններից մեկի ընտրությանը։

§ 8. Երկու հարթությունների զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները: *Այն դեպքում, երբ*

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ և } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \qquad (20)$$

երկու հարթությունները ուղղահայաց են, նրանցով կազմված անկյունը հավասար է 90°-ի, ուրեմն $\cos\varphi=0$*: Դրա շնորհիվ (21) բանաձևից կստանանք (20)* հարթությունների ուղղահայացության պայմանը՝

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0: \qquad (23)$$

Դիտողություն: Այս (23) պայմանն անմիջապես կըստացվի, եթե նկատենք, որ $\{A_1, B_1, C_1\}$ *և* $\{A_2, B_2, C_2\}$ *նորմալ վեկտորների սկալյար արտադրյալը հավասար է զրոյի:*

Հարթությունների զուգահեռության պայմանը *վեկտորական տեսքով կարելի է գրել այսպես՝* $n_1=\lambda n_2$, *որտեղ* n_1*-ը և* n_2*-ը տված հարթություններին ուղղահայաց վեկտորներ են: Անցնելով պրոյեկցիաներին, այդ պայմանը կգրենք այսպես՝*

$$A_1=\lambda A_2, \quad B_1=\lambda B_2, \quad C_1=\lambda C_2,$$

որ համարժեք է հետևյալ պայմաններին՝

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}: \qquad (24)$$

Դիտողություն: (24) պայմանները առանց վեկտորների կարելի է այսպես ստանալ. (20) հարթությունների զուգահեռության դեպքում ունենք՝

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_1&=\pm\cos\alpha_2, \\ \cos\beta_1&=\pm\cos\beta_2, \\ \cos\gamma_1&=\pm\cos\gamma_2: \end{aligned}\right\} \qquad (24)'$$

Այստեղ կոսինուսները փոխարինելով իրենց արտահայտություններով (20) հավասարումների գործակիցների միջոցով (ըստ (8) բանաձևերի), կստանանք

$$\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=\pm\frac{A_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

$$\frac{B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=\pm\frac{B_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

$$\frac{C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=\pm\frac{C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

որտեղից գտնում ենք՝

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \tag{24}$$

Հակադարձաբար, եթե տեղի ունեն (24) պայմանները, ապա հարթությունները զուգահեռ են: Իսկապես, այդ հարթությունների հավասարումները կարելի է այսպես գրել՝

$$\lambda A_2x+\lambda B_2y+\lambda C_2z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

որտեղ λ-ն (24) հավասարությունների մեջ յուրաքանչյուր հարաբերության արժեքն է։ Առաջին հավասարումը λ-ի վրա բաժանելով, կստանանք՝

$$A_2x+B_2y+C_2z+\frac{D_1}{\lambda}=0.$$

Հետևաբար, տեղի ունեն (24′) առնչությունները, ուրեմն հարթությունները զուգահեռ են։

Օրինակ 1. Ցույց տալ, որ $x+y-z-1=0$ և $2x+2y-2z+3=0$ հարթությունները զուգահեռ են։

Զուգահեռության (25) պայմանները այստեղ բավարարվում են՝

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{-1}{-2}.$$

Օրինակ 2. Ցույց տալ, որ հետևյալ հարթությունները ուղղահայաց են՝

$$x+y+z=0 \text{ և } x+y-2z+3=0.$$

Ուղղահայացության (23) պայմանն այստեղ բավարարվում է՝

$$1\cdot1+1\cdot1+1\cdot(-2)=0.$$

Խնդիր I. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է տված կետով և զուգահեռ է տված հարթությանը:

Դիցուք տված են $M(x_1, y_1, z_1)$ կետը և

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

հարթությունը։ Գրենք տված $M(x_1, y_1, z_1)$ կետով անցնող մի որևէ հարթության հավասարում՝

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \tag{17}$$

Որպեսզի այս հարթությունը զուգահեռ լինի տված հարթությանը, պետք է բավարարվեն հարթությունների զուգահեռության պայմանները՝

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1},$$

որի շնորհիվ կարող ենք վերցնել ուղղակի

$$A = A_1, \quad B = B_1, \quad C = C_1:$$

A, B, C *գործակիցների այս արժեքները դնելով հարթության հավասարման մեջ, կստանանք՝*

$$A_1(x - x_1) + B_1(y - y_1) + C_1(z - z_1) = 0:$$

Օրինակ: Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և զուգահեռ է $x + y + z = 1$ *հարթությանը:*

Այստեղ $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, $A_1 = B_1 = C_1 = 1$: *Հետևաբար, որոնելի հարթության հավասարումը կլինի՝*

$$x + y + z = 0:$$

Խնդիր II. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է տված երկու կետերով և ուղղահայաց է տված հարթությանը:

Դիցուք տրված են $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *երկու կետերը և*

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

հարթությունը: Գրենք M_1 *կետով անցնող որևէ հարթության հավասարում՝*

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \tag{17}$$

և պահանջենք, որպեսզի այդ հարթությունն անցնի նաև M_2 *կետով և ուղղահայաց լինի տված հարթությանը՝*

$$\left.\begin{aligned} A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0, \\ AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0: \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Այստեղից որոշելով A, B, C *գործակիցներից երկուսի հարաբերությունը երրորդին և տեղադրելով հարթության (17) հավասարման մեջ, կստանանք որոնելի հավասարումը:*

Օրինակ: Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է (1, 1, 1) և (0, 1, —1) կետերով և ուղղահայաց է $x + y + z = 0$ *հարթությանը:*

Տված կետերից առաջինով անցնող ցանկացած հարթության հավասարումը կլինի՝

$$A(x - 1) + B(y - 1) + C(z - 1) = 0:$$

Որպեսզի այս հարթությունն անցնի նաև (0, 1, —1) կետով և ուղղահա-

յաց լինի տված հարթությանը, պետք է տեղի ունենան հետևյալ պայմանները՝

$$A+2C=0 \text{ և } A+B+C=0։$$

Առաջին պայմանից ստանում ենք՝ $\frac{A}{C}=-2$։ Երկրորդը C-ի վրա բաժանելով, կգտնենք՝

$$\frac{B}{C}=-\frac{A}{C}-1=2-1=1,$$

հարթության հավասարումը C-ի վրա բաժանելով և $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ հարաբերությունների տեղը դնելով գտած արժեքները, կստանանք՝

$$-2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0,$$

կամ՝

$$2x-y-z=0։$$

Դիտողություն։ Il խնդիրն ընդհանուր ձևով կարելի է լուծել, եթե օգտվենք դետերմինանտներից։ Իսկապես (17) և (25) հավասարումներից, որոնք համասեռ սիստեմ են կազմում A, B, C անհայտների նկատմամբ, կունենանք (մաս 1-ին, գլ. VI, § 6)՝

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}=0։$$

§ 9. Երեք հարթությունների հատման կետը։ Քանի որ տված՝

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$$

երեք հարթությունների հատման կետի կոորդինատները պետք է միաժամանակ բավարարեն բոլոր երեք հարթությունների հավասարումներին էլ, ուստի հատման կետի կոորդինատները գտնելու համար պետք է այդ երեք հավասարումները համատեղ լուծել x-ի, y-ի, z-ի նկատմամբ։

Օ ր ի ն ա կ։ Գտնել հետևյալ հարթությունների հատման կետը՝

$$x-y+z=0, \quad x+2y-1=0, \quad x+y-z+2=0։$$

Այս հավասարումները համատեղ լուծելով, կստանանք որոնելի կետի կոորդինատները՝

$$x=-1, \quad y=1, \quad z=2։$$

Այս խնդրի լրիվ լուծումն ընդհանուր տեսքով կարելի է ստանալ դետերմինանտների օգնությամբ։ 1-ին մասի VI գլխի § 7-ում կատարված հետազոտության արդյունքների համաձայն, եթե

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

դետերմինանտը զրոյից տարբեր է, ապա երեք հարթությունները հատվում են մեկ կետում, եթե Δ դետերմինանտը հավասար է զրոյի, բայց նրա մինորներից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է, ապա երեք հարթությունները կամ ընդհանուր կետ չունեն, կամ հատվում են անթիվ բազմությամբ կետերում։ Առաջին դեպքում

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{matrix}$$

աղյուսակին պատկանող 3-րդ կարգի դետերմինանտներից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է և այդ ժամանակ հարթություններից մեկը զուգահեռ է մյուս երկուսի հատման գծին։ Երկրորդ դեպքում այդ աղյուսակի բոլոր 3-րդ կարգի դետերմինանտները հավասար են զրոյի և բոլոր երեք հարթություններն անցնում են մեկ ուղիղով։

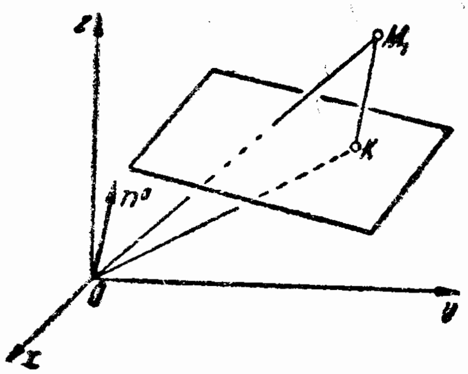
Եթե, վերջապես, Δ դետերմինանտի հետ միասին նրա բոլոր մինորները հավասար են զրոյի, ապա երեք հարթությունները կամ ընդհանուր կետ չունեն, կամ հատվում են անթիվ բազմությամբ կետերում։ Առաջին դեպքում վերը գրված աղյուսակի 2-րդ կարգի դետերմինանտներից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է և այդ ժամանակ բոլոր երեք հարթություններն իրար զուգահեռ են, իսկ երկրորդ դեպքում նույն աղյուսակի բոլոր երկրորդ կարգի դետերմինանտները հավասար են զրոյի և երեք հարթությունները համընկնում են։

§ **10. Կետի հեռավորությունը հարթությունից:** *Պայմանավորվենք տված կետի շեղում տված հարթությունից անվանել այն d թիվը, որը հավասար է այդ կետից հարթության վրա իջեցրած ուղղահայացի երկարությանը, վերցրած դրական նշանով, եթե տված կետն ու կոորդինատների սկզբնակետը գտնվում են տված հարթության տարբեր կողմերում և բացասական նշանով, եթե նրանք գտնվում են հարթության միևնույն կողմում. Հարթության վրա գտնվող կետերի համար շեղումը հավասար է զրոյի: Պարզ է, որ կետի* հեռավորությունը *հարթությունից* հավասար է շեղման բացարձակ մեծությանը:

Դիցուք պահանջվում է գտնել տված $M_1(r_1)$ *կետի հեռավորությունը հարթությունից, որի նորմալ հավասարումը տված է վեկտորական տեսքով՝*

$$\mathbf{rn}-p=0:$$

Խնդիրը կայանում է նրանում, որպեսզի գտնենք M_1 *կետից հարթության վրա իջեցրած* M_1K *ուղղահայացի երկարությունը (գծ. 114):*



Գծ. 114.

Նկատելով, որ $\overrightarrow{KM_1}$ *վեկտորը զուգահեռ է* $\mathbf{n}^\circ$ *միավոր վեկտորին, մենք կարող ենք այդ վեկտորն այսպես ներկայացնել՝*

$$\overrightarrow{KM_1}=d\mathbf{n}^\circ.$$

d *թվային բազմապատկիչը բացարձակ մեծությամբ վերցրած, ակներևաբար, տալիս է որոնելի հեռավորությունը. իսկ* d*-ի նշանը դրական կլինի, եթե* $\overrightarrow{KM_1}$ *և* $\mathbf{n}^\circ$ *վեկտորներն ունեն նույն ուղղությունը (այսինքն՝ եթե* M_1 *և* O *կետերը գտնվում են հարթության տարբեր կողմերում՝ ինչպես գծ. 114-ում), և բացասական կլինի, եթե այդ վեկտորները հակառակ ուղղություններ ունենան (այսինքն՝ եթե* M_1 *և* O *կետերը գտնվեն հարթության միևնույն կողմում): Այսպիսով,* d*-ն* M_1 *կետի շեղումն է տված հարթությունից: Նկատելով այդ, գծ. 114-ից տեսնում ենք, որ*

$$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1K},$$

կամ՝

$$\boldsymbol{r}_к=\boldsymbol{r}_1-d\boldsymbol{n}^\circ\text{։}$$

Քանի որ, մյուս կողմից, K կետը գտնվում է

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}^\circ-p=0$$

հարթության վրա, ուստի այդ կետի $\boldsymbol{r}_к$ շառավիղ-վեկտորը պետք է բավարարի հարթության հավասարմանը՝

$$(\boldsymbol{r}_1-d\boldsymbol{n}^\circ)\boldsymbol{n}^\circ-p=0 \text{ կամ՝ } \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n}^\circ-d-p=0,$$

որտեղից՝

$$d=\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n}^\circ-p\text{։} \tag{26}$$

Ուշադիր նայելով d-ի համար ստացած այս արտահայտությանը, տեսնում ենք, որ այն՝ հարթության նորմալ հավասարման ձախ մասում $\boldsymbol{r}$ ընթացիկ շառավիղ-վեկտորի տեղը տված կետի $\boldsymbol{r}_1$ շառավիղ-վեկտորը տեղադրելու արդյունքն է։

$\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n}^\circ$ սկալյար արտադրյալն արտահայտելով բազմապատկիչների միջոցով, կետի շեղման համար կստանանք հետևյալ բանաձևը կոորդինատային ձևով՝

$$d=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p\text{։} \tag{26'}$$

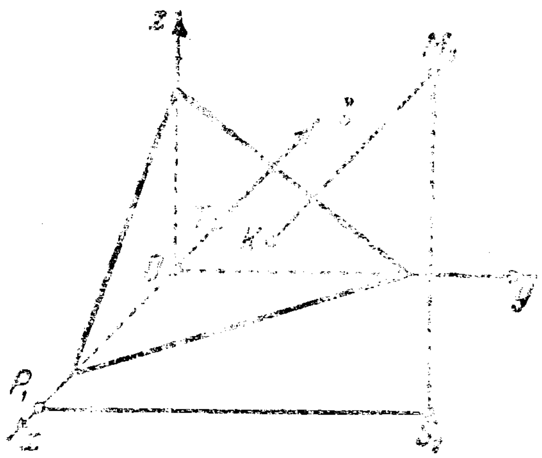
Այս նշանակում է՝ որպեսզի գտնենք կետի շեղումը հարթությունից, պետք է հարթության նորմալ հավասարման ձախ մասում ընթացիկ կոորդինատների փոխարեն դնենք տված կետի կոորդինատները: Ստացած շեղման բացարձակ մեծությունը կլինի կետի հեռավորությունը հարթությունից:

Դիտողություն։ Կետի հեռավորությունը հարթությունից հաշվելու խնդիրը կարելի է լուծել նաև առանց վեկտորական մեթոդի օգնության։ Դիցուք տված է $M_1(x_1, y_1, z_1)$ կետը և հարթության նորմալ հավասարումը՝

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0\text{։}$$

Գտնենք M_1 կետի d շեղումը տված հարթությունից, այսինքն՝ M_1 կետից տված հարթության վրա իջեցրած M_1K ուղղահայացի երկարությունը համապատասխան նշանով (գծ. 115)։

Կոորդինատների սկզբնակետից տանենք l ուղիղը՝ ուղղահայաց տված հարթությանը, և այդ ուղիղի վրա դրական ուղղությունն ընտրենք սկզբնակետից դեպի տված հարթությունը։ Դիտարկենք $\overline{OP_1S_1M_1K}$ բեկյալը և գտնենք նրա պրոյեկցիան l առանցքի վրա։ Քանի որ բեկյալի պրոյեկցիան հավասար է փակող հատվածի պրոյեկցիային (գլ. I, § 3), ուստի՝



Գծ. 115.

$$\text{պր}\ \overline{OP_1S_1M_1K} = \text{պր}\, OK = p\text{։} \qquad (27)$$

Մյուս կողմից, բեկյալի պրոյեկցիան հավասար է նրա հատվածների պրոյեկցիաների գումարին՝

$$\text{պր}\ \overline{OP_1S_1M_1K} = \text{պր}\ \overline{OP_1} + \text{պր}\ \overline{P_1S_1} + \text{պր}\ \overline{S_1M_1} + \text{պր}\ \overline{M_1K}\text{։}$$

Հետևաբար, (27) հավասարությունը կգրվի այսպես՝

$$\text{պր}\ \overline{OP_1} + \text{պր}\ \overline{P_1S_1} + \text{պր}\ \overline{S_1M_1} + \text{պր}\ \overline{M_1K} = p\text{։} \qquad (27')$$

Քանի որ (գլ. I, § 3) ունենք՝

$$\text{պր}\ \overline{OP_1} = x_1\cos\alpha, \quad \text{պր}\ \overline{P_1S_1} = y_1\cos\beta,$$

$$\text{պր}\ \overline{S_1M_1} = z_1\cos\gamma, \quad \text{պր}\ \overline{M_1K_1} = -d,$$

ուստի (27') հավասարությունն այժմ կարելի է այսպես գրել՝

$$x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - d = p,$$

որտեղից՝

$$d = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p\text{։} \qquad (26)$$

Օրինակ։ Գտնել (1, 2, 3) կետի հեռավորությունը հետևյալ հարթությունից՝

$$2x - 2y + z - 3 = 0\text{։}$$

Տված հավասարումը բազմապատկելով

$$M = \frac{1}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{1}{3}$$

նորմավորող բազմապատկիչով, կստանանք հարթության նորմալ հավասարումը՝

$$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - 1 = 0\text{։}$$

կետի շեղումը հարթությունից կլինի՝

$$d=\frac{2}{3}\cdot 1-\frac{2}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot 3-1=-\frac{2}{3}։$$

Մինուս նշանը ցույց է տալիս, որ տված կետը և կոորդինատների սկզբնակետը գտնվում են տված հարթության միևնույն կողմում։ Որոնելի հեռավորությունը հավասար է՝

$$|d|=\frac{2}{3}։$$

Վարժություններ

1. Ստուգել, արդյոք

$$3x-5y+2z-17=0$$

հարթությունն անցնո՞ւմ է հետևյալ կետերից որևէ մեկով՝ ա) (4, 1, 2), բ) (2, —1, 3), գ) (7, 1, 2), դ) (3, 0, 4), ե) (0, —4, 2)։

2. Գտնել կոորդինատների սկզբնակետից հետևյալ հարթության վրա իջեցրած ուղղահայացի երկարությունը և ուղղությունը՝

ա) $2x+3y+6z-35=0$, բ) $21x+30y-70z-84=0$,
գ) $x-2y+2z+21=0$։

3. $4x-7y+5z-20=0$ հարթության վրա գտնել այնպիսի P կետ, որպեսզի OP ուղիղը կոորդինատային առանցքների հետ հավասար անկյուններ կազմի։

4. $x+z-2=0$ հարթության վրա գտնել այնպիսի P կետ, որպեսզի OP ուղիղը Oy և Oz առանցքների հետ 6 անկյուն կազմի։

5. Գտնել հարթության հավասարումը, եթե հայտնի է, որ (2, 9, —6) կետը ծառայում է որպես սկզբնակետից այդ հարթության վրա իջեցրած ուղղահայացի հիմք։

6. Տված են երկու կետեր՝ $A(2, -1, -2)$ և $B(8, -7, 5)$։ Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է B կետով և ուղղահայաց է AB հատվածին։

7. Տված են երկու կետեր՝ $A(-7, 2, -1)$ և $B(3, 4, 10)$։ Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է B կետով և ուղղահայաց է AB հատվածին։

8. Որոշել կոորդինատային առանցքներից $2x-y+8z-4=0$ հարթության կտրած հատվածների մեծությունները։

9. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է (5, —7, 4) կետով և կոորդինատային առանցքներից կտրում է հավասար հատվածներ։

10. Նշել հետևյալ հարթություններից յուրաքանչյուրի դիրքի առանձնահատկությունը՝

ա) $2x-3y+2=0$, բ) $3x-2=0$, գ) $4y-7z=0$։

11. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որը՝ ա) զուգահեռ է Oy առանցքին և անցնում է (1, —5, 1) ու (3, 2, —2) կետերով.

բ) անցնում է Ox առանցքով և (4, —3, —1) կետով.

գ) զուգահեռ է xOz հարթությանը և անցնում է (3, 2, —7) կետով։

12. Գտնել հետևյալ երեք կետերով անցնող հարթության հավասարումը՝

ա) (7, 6, 7), (5, 10, 5), (—1, 8, 9).

բ) (2, 4, 8), (—3, 1, 5), (6, —2, 7)։

13. Գտնել հետևյալ հարթություններով կազմված անկյունը՝

ա) $x+y-11=0$ և $3x+8=0$.

բ) $y-\sqrt{3}\,x-7=0$ և $y=0$.

գ) $2x-3y+6z-12=0$ և $x+2y+2z-7=0$։

14. Տված է հետևյալ հարթությունը՝

$$3x-7y+5z-12=0։$$

Գտնել այն հարթության հավասարումը, որը զուգահեռ է տված հարթությանը և անցնում է հետևյալ կետով.

ա) (0, 0, 0), բ) (4, —7, 1), գ) (8, 0, 3), դ) 3, 0, 0)։

15. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է (5, —4, 3) և (—2, 1, 8) կետերով և ուղղահայաց է հետևյալ հարթությանը՝

ա) xOy, բ) yOz, գ) xOz։

16. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է (8, —3, 1) և (4, 7, 2) կետերով և ուղղահայաց է $3x+5y-7z-21=0$ հարթությանը։

17. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և ուղղահայաց է հետևյալ հարթություններին՝

$$x-y+z-7=0 \text{ և } 3x+2y-12z+5=0։$$

18. Գտնել հետևյալ երեք հարթությունների հատման կետը.

ա) $\begin{cases} 3x+4y-3z+37=0, \\ 6x-7y+2z-95=0, \\ 5x+2y-8z+53=0. \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 5x+3y-11z+72=0, \\ 4x-5y+7z+26=0, \\ 6x+11y-3z+66=0. \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 7x-5y-31=0, \\ 4x+11z+43=0, \\ 2x+3y+4z+20=0։ \end{cases}$

19. Որոշել (1, 2, 1) կետի հեռավորությունը $x+2y+2z-10=0$ հարթությունից։

20. Oy առանցքի վրա գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացած հետևյալ երկու հարթություններից՝

$$2x+3y+6z-6=0, \quad 8x+9y-72z+73=0։$$

21. Գտնել այն հարթությունների հավասարումները, որոնք անցնում են Ox առանցքով և (5, 4, 13) կետից ունեն 8 միավոր հեռավորություն։

22. Գտնել այն հարթությունների հավասարումները, որոնք զուգահեռ են $20x-4y-5z+7=0$ հարթությանը և նրանից ունեն 6 միավոր հեռավորություն։

23. Գտնել հետևյալ զուգահեռ հարթությունների հեռավորությունը՝

ա) $3x+2y-6z-35=0$ և $3x+2y-6z-56=0$,

բ) $3x-4y+12z+26=0$ և $3x-4y+12z-39=0$։

24*. Գտնել այն հարթությունների հավասարումները, որոնք կիսում են հետևյալ հարթություններով կազմված երկնիստ անկյունները՝

$$3x+2y+6z-35=0, \quad 21x-30y-70z-237=0։$$

25. Գտնել այն հարթությունների հավասարումները, որոնք կիսում են հետևյալ հարթություններով կազմված երկնիստ անկյունները՝

$$x-2y+2z+21=0, \quad 7x+24z-50=0։$$

26. Տրված են երկու կետեր՝ $A(a, b, c)$ և $B(a_1, b_1, c_1)$։ Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է A կետով և ուղղահայաց է AB հատվածին։

27. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որը զուգահեռ է Oy առանցքին և անցնում է (x_1, y_1, z_1) և (x_2, y_2, z_2) կետերով։

28. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է Ox առանցքով և (x_1, y_1, z_1) կետով։

29. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որը զուգահեռ է xOz հարթությանը և անցնում է (x_1, y_1, z_1) կետով։

30. Գտնել (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3) կետերով անցնող հարթության հավասարումը։

31. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է (x_1, y_1, z_1) և (x_2, y_2, z_2) կետերով և ուղղահայաց է xOy հարթությանը։

32. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է սկզբնակետով և ուղղահայաց է հետևյալ հարթություններին՝

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0։$$

33. Գտնել հետևյալ հարթությունների հատման կետը՝

$$x+y+z=0, \quad 2x-3y+4z=0, \quad 4x-11y+10z=0։$$

34. Գտնել հետևյալ հարթությունների հատման կետը՝

$$x+y+z-2=0, \quad 2x-3y+4z-3=0, \quad 4x-11y+10z-5=0։$$

35. Գտնել հետևյալ հարթությունների հատման կետը՝

$$x-y+z-1=0, \quad x+y-z-2=0, \quad 5x+y-z-7=0։$$

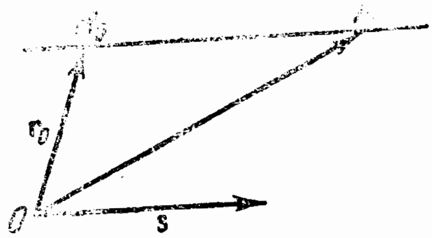
36. Կազմել հարթության վեկտորական հավասարումը, եթե տված են $M_1(\mathbf{r}_1)$ կետը հարթության վրա և հարթությանը զուգահեռ $\mathbf{a}$ և $\mathbf{b}$ վեկտորները։ Անցնել դեկարտյան կոորդինատներին։

37. Կազմել հարթության վեկտորական հավասարումը, եթե տված են $M_1(\mathbf{r}_1)$ և $M_2(\mathbf{r}_2)$ կետերը հարթության վրա և հարթությանը զուգահեռ $\mathbf{a}$ վեկտորը։ Անցնել դեկարտյան կոորդինատներին։

ԳԼՈՒԽ V

ՈՒՂԻՂ ԳԻԾ

§ 1. Ուղիղ գծի հավասարումները: *Ուղիղ գծի դիրքը տարածության մեջ լիովին կորոշվի, եթե տրված լինեն մի* M_0 *կետ ուղիղի վրա՝ իր* r_0 *շառավիղ-վեկտորի միջոցով և մի* s *վեկտոր (զրո վեկտորից տարբեր), որին ուղիղը զուգահեռ է (գծ. 116): Այդ* s *վեկտորը կանվանենք ուղիղի* ուղղորդ վեկտոր: *Ուղիղ գծի* M *փոփոխական կետին համապատասխանում է նրա* $\overrightarrow{OM}=r$ *փոփոխական շառավիղ-վեկտորը. գծ. 116-ից ունենք՝*



Գծ. 116

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{M_0M}: \qquad (1)$$

Նկատելով, որ $\overrightarrow{M_0M}$ *վեկտորը զուգահեռ է* s *վեկտորին, մենք այն կարտահայտենք հետևյալ տեսքով՝*

$$\overrightarrow{M_0M}=st,$$

որտեղ t *թվային բազմապատկիչը կարող է ցանկացած արժեքներ ընդունել՝ կախված* M *կետի դիրքից ուղիղի վրա. Հետևաբար, (1) հավասարությունը կարելի է գրել այսպես՝*

$$r=r_0+st, \qquad (2)$$

որտեղ t*-ն փոփոխական պարամետրի դեր է կատարում: (2) հավասարումը կանվանենք* ուղիղ գծի վեկտորական հավասարում:

Ցանկանալով (2) վեկտորական հավասարումը փոխարինել երեք համարժեք կոորդինատային հավասարումներով, M_0 կետի դեկարտյան կոորդինատները O սկզբնակետ ունեցող մի որոշ սիստեմի նկատմամբ նշանակենք a, b, c (դրանք կլինեն r_0 շառավիղ-վեկտորի պրոյեկցիաները), իսկ M կետի ընթացիկ կոորդինատները՝ x, y, z (դրանք էլ կլինեն r շառավիղ-վեկտորի պրոյեկցիաները). վերջապես, s վեկտորի պրոյեկցիաները նշանակենք՝ m, n, p։ Այդ ժամանակ (2) հավասարումը պրոյեկցիաներով գրելով, կստանանք՝

$$x=a+mt, \quad y=b+nt, \quad z=c+pt\text{։} \tag{3}$$

Երբ t պարամետրը փոփոխվում է, (3) հավասարումներով որոշվող x, y, z կոորդինատներ ունեցող կետը շարժվում է տված ուղիղի վրայով։ (3) հավասարումները անվանում են ուղիղ գծի պարամետրական հավասարումներ։ Քանի որ m-ը, n-ը, p-ն՝ s ուղղորդ վեկտորի պրոյեկցիաներն են, իսկ այդ վեկտորը զուգահեռ է ուղիղին, ուստի այդ թվերը բնորոշում են ուղիղ գծի ուղղությունը տարածության մեջ. այդ նկատի ունենալով, m, n, p թվերն անվանում են ուղիղ գծի ուղղորդ գործակիցներ։ Նկատենք, որ $s=s^0$ միավոր վեկտորի դեպքում m, n, p գործակիցները դառնում են Ox, Oy, Oz առանցքների հետ տված ուղիղի (s^0 վեկտորի) կազմած α, β, γ անկյունների կոսինուսները։ Այդ դեպքում (2) և (3) հավասարումները կընդունեն հետևյալ տեսքը՝

$$r=r_0+ts^0, \tag{2'}$$

$$x=a+t\cos\alpha, \quad y=b+t\cos\beta, \quad z=c+t\cos\gamma, \tag{3'}$$

ընդ որում այս դեպքում t պարամետրը պարզ երկրաչափական իմաստ ունի՝ t-ն M փոփոխական կետի հեռավորությունն է $M_0(a, b, c)$ կետից, վերցրած $+$ կամ $-$ նշանով՝ կախված այն բանից, թե $\overrightarrow{M_0M}$ վեկտորի ուղղությունը համընկնո՞ւմ է s^0 վեկտորի ուղղության հետ, թե՞ նրա հակառակ ուղղությունն ունի ($\overrightarrow{M_0M}=s^0t$)։ Այլ խոսքով, (2′) և (3′) հավասարումներում t-ն տվյալ ուղիղի $\overline{M_0M}$ հատվածի մեծությունն է, ընդունելով, որ ուղիղի դրական ուղղությունը համընկնում է s^0 վեկտորի ուղղության հետ։

Տեսնենք, թե արդյոք հնարավո՞ր է որոշել $\cos\alpha$-ն, $\cos\beta$-ն, cos γ-ն, գիտենալով m, n, p թվերը։ Ակներևորեն ունենք՝

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^0 s,$$

որտեղ s-ը $\boldsymbol{s}$ վեկտորի երկարությունն է։ Վերջին հավասարությունը պրոյեկցիաների միջոցով գրելով, կստանանք՝

$$m = s\cos\alpha, \quad n = s\cos\beta, \quad p = s\cos\gamma, \tag{4}$$

այսինքն՝ m, n, p գործակիցները համեմատական են ուղիղի ուղղորդ կոսինուսներին, ընդ որում համեմատականության բազմապատկիչ է ծառայում $\boldsymbol{s}\,\{m, n, p\}$ վեկտորի $s = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$ երկարությունը։ Այսպիսով, (4) հավասարություններից ունենք՝

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{m}{s} = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{n}{s} = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{p}{s} = \frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

Հետևաբար, տարածության մեջ ուղիղի ուղղությունը որոշվում է նրա ուղղորդ գործակիցների m : n : p հարաբերություններով, որը հնարավորություն է տալիս $\boldsymbol{s}\{m, n, p\}$ վեկտորի երկարությունը կամայական համարել։

(3) և (3′) պարամետրական հավասարումների փոխարեն, սովորաբար ուղիղ գիծը որոշում են ընթացիկ կոորդինատների նկատմամբ առաջին աստիճանի երկու հավասարումների սիստեմով։ Այդ հավասարումներն ստացվում են (3) կամ (3′) հավասարումներից t պարամետրն արտաքսելու միջոցով։ Այսպես, (3) հավասարումներից գտնում ենք՝

$$\frac{x-a}{m} = t, \quad \frac{y-b}{n} = t, \quad \frac{z-c}{p} = t,$$

կամ՝

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}. \tag{5}$$

Այս հավասարումներն անվանում են ուղիղ գծի կանոնական հավասարումներ։

Մասնավորապես, երբ $m=\cos\alpha$, $n=\cos\beta$, $p=\cos\gamma$, *(5) հավասարումները կընդունեն հետևյալ տեսքը՝*

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}\text{։}$$

Երկու հավասարումների (5) սիստեմը տված ուղիղը ներկայացնում է որպես երկու այնպիսի հարթությունների հատում, որոնք որոշվում են հետևյալ հավասարումներով՝

$$\frac{x-a}{m}=\frac{z-c}{n} \quad \text{և} \quad \frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}\text{։}$$

Նկատենք, որ կանոնական հավասարումների մեջ բոլոր m, n, p *գործակիցները չեն կարող միաժամանակ զրո դառնալ, քանի որ* $s\neq 0$։ *Բայց նրանց մեջ կարող են զրոյի հավասարներ լինել։ Այդպիսի դեպքում գրության (5) ձևը պայմանական իմաստով ենք հասկանում՝ այնպես, ինչպես այդ բացատրեցինք* II *գլխի § 13-ում։*

Դիցուք, օրինակ, $m=0$, *իսկ* $n\neq 0$։ *Այդ ժամանակ,* II *գլխի § 13-ում ասածին համապատասխան, ունենք՝*

$$n(x-a)=0\cdot(y-b),$$

որտեղից՝

$$x-a=0\text{։}$$

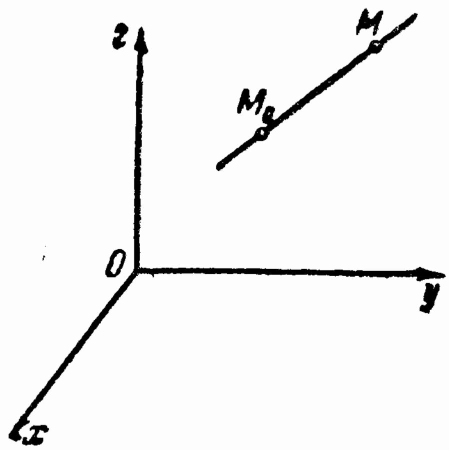
Նույն արդյունքն, անշուշտ, կստանանք նաև (3) հավասարումներից։ Նկատենք, որ $m=0$, *կամ* $x-a=0$ *հավասարությունները երկրաչափորեն միևնույն բանն են նշանակում.* $m=0$ *ցույց է տալիս, որ ուղիղն ուղղահայաց է* Ox *առանցքին, իսկ* $x-a=0$ *հավասարումը ցույց է տալիս, որ ուղիղը գտնվում է* Ox *առանցքին ուղղահայաց հարթությունում։*

Դիտողություն։ Կարելի է ուղիղների հավասարումներն արտածել, չդիմելով վեկտորներին։ Ուղիղի վրա վերցնենք մի $M_0(a, b, c)$ *որոշակի կետ և մի փոփոխական* $M(x, y, z)$ *կետ։ Տված ուղիղի (նրա վրա որոշակիորեն ընտրած ուղղության) կազմած անկյունները* Ox, Oy, Oz *կոորդինատային առանցքների հետ նշանակենք* α, β, γ, *իսկ* M_0M *հեռավորու-*

թյունը՝ ρ, վերցրած + կամ — նշանով, նայած թե $\overline{M_0M}$ հատվածի ուղղությունը կհամընկնի՞ ուղիղի վրա ընտրած ուղղության հետ, թե՞ կլինի նրա հակառակը։

$\overline{M_0M}$ հատվածի պրոյեկցիաները Ox, Oy, Oz առանցքների վրա, համապատասխանորեն, կլինեն՝ x—a, y—b, z—c (գծ. 117)։ Հատվածի պրոյեկցիան արտահայտող բանաձևի (գլ. I, § 3) համաձայն ունենք՝

$$x-a=\rho\cos\alpha,\quad y-b=\rho\cos\beta,\quad z-c=\rho\cos\gamma\text{։}$$



Գծ. 117

Այս երեք հավասարումներից ρ-ն արտաքսելով, ուղիղի հավասարումները կգրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}\text{։}\qquad (5')$$

Այս հարաբերությունների հայտարարները բազմապատկելով միևնույն կամայական թվով, ուղիղի հավասարումներն այսպես կներկայացնենք՝

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p},\qquad (5)$$

որտեղ m, n, p թվերը համեմատական են կոորդինատային առանցքների հետ ուղիղի կազմած անկյունների կոսինուսներին, այն է՝

$$m:n:p=\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma\text{։}$$

(5) հավասարումներն անվանում են ուղիղ գծի կանոնական հավասարումներ:

§ 2. Ուղիղը որպես երկու հարթությունների հատման գիծ: Ուղիղի ընդհանուր հավասարումները: Դիցուք ուղիղի

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}\qquad (5)$$

կանոնական հավասարումների մեջ p գործակիցը զրոյից տարբեր է, այսինքն՝ ուղիղը xOy հարթությանը զուգահեռ չէ։ Այդ հավասարումները գրենք առանձին-առանձին՝

$$\frac{x-a}{m}=\frac{z-c}{p}\quad \text{և}\quad \frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}\text{։}\qquad (6)$$

Մեր ընդունած պայմանի դեպքում (6) հավասարումները լիովին որոշում են մի ուղիղ գիծ։ Նրանցից յուրաքանչյուրն առանձին վերցրած հարթություն է ներկայացնում, ընդ որում առաջինը զուգահեռ է Oy առանցքին, երկրորդը՝ Ox առանցքին։

Այսպիսով, ուղիղ գիծը ներկայացնելով (6) տեսքի հավասարումներով, մենք այն դիտարկում ենք որպես երկու հարթությունների հատման գիծ, որոնք այդ ուղիղը պրոյեկտում են xOz և yOz կոորդինատային հարթությունների վրա։ Հետևաբար, (6) հավասարումներից առաջինը, դիտարկված xOz հարթության մեջ, ներկայացնում է տված ուղիղի պրոյեկցիան այդ հարթության վրա. ճիշտ այդպես էլ (6) հավասարումներից երկրորդը, դիտարկված yOz հարթությունում, ներկայացնում է տված ուղիղի պրոյեկցիան yOz հարթության վրա։ Այսպես, ուրեմն, կարելի է ասել, որ ուղիղի հավասարումները (6) տեսքով տալը նշանակում է՝ տալ նրա պրոյեկցիաները xOz և yOz կոորդինատային հարթությունների վրա։

Եթե p ուղղորդ գործակիցը հավասար լիներ զրոյի, ապա անպայման մյուս երկու գործակիցներից թեկուզ մեկը, օրինակ՝ m-ը զրոյից տարբեր կլիներ, այսինքն՝ ուղիղը զուգահեռ չէր լինի yOz հարթությանը։ Այդ դեպքում մենք կարող էինք ուղիղը ներկայացնել երկու այնպիսի հարթությունների հավասարումներով, որոնք նրան կպրոյեկտեին xOy և yOz հարթությունների վրա, (5) հավասարումները գրելով այսպես՝

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n},\quad \frac{x-a}{m}=\frac{z-c}{p}։$$

Այսպիսով, ամեն մի ուղիղ կարելի է ներկայացնել երկու այնպիսի հարթությունների հավասարումներով, որոնք անցնում են այդ ուղիղով և նրան պրոյեկտում են երկու կոորդինատային հարթությունների վրա։

Սակայն, ամենևին էլ պարտադիր չէ ուղիղը որոշել հենց այդպիսի մի զույգ հարթություններով։ Յուրաքանչյուր ուղիղով անցնում են անթիվ բազմությամբ հարթություններ։ Նրանցից որ զույգն էլ վերցնենք, հատվելով, որոշում են այդ ուղիղը տարածության մեջ։ Հետևաբար, տված ուղիղով անցնող ամեն երկու հարթությունների հավասարումներ, համատեղ դիտարկված, իրենցից ներկայացնում են այդ ուղիղի հավասարումները։

Ընդհանրապես, ամեն երկու՝ իրար ոչ զուգահեռ հարթություններ, որոնք տրված են ընդհանուր հավասարումներով՝

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+B_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+B_2z+D_2=0, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

որոշում են իրենց հատման ուղիղը։ (7) հավասարումները, միատեղ վերցրած, կոչվում են ուղիղի ընդհանուր հավասարումներ։

Ուղիղի (7) ընդհանուր հավասարումներից կարելի է անցնել նրա կանոնական հավասարումներին։ Դրա համար մենք պետք է իմանանք մի որոշ կետ ուղիղի վրա և ուղիղի ուղղորդ վեկտորը։

Որոնելի կետի կոորդինատները հեշտությամբ կգտնենք, եթե կոորդինատներից մեկը կամայապես վերցնենք և ապա տրված երկու հավասարումների սիստեմը լուծենք մյուս երկու կոորդինատների նկատմամբ։

Ուղիղի ուղղորդ վեկտորը գտնելու համար նկատենք, որ այդ վեկտորը, ուղղված լինելով տված հարթությունների հատման գծով, պետք է ուղղահայաց լինի այդ հարթությունների $n_1\{A_1, B_1, C_1\}$ և $n_2\{A_2, B_2, C_2\}$ երկու նորմալ վեկտորներին։ Հակադարձաբար, n_1 և n_2 վեկտորներին ուղղահայաց ամեն մի վեկտոր զուգահեռ է երկու հարթություններին, հետևաբար՝ նաև նրանց հատման գծին։

Սակայն այդպիսի հատկություն ունի նաև $n_1 \times n_2$ վեկտորական արտադրյալը։ Ուրեմն, որպես ուղիղի ուղղորդ վեկտոր կարելի է վերցնել տված հարթությունների նորմալ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը։

Օ ր ի ն ա կ 1. Հետևյալ ուղիղի հավասարումները բերել կանոնական տեսքի՝

$$2x-3y+z-5=0, \quad 3x+y-2z-4=0.$$

Կոորդինատներից մեկն ընտրենք կամայապես։ Ասենք թե $z=1$։ Այդ ժամանակ՝

$$2x-3y=4; \quad 3x+y=6,$$

որտեղից՝ $x=2$, $y=0$։ Այսպիսով, մենք գտանք ուղիղի վրա գտնվող մի կետ՝ (2, 0, 1)։

Այժմ գտնենք $\{2, -3, 1\}$ և $\{3, 1, -2\}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը. կստանանք՝ $\{5, 7, 11\}$, որը և կլինի տված ուղիղի ուղղորդ վեկտորը։ Ուղիղի կանոնական հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y}{7}=\frac{z-1}{11}.$$

Դիտողություն։ *Ուղիղի (7) տեսքի ընդհանուր հավասարումները կարելի է կանոնական տեսքի բերել նաև չդիմելով վեկտորական մեթոդի օգնությանը։*

Նախապես մի քիչ ավելի հանգամանորեն կանգ առնենք (6) հավասարումների վրա՝

$$\frac{x-a}{m}=\frac{z-c}{p}, \quad \frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}. \tag{6}$$

Դրանցից x-*ն ու* y-*ն արտահայտենք* z-*ով, կստանանք՝*

$$x=Mz+x_0, \quad y=Nz+y_0, \tag{6'}$$

որտեղ նշանակված են՝

$$M=\frac{m}{p}=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \qquad N=\frac{n}{p}=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma},$$

$$x_0=a-\frac{mc}{p}, \qquad y_0=b-\frac{nc}{p}.$$

(6′) հավասարումները կոչվում են ուղիղի հավասարումներ պրոյեկցիաներով՝ xOz *և* yOz *հարթությունների վրա։*

Պարզենք M *և* N *հաստատունների երկրաչափական իմաստը.* M-*ը տված ուղիղի պրոյեկցիայի անկյունային գործակիցն է* xOz *հարթության վրա (*Oz *առանցքի հետ այդ պրոյեկցիայի կազմած անկյան տանգենսն է), իսկ* N-*ը՝ նույն ուղիղի պրոյեկցիայի անկյունային գործակիցն է* yOz *հարթության վրա (*Oz *առանցքի հետ այդ պրոյեկցիայի կազմած անկյան տանգենսն է)։ Այսպիսով,* M *և* N *թվերը որոշում են տված ուղիղի պրոյեկցիաների ուղղությունները երկու կոորդինատային հարթությունների վրա և, հետևաբար, բնորոշում են նաև իր՝ ուղիղի ուղղությունը։ Այդ պատճառով* M *և* N *թվերը կոչվում են տված ուղիղի* անկյունային գործակիցներ:

x_0 *և* y_0 *հաստատունների երկրաչափական իմաստը պարզելու համար, ուղիղի (6′) հավասարումներում ընդունենք* $z=0$, *կստանանք՝* $x=x_0$, $y=y_0$*։ Նշանակում է (*x_0, y_0, 0*) կետը գտնվում է տված ուղիղի վրա։ Ակներևորեն, այդ կետը՝ տված ուղիղի և* xOy *հարթության հատման կետն է։ Ուրեմն,* x_0-*ն և* y_0-*ն՝ տված ուղիղ գծի հետքի կոորդինատներն են* xOy *հարթության վրա։*

Այժմ հեշտ է ուղիղ գծի՝ պրոյեկցիաներով տված հավասարումներից անցնել կանոնական հավասարումներին։ Դիցուք, օրինակ՝ տված են (6′) հավասարումները։ Այդ հավասարումները լուծելով z-*ի նկատմամբ, կգտնենք՝*

$$z=\frac{x-x_0}{M}, \quad z=\frac{y-y_0}{N},$$

որտեղից անմիջապես ստանում ենք կանոնական հավասարումները հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{x-x_0}{M}=\frac{y-y_0}{N}=\frac{z}{1}.$$

Օրինակ 2. Ուղիղի

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-1}$$

կանոնական հավասարումները բերել պրոյեկցիաներով հավասարումների՝ xOz և yOz հարթությունների վրա։

Տված հավասարումներն արտագրենք հետևյալ ձևով՝

$$\frac{x-1}{2}=\frac{z}{-1}, \qquad \frac{y}{3}=\frac{z}{-1}.$$

Այս հավասարումներից առաջինը լուծելով x-ի նկատմամբ, իսկ երկրորդը՝ y-ի նկատմամբ, կգտնենք որոնելի հավասարումները պրոյեկցիաներով՝

$$x=-2z+1, \quad y=-3z.$$

Օրինակ 3. Ուղիղի՝

$$x=3z-2, \qquad y=2z+1$$

պրոյեկցիաներով հավասարումները բերել կանոնական տեսքի։

Տված հավասարումները z-ի նկատմամբ լուծելով, կստանանք՝

$$z=\frac{x+2}{3}, \quad z=\frac{y-1}{2}.$$

Այստեղից՝

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}.$$

Օրինակ 4. Ուղիղի՝

$$y=-2, \qquad z=3x-1$$

պրոյեկցիաներով հավասարումները բերել կանոնական տեսքի:

Հավասարումների սիստեմը գրելով հետևյալ տեսքով՝

$$y=0\cdot x-2, \qquad z=3x-1,$$

կգտնենք՝

$$\frac{x}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z+1}{3}.$$

Ուղիղի հավասարումները պրոյեկցիաներով կարելի է ստանալ նաև (7) ընդհանուր հավասարումներից, դրանք լուծելով կոորդինատներից որևէ երկուսի, օրինակ, x-ի և y-ի նկատմամբ. եթե ուղիղը զուգահեռ է xOy հարթությանը, ապա (7) հավասարումները (6′) հավասարումներին բերել չի հաջողվի, բայց այդ դեպքում կարելի է բերել պրոյեկցիաներով հավասարումների՝ մի այլ զույգ կոորդինատային հարթությունների վրա։

Եթե պահանջվում է ուղիղի ընդհանուր հավասարումները կանոնական տեսքի բերել, ապա կարելի է նախապես բերել պրոյեկցիաներով հավասարումների և ապա վերջիններս բերել կանոնական տեսքի։

Օրինակ 5. Ուղիղի՝

$$2x+y-z+1=0, \quad 3x-y+2z-3=0$$

ընդհանուր հավասարումները բերել կանոնական տեսքի։

Տված հավասարումները x-ի և y-ի նկատմամբ լուծելով, կգտնենք նախ պրոյեկցիաներով հավասարումները՝

$$x=-\frac{1}{5}z+\frac{2}{5}, \quad y=\frac{7}{5}z-\frac{9}{5}.$$

Այս հավասարումներից գտնենք z-ի արտահայտությունները՝

$$z=\frac{x-\frac{2}{5}}{-\frac{1}{5}}, \quad z=\frac{y+\frac{9}{5}}{\frac{7}{5}},$$

որից հետո կստանանք կանոնական հավասարումները՝

$$\frac{x-\frac{2}{5}}{-\frac{1}{5}}=\frac{y+\frac{9}{5}}{\frac{7}{5}}=\frac{z}{1}.$$

Ուղղորդ գործակիցները բազմապատկելով —5-ով, կստանանք ավելի պարզ տեսքով կանոնական հավասարումներ՝

$$\frac{x-\frac{2}{5}}{1}=\frac{y+\frac{9}{5}}{-7}=\frac{z}{-5},$$

§ 3. Երկու ուղիղներով կազմված անկյունը։ *Երկու ուղիղներով կազմված անկյուն ասելով հասկանում ենք ցանկացած կետից՝ տված ուղիղներին զուգահեռ տարված ուղիղներով կազմված անկյուններից որևէ մեկը։ Պայմանավորվենք անկյունը վերցնել 0-ի և π-ի սահմաններում, եթե լրացուցիչ վերապահում չի արվում։ Դիցուք երկու ուղիղների հավասարումները տրված են կանոնական տեսքով՝*

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1},$$

$$\frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{p_2}.$$

Ակներևորեն, նրանցով կազմված φ *անկյունը կարելի է համարել նրանց* $\{m_1, n_1, p_1\}$ *և* $\{m_2, n_2, p_2\}$ *ուղղորդ վեկտորներով կազմված անկյունը կամ նրա լրացուցիչ անկյունը մինչև* π*։ Հետևաբար,* II *գլխի § 10-ի (17′) բանաձևով կունենանք՝*

$$\cos\varphi=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (8)$$

Այստեղ կարելի է ցանկացած նշան վերցնել, որ համապատասխանում է տված ուղիղների միջև երկու տարբեր անկյուններից մեկի ընտրությանը։

Օրինակ։ Գտնել հետևյալ ուղիղներով կազմված անկյունը՝

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1} \quad \text{և} \quad \frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}.$$

Առաջին ուղիղի ուղղորդ գործակիցները հավասար են՝ $m_1=1, n_1=-4, p_1=1$, *իսկ երկրորդ ուղիղի ուղղորդ գործակիցները հավասար են՝* $m_2=2$, $n_2=-2$, $p_2=-1$*։ Հետևաբար՝*

$$\cos\varphi = \pm\frac{1\cdot 2+(-4)(-2)+1\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

որտեղից՝

$$\varphi=\frac{\pi}{4}, \text{ կամ } \varphi=\frac{3\pi}{4}.$$

§ **4. Երկու ուղիղների զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները:** *Ուղիղների ուղղահայացության դեպքում* $\cos\varphi=0$ *և (8) բանաձևից ստանում ենք՝*

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0 \text{ (ուղղահայացության պայմանը):} \qquad (9)$$

Դ ի տ ո ղ ու թ յ ու ն: Այս պայմանն անմիջապես կստացվի, եթե նկատենք, որ $\{m_1, n_1, p_1\}$ *և* $\{m_2, n_2, p_2\}$ *վեկտորների սկալյար արտադրյալը պետք է հավասար լինի զրոյի:*

Քանի որ ուղիղի ուղղությունը որոշվում է $m:n:p$ *հարաբերություններով, ապա երկու ուղիղների զուգահեռության պայմանը կլինի՝*

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \text{ (զուգահեռության պայմանները):} \qquad (10)$$

Դ ի տ ո ղ ու թ յ ու ն: Այս պայմանը կարելի է անմիջապես ստանալ, եթե նկատենք, որ այս դեպքում $\{m_1, n_1, p_1\}$ *և* $\{m_2, n_2, p_2\}$ *վեկտորները կոլինեար են:*

Խ ն դ ի ր: Կազմել այն ուղիղի հավասարումները, որն անցնում է տված (a, b, c) կետով և զուգահեռ է տված

$$\frac{x-a_1}{m}=\frac{y-b_1}{n}=\frac{z-c_1}{p}$$

ուղիղին:

Դիցուք որոնելի ուղիղի հավասարումներն են՝

$$\frac{x-a}{M}=\frac{y-b}{N}=\frac{z-c}{P}. \qquad (5)$$

Քանի որ այս ուղիղը զուգահեռ է տված ուղիղին, ապա զուգահեռության պայմանի համաձայն՝

$$\frac{M}{n}=\frac{N}{n}=\frac{P}{p},$$

որոնց շնորհիվ կարելի է ուղղակի վերցնել $M=m$, $N=n$, $P=p$։ *Հետևաբար, որոնելի ուղիղի հավասարումները կլինեն՝*

$$\frac{x-a}{m}=\frac{v-b}{\tilde{n}}=\frac{z-c}{p}։$$

§ 5. Տված երկու կետերով անցնող ուղիղի հավասարումները։ *Դիցուք պետք է գտնել* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *և* $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *կետերով անցնող ուղիղի հավասարումները։ Այդ հավասարումները մենք կորոնենք կանոնական տեսքով։*

Խնդրի լուծման համար բավական է իմանալ ուղիղի կետերից մեկի կոորդինատները և ուղղորդ վեկտորը։ Որպես այդպիսի կետ կարելի է վերցնել տված երկու կետերից որևէ մեկը։ Իսկ որպես ուղիղի ուղղորդ վեկտոր ընդունենք $\overrightarrow{M_1M_2}$ *վեկտորը։ Այդ վեկտորի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա կլինեն՝*

$$x_2-x_1, \quad y_2-y_1, \quad z_2-z_1։$$

Որոնելի ուղիղի հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}։ \qquad (11)$$

Դիտողություն։ (11) հավասարումները կարելի է ստանալ նաև առանց վեկտորական մեթոդը կիրառելու։ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *կետով անցնող ուղիղի հավասարումները կլինեն՝*

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}։$$

Քանի որ $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *կետը գտնվում է այդ ուղիղի վրա, նրա կոորդինատները պետք է բավարարեն այդ հավասարումներին՝*

$$\frac{x_2-x_1}{m}=\frac{y_2-y_1}{n}=\frac{z_2-z_1}{p}։$$

Այս հավասարությունները բաղդատելով նախորդների հետ, կստանանք (11)-ը։

Օրինակ։ Կազմել այն ուղիղի հավասարումները, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և (1, 1, 1) կետով։

Այստեղ $x_1=y_1=z_1=0$, *իսկ* $x_2=y_2=z_2=1$։ *Հետևաբար, (11)-ի համաձայն, որոնելի ուղիղի հավասարումները կլինեն՝*

$$x=y=z։$$

§ 6. Ուղիղի և հարթության միջև կազմված անկյունը։

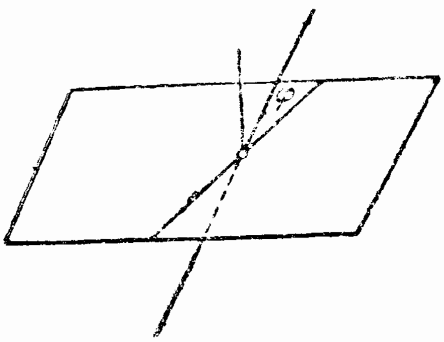
Դիցուք ուղիղի հավասարումներն են՝

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p},$$

իսկ հարթության հավասարումը՝

$$Ax+By+Cz+D=0։$$

Ուղիղի և հարթության միջև կազմված φ *անկյուն ասելով մենք հասկանում ենք ուղիղով և հարթության վրա իր պրոյեկցիայով կազմված երկու կից անկյուններից որևէ մեկը (գծ. 118)։ Գտնենք* φ *անկյան սինուսը. հետագայում կարելի է ընդունել* $\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, *որովհետև կից անկյունների սինուսները հավասար են։* $\frac{\pi}{2}-\varphi$ *անկյունը, ինչպես գծագրից երևում է, կլինի ուղիղով և հարթության ուղղահայացով կազմված անկյունը։ Այդ անկյան կոսինուսը հեշտությամբ կգտնենք հարթության ուղղահայացի* A, B, C *ուղղորդ գործակիցներով և տված ուղիղի* m, n, p *ուղղորդ գործակիցներով. Նկատելով, որ* $\cos\left(\frac{\pi}{\varphi}-\varphi\right)=\sin\varphi$, *վերջնականապես կստանանք՝*



Գծ. 118

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}։ \qquad (12)$$

Այստեղ համարիչը վերցնում ենք բացարձակ մեծությամբ, քանի որ $\sin\varphi\geqslant0$։

§ 7. Ուղիղի ու հարթության զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները: *Երբ*

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$$

ուղիղը զուգահեռ է

$$Ax+By+Cz+D=0$$

հարթությանը, նրանց միջև անկյունը հավասար է զրոյի, հետևաբար, $\sin\varphi=0$ *և (12) բանաձևից ստանում ենք որոնելի պայմանը՝*

$$Am+Bn+Cp=0 \text{ (զուգահեռության պայմանը):} \qquad (13)$$

Դիտողություն: Այդ պայմանն անմիջապես կստացվի, եթե նկատենք, որ $\{A, B, C\}$ *և* $\{m, n, p\}$ *վեկտորները ուղղահայաց են և, նշանակում է, նրանց սկալյար արտադրյալը հավասար է զրոյի:*

Ուղիղի և հարթության ուղղահայացության պայմանը համընկնում է ուղիղի և հարթության ուղղահայացի զուգահեռության պայմանի հետ, հետևաբար, կունենանք՝

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \text{ (ուղղահայացության պայմանը):} \qquad (14)$$

Խնդիր: Կազմել այն բոլոր ուղիղների երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք անցնում են (a, b, c) կետով և զուգահեռ են

$$Ax+By+Cz+D=0$$

հարթությանը:

(a, b, c) *կետով անցնող ամեն մի ուղիղի հավասարում կգրվի այսպես՝*

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\mathbf{s}t,$$

որտեղ $\mathbf{r}_1$*-ը տված կետի շառավիղ-վեկտորն է, իսկ* $\mathbf{s}$*-ը այն վեկտորն է, որին զուգահեռ է տված ուղիղը: Քանի որ որոնելի ուղիղը պետք է ուղղահայաց լինի* $\mathbf{n}(A, B, C)$ *վեկտորին, ապա պետք է տեղի ունենա հետևյալ պայմանը՝*

$$\mathbf{n}\mathbf{s}=0:$$

Ուղիղի հավասարումը բազմապատկելով $\mathbf{n}$ *վեկտորով, կստանանք՝*

$$rn=r_1n+nst, \text{ կամ՝ } (r-r_1)n=0,$$

քանի որ $ns=0$։ $(r-r_1)n=0$ հավասարումն արտահայտում է այն հարթությունը, որն անցնում է r_1 շառավիղ-վեկտոր ունեցող կետով և ուղղահայաց է n վեկտորին։ Այդ հավասարումը կոորդինատային ձևի բերելով, կստանանք՝

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0.$$

Դիտողություն։ Այս նույն խնդիրը կարելի է լուծել առանց վեկտորական մեթոդի օգնության։

(a, b, c) կետով անցնող ամեն մի ուղիղի հավասարումներ կարելի է այսպես գրել՝

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}.$$

Որոնելի ուղիղների և տրված հարթության զուգահեռության պայմանը կարտահայտվի

$$Am+Bn+Cp=0$$

հավասարությամբ։ Այստեղ m-ը, n-ը, p-ն փոխարինելով իրենց համեմատական x—a, y—b, z—c մեծություններով, կստանանք՝

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0.$$

Ակներևորեն, սա այն հարթության հավասարումն է, որն անցնում է (a, b, c) կետով և զուգահեռ է տրված հարթությանը։

§ 8. **Հարթությունների փնջի հավասարումը։** Դիցուք տված ուղիղի հավասարումներն են՝

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$$

Կազմենք՝

$$Ax+By+Cz+D+\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0 \qquad (15)$$

հավասարումը, որը λ հաստատունի ցանկացած արժեքի դեպքում հարթություն է պատկերում։ Եթե որևէ կետ գտնվում է տրված ուղիղի վրա, ապա նրա կոորդինատները միաժամանակ բավարարում են այդ ուղիղի երկու հավասարումներին էլ և, հետևաբար, նաև (15) հավասարմանը՝ λ-ի ցանկացած արժեքի դեպքում։ Այդպիսով, (15) հավասարումը պատկերում է տված ուղիղով անցնող հարթություններ: Հակադարձաբար յուրաքանչյուր այդպիսի հարթություն կորոշվի տրված ուղիղի վրա չգտնվող մի $M(x_1, y_1, z_1)$ կետով. λ-ի՝ այդ հարթությանը համապատասխանող արժեքը կորոշվի հետևյալ պայմանից՝

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D+\lambda(A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1)=0,$$

եթե միայն $A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1\neq0$: Այսպիսով, (15) հավասարումը λ-ի համապատասխան ընտրության դեպքում որոշում է տրված ուղիղով անցնող ցանկացած հարթությունը, բացառությամբ տված երկու հարթություններից մեկի, այն է՝ A_1x+B_1y+ $+C_1z+D_1=0$ հարթության:

Տվյալ ուղիղով անցնող բոլոր հարթությունների համախումբըն անվանելով **հարթությունների փունջ**, մենք կարող ենք ասել, որ (15) հավասարումը **հարթությունների փնջի հավասարումն է**, որովհետև նա որոշում է փնջի բոլոր հարթությունները (բացի տված հարթություններից երկրորդից):

Օ ր ի ն ա կ: Կազմել

$$x+y-z=0, \qquad x-y+z-1=0$$

ուղիղով և (1, 1, —1)-կետով անցնող հարթության հավասարումը:

Տված ուղիղով անցնող ամեն մի հարթության հավասարում ունի

$$x+y-z+\lambda(x-y+z-1)=0$$

տեսքը: Այդ հարթության՝ տված կետով անցնելու պայմանը կլինի՝

$$3+\lambda(-2)=0, \text{ որտեղից՝ } \lambda=\frac{3}{2}:$$

λ-ի այս արժեքը տեղադրելով հարթության հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$x+y-z+\frac{3}{2}(x-y+z-1)=0,$$

կամ՝

$$5x-y+z-3=0:$$

§ **9. Ուղիղի հատումը հարթության հետ:** Դիցուք տրված են ուղիղի հավասարումները՝

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \qquad (16)$$

և հարթության հավասարումը՝

$$Ax+By+Cz+D=0: \qquad (17)$$

(17) հարթության հետ (16) ուղիղի հատման կետի կոորդինատները միաժամանակ պետք է բավարարեն (16) և (17) հավասարումներին, հետևաբար, այդ կոորդինատների որոշման համար պետք է այդ հավասարումները համատեղ լուծել, x-ը, y-ը, z-ը համարելով անհայտներ։

(16) հավասարումների մեջ հավասար հարաբերություններից յուրաքանչյուրը հավասարեցնելով մի t օժանդակ անհայտի, կըստանանք առաջին աստիճանի չորս հավասարումներ x, y, z, t չորս անհայտներով՝

$$\frac{x-a}{m}=t, \quad \frac{y-b}{n}=t, \quad \frac{z-c}{p}=t, \quad Ax+By+Cz+D=0:$$

Առաջին երեք հավասարումներից գտնում ենք՝

$$x=a+mt, \quad y=b+nt, \quad z=c+pt: \qquad (18)$$

Այդ արժեքները տեղադրելով չորրորդ հավասարման մեջ, ստանում ենք՝

$$A(a+mt)+B(b+nt)+C(c+pt)+D=0,$$

կամ՝

$$Aa+Bb+Cc+D+t(Am+Bn+Cp)=0,$$

որտեղից գտնում ենք՝

$$t=-\frac{Aa+Bb+Cc+D}{Am+Bn+Cp}: \qquad (19)$$

t-ի համար գտած այս արժեքը տեղադրելով (18) բանաձևերի մեջ, կստանանք (17) հարթության հետ (16) ուղիղի հատման կետի կոորդինատները:

Եթե

$$Am+Bn+Cp\neq0,$$

ապա (19) բանաձևով որոշվող t-ն ունի որոշակի արժեք. հետևաբար, այս դեպքում ուղիղը հարթությունը հատում է մեկ կետում։

Եթե

$$Am+Bn+Cp=0, \text{ բայց } Aa+Bb+Cc+D\neq 0,$$

ապա ուղիղը զուգահեռ է հարթությանը (առաջին պայմանի շնորհիվ), իսկ (a, b, c) կետը, որով անցնում է տված ուղիղը, գտնվում է հարթությունից դուրս (երկրորդ պայմանի շնորհիվ)․ հետևաբար, այս դեպքում ուղիղը հարթության հետ ընդհանուր կետ չունի։

Եթե, վերջապես՝

$$Am+Bn+Cp=0 \quad \text{և} \quad Aa+Bb+Cc+D=0,$$

ապա ուղիղը զուգահեռ է հարթությանը (առաջին պայմանի շնորհիվ) և անցնում է (a, b, c) կետով, որը գտնվում է տված հարթության վրա (երկրորդ պայմանի շնորհիվ)․ հետևաբար, այս դեպքում ուղիղն ամբողջովին գտնվում է տված հարթության մեջ։

§ 10. Երկու ուղիղների մեկ հարթության մեջ գտնվելու պայմանը: Տարածության մեջ երկու ուղիղներ, ընդհանրապես, մի հարթության մեջ կարող են և չգտնվել։ Տեսնենք, թե ի՞նչ պայմանի դեպքում տված՝

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1}$$

և

$$\frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{p_2}$$

երկու ուղիղները կգտնվեն մեկ հարթության մեջ։

Առաջին ուղիղի ուղղորդ վեկտորը նշանակենք s_1, երկրորդինը՝ s_2։ Ինչպես տված հավասարումներից երևում է, առաջին ուղիղն անցնում է (a_1, b_1, c_1) կետով․ այդ կետի շառավիղ-վեկտորը նշանակենք r_1։ Երկրորդ ուղիղն էլ անցնում է (a_2, b_2, c_2) կետով․ որա շառավիղ-վեկտորն էլ նշանակենք r_2։ (a_1, b_1, c_1) կետը (a_2, b_2, c_2) կետի հետ միացնող վեկտորը կլինի՝ r_2-r_1, իսկ դրա պրոյեկցիաները՝ a_2-a_1, b_2-b_1, c_2-c_1։

Երկրաչափական պատկերացումը պարզ ասում է, որ տված երկու ուղիղները կգտնվեն մեկ հարթության մեջ այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ s_1, s_2 և r_2-r_1 երեք վեկտորները կոմպլանար լինեն։ Հետևաբար, որոնելի պայմանը՝ այդ երեք վեկտորների խառն արտադրյալի զրոյի հավասար լինելն է (գլ. II, § 14), այն է՝

$$(r_2-r_1)s_1s_2=0$$։

Այս պայմանը գրելով պրոյեկցիաների միջոցով, կստանանք՝

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$$։

Դիտողություն։ Երկու ուղիղների մեկ հարթության մեջ գտնվելու պայմանը կարելի է արտածել, չդիմելով վեկտորական մեթոդին։ Դիցուք այն հարթությունը, որի մեջ գտնվում են տված երկու ուղիղները, ունի

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{20}$$

հավասարումը։ Առաջին ուղիղը (20) հարթության մեջ գտնվելու պայմանը § 9-ի համաձայն կլինի՝

$$Am_1+Bn_1+Cp_1=0, \quad Aa_1+Bb_1+Cc_1+D=0 \tag{21}$$

Նմանապես, երկրորդ ուղիղը (20) հարթության մեջ գտնվելու պայմանը կլինի՝

$$Am_2+Bn_2+Cp_2=0, \qquad Aa_2+Bb_2+Cc_2+D=0 \tag{21'}$$

(21)-ի և (21')-ի երկրորդ հավասարություններն իրարից հանելով, D-ն կարտաքսենք։ Դրա հետևանքով կստանանք A-ի, B-ի և C-ի նկատմամբ երեք գծային համասեռ հավասարումների սիստեմ, այն է՝

$$\left.\begin{aligned} A(a_2-a_1)+B(b_2-b_1)+C(c_2-c_1)=0, \\ Am_1+Bn_1+Cp_1=0, \\ Am_2+Bn_2+Cp_2=0 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Եթե այս հավասարումների սիստեմը զրոյականից տարբեր լուծում ունի, ապա (20) հարթությունը գոյություն ունի և, հետևաբար, տված երկու ուղիղները գտնվում են մեկ հարթության մեջ։ Հակառակ դեպքում այդպիսի հարթություն գոյություն չունի։

(22) սիստեմի համար զրոյական լուծումից տարբեր լուծման գոյության պայմանը կարելի է գրել սիստեմի դետերմինանտը զրոյի հավասարեցնելու միջոցով (1-ին մաս, գլ. VI, § 6), այն է՝

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0։$$

Օ ր ի ն ա կ 1. *Կազմել այն ուղիղի հավասարումները, որն անցնում է (1, 1, 1) կետով և հատում է տված*

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3} \quad \text{և} \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$$

երկու ուղիղները։

(1, 1, 1) կետով անցնող ուղիղի հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{x-1}{m}=\frac{y-1}{n}=\frac{z-1}{p}։$$

Այս ուղիղի և տված ուղիղներից առաջինի մեկ հարթության մեջ գտնվելու պայմանը կլինի՝

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0, \text{ կամ՝ } m-2n+p=0։$$

Որոնելի ուղիղի և տված ուղիղներից երկրորդի մեկ հարթության մեջ գտնվելու պայմանը կլինի՝

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0, \text{ կամ՝ } 2m+4n-2p=0,$$

որը, 2-ով կրճատելուց հետո, կդառնա՝

$$m+2n-p=0։$$

Մնում է ստացած $m-2n+p=0$ *և* $m+2n-p=0$ *երկու հավասարումներից որոշել* $m:n:p$ *հարաբերությունները։ Այդ հավասարումներից յուրաքանչյուրը բաժանելով* p*-ի և գտնելով* $\frac{m}{p}$ *ու* $\frac{n}{p}$ *անհայտները, կստանանք՝*

$$\frac{m}{p}=0, \quad \frac{n}{p}=\frac{1}{2}, \text{ այսինքն՝ } m:n:p=0:1:2։$$

Որոնելի ուղիղի հավասարման մեջ, m*-ի,* n*-ի,* p*-ի փոխարեն դնելով* համապատասխանորեն՝ 0, 1, 2 թվերը, կստանանք այն ուղիղի հավասարումները վերջնական տեսքով, որն անցնում է (1, 1, 1) կետով և առաջին ուղիղի հետ միասին գտնվում է մեկ հարթության մեջ ու երկրորդ ուղիղի հետ միասին՝ մեկ (ուրիշ) հարթության մեջ, այն է՝

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}։$$

Հեշտ է ստուգել, որ այդ ուղիղն իսկապես հատվում է տված երկու ուղիղներից յուրաքանչյուրի հետ[1]։

Օ ր ի ն ա կ 2. Կազմել այն ուղիղի հավասարումները, որն անցնում է (1, 1, 1) կետով, հատում է

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$

ուղիղը և ուղղահայաց է

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$$

ուղիղին։

Որոնելի ուղիղի հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{x-1}{m}=\frac{y-1}{n}=\frac{z-1}{p},$$

որտեղ $m:n:p$ հարաբերությունները որոշվում են

$$m-2n+p=0, \quad 2m+n+4p=0$$

պայմաններից, որոնցից առաջինը՝ որոնելի ուղիղը և տված առաջին ուղիղը մեկ հարթության մեջ գտնվելու պայմանն է (տե՛ս օրինակ 1), իսկ երկրորդը՝ որոնելի ուղիղի և տված երկրորդ ուղիղի ուղղահայացության պայմանը։ Այդ երկու պայմաններից գտնում ենք՝

$$m:n:p=9:2:(-5)։$$

Որոնելի ուղիղի հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{x-1}{9}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-5}։$$

---

[1] Ընդհանրապես ասած, այլ թվային տվյալների դեպքում կարող է պատահել, որ ցույց տրված եղանակով գտած ուղիղը զուգահեռ լինի տրված ուղիղներից մեկին կամ նույնիսկ երկուսին էլ։ Այդպիսի դեպքում մենք կեզրակացնենք, որ չկա այնպիսի ուղիղ, որն անցնի տված կետով և հատի տված երկու ուղիղները։

Վարժություններ

ՈՒՂԻՂ ԳԻԾ

1. Ցույց տալ հետևյալ ուղիղների դասավորության առանձնահատկությունները՝

ա) $\begin{cases} Ax+By+Cz=0, \\ A_1x+B_1y+C_1z=0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} Ax+D=0, \\ B_1y+D_1=0; \end{cases}$ գ) $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ B_1y+D_1=0; \end{cases}$

դ) $\begin{cases} By+Cz+D=0, \\ B_1y+C_1z+D_1=0; \end{cases}$ ե) $\begin{cases} Ax+Cz=0, \\ A_1x+C_1z=0; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} 3y+2z=0, \\ 5x-1=0; \end{cases}$

է) $\begin{cases} 2x+3y-7z-5=0, \\ 4x+3y-7z-5=0\text{։} \end{cases}$

2*. D ազատ անդամի ինչպիսի՞ արժեքի դեպքում

$$3x-y+2z-6=0, \quad x+4y-z+D=0$$

ուղիղը կհատի Oz առանցքը։

3*. B և D գործակիցների ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում

$$x-2y+z-9=0, \quad 3x+By+z+D=0$$

ուղիղը կգտնվի xOy հարթության մեջ։

4. Ինչպիսի՞ պայմանների պետք է բավարարեն ուղիղի

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

հավասարումների գործակիցները, որպեսզի ուղիղը՝

ա) անցնի կոորդինատների սկզբնակետով, բ) զուգահեռ լինի Ox առանցքին, գ) հատի Oy առանցքը, դ) համընկնի Oz առանցքի հետ։

5. Որոշել արդյոք A(5, —2, —3) և B(8, 3, 1) կետերը գտնվու՞մ են

$$5x-3y-31=0, \quad 3x+4y+7z+14=0$$

ուղիղի վրա։

6. Ստուգել, որ նախորդ խնդրի երկու հավասարումներից արտաքսելով՝ ա) y կոորդինատը, բ) x կոորդինատը, երկու դեպքում էլ կստանանք այնպիսի հարթության հավասարում, որն անցնում է A կետով, բայց չի անցնում B կետով։

7*. Տրված է

$$2x-3y+4z-12=0, \quad x+4y-2z-10=0$$

ուղիղը։ Գտնել այն հարթությունների հավասարումները, որոնք այդ ուղիղը պրոյեկտում են կոորդինատային հարթությունների վրա։

8. Տրված է

$$3x+2y-4z-5=0, \quad 6x-y-2z+4=0$$

ուղիղը։ Գտնել կոորդինատային հարթությունների վրա այդ ուղիղի պրոյեկցիաների հավասարումները։

9*. Գտնել

$$x+y-z-1=0, \quad x-y+z+1=0$$

ուղիղի պրոյեկցիան $x+y+z=0$ հարթության վրա։

10. Գտնել

$$2x+3y+4z+5=0, \quad x-6y+3z-7=0$$

ուղիղի պրոյեկցիան $2x+2y+z-15=0$ հարթության վրա։

11. Որոշել հետևյալ ուղիղների ուղղորդ կոսինուսները՝

ա) $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-3}{-12}=\dfrac{z-1}{3}$, բ) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-8}{-2}$։

12. Հետևյալ ուղիղների հավասարումները բերել կանոնական տեսքի՝

ա) $\begin{cases} x=3z-5, \\ y=2z-8; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x=2z-5, \\ y=6z+7; \end{cases}$ գ) $\begin{cases} y=4, \\ z=3x+12 \end{cases}$։

13. Գտնել հետևյալ ուղիղներով կազմված անկյունները՝

$$L_1 \begin{cases} y=2x-7, \\ z=2x+5; \end{cases} \qquad L_2 \begin{cases} y=\dfrac{3}{2}x+8, \\ z=3x; \end{cases} \qquad L_3 \begin{cases} y=6, \\ z=\dfrac{15}{8}x+6 \end{cases}$$

14. Որոշել հետևյալ ուղիղի ուղղորդ կոսինուսները՝

$$x+2y-z-2=0, \quad x+y-3z-7=0$$

15. Գտնել հետևյալ ուղիղի ուղղորդ կոսինուսները՝

$$x+y-z=0, \quad x-y+2=0$$

16. Գտնել հետևյալ երկու ուղիղներով կազմված անկյունը՝

$$\begin{cases} 2x-2y-z+8=0, \\ x+2y-2z+1=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x+y+3z-21=0, \\ 2x+2y-3z+15=0 \end{cases}$$

17. Տված $(2, -3, -8)$ կետով տանել ուղիղ, որը զուգահեռ լինի՝ ա) Oz առանցքին, բ) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-3}{5}$ ուղիղին։

18. Կազմել $(3, -2, -1)$ և $(5, 4, 5)$ կետերով անցնող ուղիղի հավասարումները։

19. Գտնել կոորդինատների սկզբնակետով և (a, b, c) *կետով անցնող ուղիղի հավասարումները։*

20. Ստուգել, արդյոք հետևյալ ուղիղները գտնվում են մեկ հարթության մեջ՝

ա) $\begin{cases} x=7z-17, \\ y=3z-1; \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x=4z-11, \\ y=-10z+25; \end{cases}$

բ) $\begin{cases} 4x+y+3z=0, \\ 2x+3y+2z-9=0; \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 3x-2y+z+5=0, \\ x-3y-2z-3=0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x+2y-z-2=0, \\ x+3y+z-1=0; \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 2x-y+3z-4=0, \\ 3x+y-z-3=0։ \end{cases}$

21. Գտնել այն ուղիղի հավասարումները, որն անցնում է (—3, 5, —9) կետով, հատում է հետևյալ ուղիղները.

$$\begin{cases} y=3x+5, \\ z=2x-3, \end{cases} \qquad \begin{cases} y=4x-7, \\ z=5x+10։ \end{cases}$$

22. Կազմել այն ուղիղի հավասարումները, որն անցնում է (1, 2, 3) կետով, հատում է Oz *առանցքը և ուղղահայաց է* $x=y=z$ *ուղիղին։*

23. Գտնել այն ուղիղի հավասարումները, որը հատում է

$$\begin{cases} x=3z-1, \\ y=2z-3 \end{cases} \quad \text{ու} \quad \begin{cases} y=2x-5, \\ z=7x+2 \end{cases}$$

երկու ուղիղները և երկուսին էլ ուղղահայաց է։

24. (7, 3, 5) կետով տանել մի ուղիղ, որի ուղղորդ կոսինուսները լինեն $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$*։ Գտնել նաև այն ուղիղի հավասարումները, որը հատում է այդ ուղիղը, անցնում է (2, —3, —1) կետով և* Ox *առանցքի հետ կազմում է 60° անկյուն։*

25. Գտնել այն ուղիղի հավասարումները, որն անցնում է (a, b, c) *կետով և հատում է հետևյալ ուղիղները՝*

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1}, \qquad \frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{p_2}։$$

26. Գտնել այն ուղիղի հավասարումները, որն անցնում է (a, b, c) *կետով, հատում է* Oz *առանցքը և ուղղահայաց է հետևյալ ուղիղին՝*

$$\frac{x}{m_1}=\frac{y}{n_1}=\frac{z}{p_1}։$$

27. Գտնել այն ուղիղի հավասարումները, որը հատում է հետևյալ երկու ուղիղները և երկուսին էլ ուղղահայաց է՝

$$\begin{cases} x=mz+a, \\ y=nz+b, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=m_1z+a_1, \\ y=n_1z+b_1 \end{cases}$$

ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ՈՒՂԻՂ ԳԻԾ

28. Գտնել

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

ուղիղի և $2x+3y+3z-8=0$ հարթության հատման կետի կոորդինատները։

29. Գտնել

$$\begin{cases} y=-2x+9, \\ z=9x-43 \end{cases}$$

ուղիղի և $3x-4y+7z-33=0$ հարթության հատման կետի կոորդինատները։

30. Գտնել $6x+15y-10z+31=0$ հարթության հետ

$$3x-2y=24, \qquad 3x-z=-4$$

ուղիղի կազմած անկյունը։

31. Գտնել (1, 2, 3) կետից հետևյալ հարթության վրա իջեցրած ուղղահայացի հավասարումները՝

ա) $4x-5y-8z+21=0$, բ) $3x+11y=0$, գ) $z=8$։

32. (3, −2, −1) կետով տանել հարթություն, որն ուղղահայաց լինի հետևյալ ուղիղին՝

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{3}.$$

33. Գտնել $A(1, 2, 3)$ կետի կարճագույն հեռավորությունը հետևյալ ուղիղից

$$x+y-z=1, \quad 2x+z=3.$$

34*. Գտնել կարճագույն հեռավորությունը հետևյալ երկու ուղիղների միջև

$$\begin{cases} x+y-z=1, \\ 2x+z=3 \end{cases} \quad \text{և} \quad x=y=z-1.$$

35. Ի՞նչ արժեք պետք է ունենա p գործակիցը, որպեսզի

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-8}=\frac{z-2}{p}$$

ուղիղը զուգահեռ լինի $3x-4y+7z-33=0$ հարթությանը։

36. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $(-1,\ -2,\ 3)$ կետով և զուգահեռ է հետևյալ ուղիղներին՝

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z-5}{6}, \qquad \frac{x}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-8}։$$

37. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $(2,\ -3,\ 1)$ կետով և հետևյալ ուղիղով՝

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{2}։$$

38. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է

$$x+y=0, \quad x-y+z-2=0$$

ուղիղով և զուգահեռ է $x=y=z$ ուղիղին։

39. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$$

ուղիղով և զուգահեռ է $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$ ուղիղին։

40. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{3} \quad \text{և} \quad \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{3}$$

զուգահեռ ուղիղներով։

41. $(-1,\ 0,\ 4)$ կետով տանել $3x-4y+z-10=0$ հարթությանը զուգահեռ ուղիղ այնպես, որպեսզի նա հատի հետևյալ ուղիղը՝

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}։$$

42. Կազմել այն բոլոր ուղիղների երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք անցնում են կոորդինատների սկզբնակետով և ուղղահայաց են $x=y=z$ ուղիղին։

43. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $(a,\ b,\ c)$

կետով և զուգահեռ է $(m_1\ n_1\ p_1)$ և $(m_2\ n_2\ p_2)$ ուղղորդ գործակիցներ ունեցող ուղիղներին։

44. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $(a. b, c)$ կետով և հետևյալ ուղիղով՝

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1}.$$

45. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

ուղիղով և զուգահեռ է հետևյալ ուղիղին.

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}.$$

46. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$$

ուղիղով և զուգահեռ է հետևյալ ուղիղին՝

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1}.$$

47. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է

$$\frac{x-a_1}{m}=\frac{y-b_1}{n}=\frac{z-c_1}{p} \quad \text{և} \quad \frac{x-a_2}{m}=\frac{y-b_2}{n}=\frac{z-c_2}{p}$$

երկու զուգահեռ ուղիղներով։

48. (a, b, c) կետով տանել $Ax+By+Cz+D=0$ հարթությանը զուգահեռ ուղիղ այնպես, որպեսզի նա հատի հետևյալ ուղիղը՝

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1}.$$

49. Կազմել այն բոլոր ուղիղների երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք անցնում են (a, b, c) կետով և ուղղահայաց են

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$$

ուղիղին։

ԳԼՈՒԽ VI

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԵՎ ԿՈՆԱԿԱՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐ: ՊՏՏՄԱՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐ: 2-ՐԴ ԿԱՐԳԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐ

§ 1. **Մակերևույթների դասակարգումը:** *Ինչպես և գծերը հարթության վրա, մակերևույթները նույնպես բաժանվում են* հանրահաշվական մակերևույթների *և* տրանսցենդենտ մակերևույթների՝ *ըստ իրենց հավասարումների բնույթի դեկարտյան կոորդինատային սիստեմում: Հանրահաշվական մակերևույթի հավասարումը ձևափոխություններից հետո կարող է բերվել*

$$F(x,\ y,\ z)=0$$

տեսքի, որտեղ հավասարման ձախ մասը x-ի, y-ի և z-ի նկատմամբ ամբողջ բազմանդամ է: x-ի, y-ի, z-ի նկատմամբ այդ բազմանդամի աստիճանով որոշվում է հանրահաշվական մակերևույթի կարգը: *Կարելի է ցույց տալ, որ մակերևույթի կարգը կախված չէ կոորդինատային առանցքների ընտրությունից: Մենք արդեն գիտենք, որ առաջին կարգի մակերևույթները հարթություններ են: Զբաղվելով 2-րդ կարգի մակերևույթների ընդհանուր հավասարման հետազոտությամբ, մենք ներկա գլխի §§ 5—11-ում կդիտարկենք այդպիսի մակերևույթների բոլոր հնարավոր տեսակները, ելնելով նրանց պարզագույն հավասարումներից:*

§§ 2—4-ը նվիրված են մի քանի՝ հաճախակի հանդիպող մակերևույթների հավասարումների քննարկմանը, ընդ որում այդ մակերևույթները կարող են լինել ինչպես հանրահաշվական, այնպես էլ տրանսցենդենտ:

§ 2. **Գլանային մակերևույթներ (ընդհանուր դեպքը):** *Մենք* III *գլխի § 5-ում դիտարկեցինք գլանային մակերևույթի հավասարումն այն մասնավոր դեպքում, երբ ծնիչները զուգահեռ* են կոորդինատային առանցքներից մեկին: Այժմ դիտարկենք ընդ-հանուր դեպքը:

Ինչպես արդեն ասվել է (գլ. III, § 5), գլանային մակերևույթ է կոչվում այն մակերևույթը, որն առաջանում է տրված ուղիղին զուգահեռ և տված L գիծը հատող ուղիղներով: Այդ ուղիղները կոչվում են գլանային մակերևույթի ծնիչներ, իսկ L գիծը՝ ուղղորդ գիծ:

Դիցուք գլանային մակերևույթի ուղղորդ գիծը որոշվում է հետևյալ հավասարումներով՝

$$F(x, y, z)=0, \quad F_1(x, y, z)=0: \tag{1}$$

Ենթադրենք, թե m-ը, n-ը, p-ն՝ գլանային մակերևույթի ծնիչների ուղղորդ գործակիցներն են, իսկ X-ը, Y-ը, Z-ը՝ այդ ծնիչներից որևէ մեկի ընթացիկ կետի կոորդինատները: Այդ դեպքում ծնիչների կանոնական հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{X-x}{m}=\frac{Y-y}{n}=\frac{Z-z}{p}, \tag{2}$$

որտեղ (x, y, z)-ը ուղղորդ գծին պատկանող կետ է: (1) և (2) չորս հավասարումներից արտաքսելով x-ը, y-ը, z-ը, կստանանք գլանային մակերևույթի որոնելի հավասարումը:

Օրինակ: Կազմել այն գլանային մակերևույթի հավասարումը, որի ծնիչները զուգահեռ են

$$x=y=z$$

ուղիղին, իսկ որպես ուղղորդ գիծ ծառայում է

$$x+y-z-1=0, \quad x-y+z=0$$

ուղիղը:

Ծնիչների կանոնական հավասարումները կլինեն

$$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{1}=\frac{Z-z}{1}:$$

Վերջին չորս հավասարումներից արտաքսենք x-ը, y-ը, z-ը: Վերջին հարաբերությունների արժեքը նշանակելով ρ, կգտնենք՝

$$x=X-\rho, \quad y=Y-\rho, \quad z=Z-\rho:$$

Այս արժեքները տեղադրելով ուղղորդ գծի հավասարումների մեջ, կստանանք՝

$$X+Y-Z-\rho-1=0, \quad X-Y+Z-\rho=0:$$

Վերջապես, արտաքսելով ρ-ն, կստանանք՝

$$2Y-2Z-1=0:$$

Ակներևորեն, այս այն հարթության հավասարումն է, որն անցնում է տվյալ ուղղորդ ուղիղով և զուգահեռ է $x=y=z$ ուղիղին։

§ **3. Կոնական մակերևույթներ։** Կոնական մակերևույթ (կամ կարճ՝ կոն) կոչվում է այն մակերևույթը, որն առաջանում է տված կետով անցնող և տված L գիծը հատող ուղիղներով։ Տված կետը կոչվում է *կոնական մակերևույթի* գագաթ, *տված L գիծը՝* ուղղորդ գիծ, *իսկ մակերևույթն առաջացնող ուղիղները՝* ծնիչներ։

Դիցուք կոնի ուղղորդ գիծն ունի

$$F(x, y, z)=0, \ F_1(x, y, z)=0 \qquad (3)$$

հավասարումները, իսկ գագաթը՝ (x_0, y_0, z_0) *կոորդինատները։ Կոնի ծնիչների, որպես տված* (x_0, y_0, z_0) *կետով և ուղղորդ գծի* (x, y, z) *կետով անցնող ուղիղների, կանոնական հավասարումները կլինեն՝*

$$\frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y-y_0}{y-y_0}=\frac{Z-z_0}{z-z_0}. \qquad (4)$$

(3) և (4) չորս հավասարումներից արտաքսելով x-*ը*, y-*ը*, z-*ը*, *կստանանք կոնական մակերևույթի որոնելի հավասարումը։ Այդ հավասարումն ունի մի շատ պարզ հատկություն՝ նա* $X-x_0$, $Y-y_0$, $Z-z_0$ *տարբերությունների նկատմամբ համասեռ է (այսինքն՝ նրա բոլոր անդամները միևնույն չափման են այդ տարբերությունների նկատմամբ)։ Իսկապես, նախ ենթադրենք, որ կոնի գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում* $(x_0=y_0=z_0=0)$*։ Դիցուք* X-*ը*, Y-*ը*, Z-*ը՝ կոնի ցանկացած կետի կոորդինատներն են. նրանք բավարարում են կոնի հավասարմանը։ Կոնի հավասարման մեջ* X-*ը*, Y-*ն ու* Z-*ը փոխարինելով* $\lambda X, \lambda Y, \lambda Z$ *արտադրյալներով, որտեղ* λ-*ն կամայական բազմապատկիչ է, հավասարումը պետք է բավարարվի, քանի որ դրանք այնպիսի կետի կոորդինատներ են, որը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետը* (X, Y, Z) *կետի հետ միացնող ուղիղի վրա, այսինքն՝ կոնի ծնիչի վրա։ Հետևաբար, կոնի հավասարումը չի փոխվի, եթե նրա մեջ բոլոր ընթացիկ կոորդինատները բազմապատկենք միևնույն* λ *թվով։ Այստեղից հետևում է, որ այդ հավասարումը պետք է համասեռ լինի ընթացիկ կոորդինատների նկատմամբ։*

Այն դեպքում, երբ կոնի գագաթը գտնվում է (x_0, y_0, z_0) *կետում, մենք կոորդինատների սկզբնակետը կփոխադրենք կոնի գագաթը և, ապացուցածի համաձայն, ձևափոխված հավասարումը համասեռ կլինի նոր կոորդինատների, այսինքն՝* $X-x_0$, $Y-y_0$,

$Z-z_0$ տարբերությունների նկատմամբ։

Օրինակ։ Կազմել այն կոնի հավասարումը, որի գագաթը կոորդինատների սկզբնակետն է, իսկ ուղղորդ գիծը՝ հետևյալ էլիպսը՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad z=c.$$

Կոնի $(0, 0, 0)$ գագաթով և ուղղորդ գծի (x, y, z) կետերով անցնող ծնիչների հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}.$$

Այս չորս հավասարումներից արտաքսենք x-ը, y-ը և z-ը. z-ը c-ով փոխարինելով, վերջին երկու հավասարումներից որոշենք x-ն ու y-ը՝

$$x=c\frac{X}{Z},\qquad y=c\frac{Y}{Z}.$$

Այս արժեքները տեղադրելով ուղղորդ գծի առաջին հավասարման մեջ, կունենանք՝

$$\frac{c^2}{a^2}\frac{X^2}{Z^2}+\frac{c^2}{b^2}\frac{Y^2}{Z^2}=1,$$

կամ՝

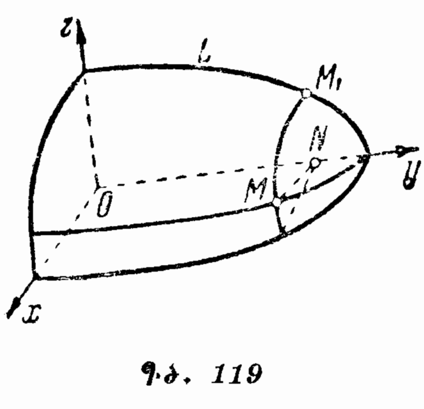
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0. \tag{5}$$

Երբ $a=b$, կոնական մակերևույթի ուղղորդ գիծը շրջանագիծ կլինի և կստանանք շրջանային կոն։

§ 4. **Պտտման մակերևույթներ։** Դիցուք yOz հարթության վրա տրված է մի L գիծ, որի հավասարումն է՝

$$F(Y, Z)=0.$$

Գտնենք այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է այդ գիծը Oy առանցքի շուրջը պտտելով (գծ. 119)։



Գծ. 119

Մակերևույթի վրա վերցնենք մի $M(x, y, z)$ կամայական կետ և այդ կետով տանենք պտտման Oy առանցքին ուղղահայաց հարթությունը։ Ակներևաբար, այդ հարթության և մեր մակերևույթի հատման գիծը կլինի մի շրջանագիծ, որի N կենտրոնը գտնվում է պտտման առանցքի վրա։ N կետի կոորդինատները կլինեն՝ $0, y, 0$։ Շրջանագծի MN շառավիղը, որպես N և M կետերի հեռավորություն, հավասար է $\sqrt{x^2+z^2}$։ Մյուս կողմից պարզ է, որ այդ շառավիղը տված L գծի այն M_1 կետի ապլիկատի բացարձակ մեծությունն է, որի օրդինատն y-ն է։ Հետևաբար, տված հավասարման մեջ ընդունելով՝

$$Y=y, \quad Z=\pm\sqrt{x^2+z^2}$$

(M_1 կետի կոորդինատները), մենք կստանանք պտտման մակերեվույթի որոնելի հավասարումը՝

$$F(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0։$$

Այսպիսով, մենք հանգում ենք հետևյալ կանոնին՝

yOz հարթության մեջ գտնվող L գիծը Oy առանցքի շուրջը պտտելով առաջացած մակերևույթի հավասարումն ստանալու համար պետք է այդ գծի հավասարման մեջ z-ը փոխարինել $\pm\sqrt{x^2+z^2}$-ով։

Նման կանոններ կստացվեն նաև այն մակերևույթների նըկատմամբ, որոնք ստացվում են հարթ կորը մյուս կոորդինատային առանցքների շուրջը պտտելով։

Օրինակ 1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

էլիպսը Ox առանցքի շուրջը պտտելով առաջացած մակերևույթի հավասարումը կլինի՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1։ \tag{6}$$

Եթե նույն էլիպսը պտտենք Oz առանցքի շուրջը, ապա այդպես առաջացող պտտման մակերևույթի հավասարումը կլինի՝

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1։ \tag{6'}$$

Եթե $a>c$, ապա առաջին դեպքում ունենք ձգված պտտման էլիպսոիդ, իսկ երկրորդ դեպքում՝ սեղմված պտտման էլիպսոիդ։ $a=c$ դեպքում ստանում ենք սֆերա։

Օրինակ 2. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

հիպերբոլը Ox առանցքի շուրջը պտտելով առաջացած մակերևույթի հավասարումը կլինի՝

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1։ \tag{7}$$

Սա՝ այսպես կոչված երկխոռոչ պտտման հիպերբոլոիդ է։

Եթե նույն հիպերբոլը պտտենք Oz առանցքի շուրջը, ապա՝ այդպիսով առաջացած պտտման մակերևույթի հավասարումը կլինի՝

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1: \tag{7'}$$

Սա էլ, այսպես կոչված, միախոռոչ պտտման հիպերբոլոիդ է:

Օրինակ 3. $y^2=2pz$

պարաբոլը Oz *առանցքի շուրջը պտտելով առաջացած մակերևույթի հավասարումը կլինի՝*

$$x^2+y^2=2pz: \tag{8}$$

Սա՝ այսպես կոչված, պտտման պարաբոլոիդ է:

§ **5. Էլիպսոիդ:** *Նախորդ պարագրաֆում մենք տեսանք, որ*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

էլիպսը Oz *առանցքի շուրջը պտտելով առաջացած մակերևույթի հավասարումը կլինի՝*

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1:$$

Այս հավասարումով որոշվող մակերևույթն անվանում են պտտման էլիպսոիդ: *Այդ էլիպսոիդը հատելով* xOy *հարթությանը զուգահեռ* $z=h(|h|\leqslant c)$ *հարթությամբ, կստանանք շրջանագիծ, որի հավասարումները կլինեն՝*

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \quad z=h \tag{9}$$

և որի շառավիղը հավասար է $a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$: *Հետևաբար,* h-*ը փոփոխելով* $-c$-*ից մինչև* $+c$, *(9) շրջանագիծը գծում է պտտման էլիպսոիդը:*

Այժմ (9) շրջանագծի փոխարեն վերցնենք

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \quad z=h \tag{10}$$

էլիպսը, որը գտնվում է xOy *հարթությանը զուգահեռ* $z=h$ *հարթության մեջ և որի կիսառանցքներն են՝*

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}} \quad \text{և} \quad b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}: \tag{11}$$

h-*ը փոփոխելով* $-c$-*ից մինչև* $+c$, *այդ էլիպսը կգծի մի մակերևույթ, որի հավասարումը կստանանք, եթե (10) երկու հավասա-*

րումներից արտաքսենք h-ը․ առաջին հավասարման մեջ տեղադրելով h=z, կստանանք՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}, \quad \text{կամ՝} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1: \qquad \text{(I)}$$

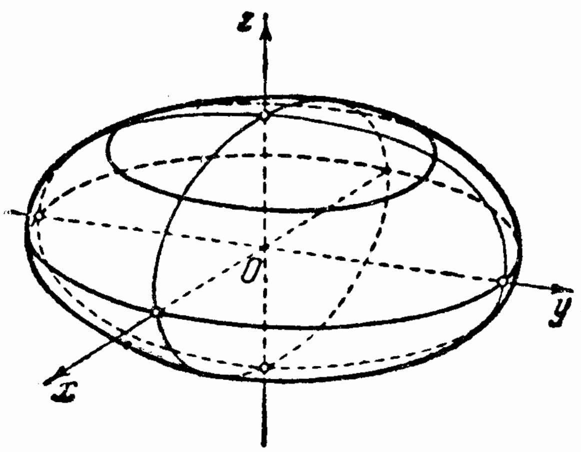
(I) հավասարումով որոշվող 2-րդ կարգի մակերևույթը կոչվում է էլիպսոիդ, իսկ a, b, c մեծությունները՝ էլիպսոիդի կիսաառանցքներ:

Էլիպսոիդը հատելով z=0, y=0, x=0 կոորդինատային հարթություններով, կստանանք էլիպսներ՝

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0,\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0,\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0:\end{cases} \qquad (12)$$

Ինչպես տեսանք, էլիպսոիդը հատելով xOy հարթությանը զուգահեռ z=h հարթությամբ, ստանում ենք (10) էլիպսը՝ (11) կիսաառանցքներով: h-ը −c-ից մինչև +c փոփոխելիս, այդ կիսաառանցքները փոփոխվում են, համեմատական մնալով xOy հարթության մեջ գտնվող էլիպսի a և b կիսաառանցքներին (գծ. 120): Համեմատական կիսաառանցքներ ունեցող երկու էլիպսները կոչվում են նման էլիպսներ: Այսպիսով, էլիպսոիդը կարելի է դիտել որպես այնպիսի մակերևույթ, որն առաջացել է ինքն իրեն նման մնացող մի էլիպսի շարժումով, որի հարթությունը մնում է xOy հարթությանը զուգահեռ և որի առանցքների ծայրերը սահում են xOz և zOy հարթությունների մեջ գտնվող (12) էլիպսների վրայով:

Ընդհանրությունը չնվազեցնելով, կարող ենք համարել $a \geqslant b \geqslant c$: Եթե $a=b=c$, ապա (I) հավասարումը սֆերա է որոշում. եթե $a>b=c$, ապա (I) հավասարումը որոշում է ձգված պտտման էլիպսոիդ՝ Ox պտտման առանցքով: Եթե $a=b>c$, ապա (I) հավասարումը որոշում է սեղմված պտտման էլիպսոիդ Oz պտտման առանցքով: Իսկ եթե a, b և c թվերի մեջ միմյանց հավասարները չկան, ապա էլիպսոիդը կոչվում է եռառանցք էլիպսոիդ: (I) հավասարումը պարունակում է կոորդինատների միայն քառակուսիները, հետևաբար, էլիպսոիդը սիմետրիկ է կոորդինատնե-



Գծ. 120

րի սկզբնակետի նկատմամբ, իսկ կոորդինատային հարթությունները՝ նրա սիմետրիայի հարթություններն են, որովհետև, եթե որևէ $M(x, y, z)$ կետ գտնվում է էլիպսոիդի վրա, ապա $(\pm x, \pm y, \pm z)$ կետերը ևս գտնվում են այդ էլիպսոիդի վրա՝ կոորդինատների նշանների ցանկացած ընտրության դեպքում։

§ 6. Միախոռոչ հիպերբոլոիդ։ *Ինչպես § 4-ում տեսանք,*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

հիպերբոլը Oz առանցքի շուրջը պտտելով առաջացած մակերևույթի հավասարումը կլինի՝

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1։$$

Այս հավասարումով որոշվող մակերևույթը կոչվում է **պտտման միախոռոչ հիպերբոլոիդ։** Այդ մակերևույթը հատելով xOy հարթությանը զուգահեռ $z=h$ հարթությամբ, կստանանք շրջանագիծ, որի հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=1+\frac{h^2}{c^2}, \quad z=h, \tag{13}$$

իսկ շառավիղը հավասար է $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$։ Հետևաբար, h-ը $-\infty$-ից մինչև $+\infty$ փոփոխվելիս, (13) շրջանագիծը գծում է պտտման միախոռոչ հիպերբոլոիդը։

Այժմ (13) շրջանագծի փոխարեն վերցնենք

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}, \quad z=h \tag{14}$$

էլիպսը, որը գտնվում է xOy հարթությանը զուգահեռ $z=h$ հարթության մեջ և ունի

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} \quad \text{և} \quad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} \tag{15}$$

կիսաառանցքները։ h-ը $-\infty$-ից մինչև $+\infty$ փոփոխվելիս, այս էլիպսը գծում է մի մակերևույթ, որի հավասարումը կստանանք, եթե h-ն արտաքսենք (14) երկու հավասարումներից. առաջինի մեջ տեղադրելով $h=z$, կստանանք՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2}, \quad \text{կամ՝} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1։ \tag{II}$$

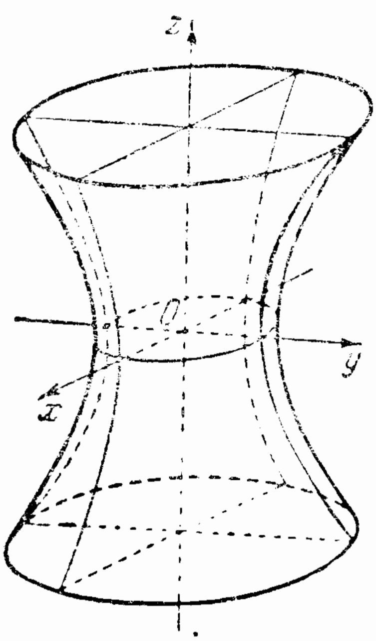
(II) հավասարումով որոշվող 2-րդ կարգի մակերևույթը կոչվում է **միախոռոչ հիպերբոլոիդ**, իսկ a, b, c մեծությունները՝ նրա կիսառանցքները:

(II) մակերևույթը հատելով $z=0$, $y=0$, $x=0$ կոորդինատային հարթություններով, հատույթում կստանանք համապատասխանորեն, էլիպս և երկու հիպերբոլներ հետևյալ հավասարումներով՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0;$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=0;\ \ \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=0: \tag{16}$$

Ինչպես շարադրվածից բխում է, հիպերբոլոիդը հատելով xOy հարթությանը զուգահեռ $z=h$ հարթությամբ, հատույթում ստացվում է (14) էլիպսը, որի կիսառանցքներն են (15)-ը: h-ը $-\infty$-ից մինչև $+\infty$ փոփոխելիս, այդ կիսառանցքները փոփոխվում են, համեմատական մնալով xOy հարթության մեջ գտնվող էլիպսի a և b կիսառանցքներին. այսպիսով, մենք կարող ենք միախոռոչ հիպերբոլոիդը դիտել որպես այնպիսի էլիպսի շարժումով առաջացած մակերևույթ, որի հարթությունը մնում է զուգահեռ xOy հարթությանը, իսկ առանցքների ծայրերը սահում են xOz և yOz հարթություններում գտնվող (16) հիպերբոլների վրայով, ընդ որում շարժման ժամանակ էլիպսը մնում է ինքն իրեն նման (գծ. 121):



Գծ. 121

Եթե $a=b$, ապա (II) հավասարումը որոշվում է պտտման միախոռոչ հիպերբոլոիդ Oz պտտման առանցքով:

(II) հավասարումը պարունակում է կոորդինատների միայն քառակուսիները. այստեղից հետևում է, որ միախոռոչ հիպերբոլոիդը սիմետրիկ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, իսկ կոորդինատային հարթությունները նրա համար սիմետրիայի հարթություններն են:

§ **7. Երկխոռոչ հիպերբոլոիդ:** Պտտման երկխոռոչ հիպերբոլոիդ մենք կստանանք, եթե

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

հիպերբոլը պտտենք Oz առանցքի շուրջը։ Նրա հավասարումը կլինի (գլ. VI, § 4)՝

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2+y^2}{a^2}=1\text{։}$$

Այս մակերևույթը հատելով Oz պտտման առանցքին ուղղահայաց $z=h$ $(|h|\geqslant c)$ հարթությամբ, հատույթում կստանանք շրջանագիծ, որի հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=\frac{h^2}{c^2}-1,\ z=h. \tag{17}$$

իսկ շառավիղը հավասար է՝

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\text{։} \tag{18}$$

h-ը c-ից մինչև $+\infty$ փոփոխելիս, (17) շրջանագիծը գծում է հիպերբոլոիդի մեկ խոռոչը, իսկ $-c$-ից մինչև $-\infty$ փոփոխելիս՝ մյուս խոռոչը։

Այժմ (17) շրջանագծի փոխարեն վերցնենք

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1,\quad z=h \tag{19}$$

էլիպսը, որը գտնվում է xOy հարթությանը զուգահեռ $z=h$ հարթության մեջ և որի կիսառանցքներն են՝

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\ \text{և}\ b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\text{։} \tag{20}$$

h-ը $-\infty$-ից մինչև $-c$ և $+c$-ից մինչև $+\infty$ փոփոխելիս, այդ էլիպսը գծում է մի երկխոռոչ մակերևույթ, որի հավասարումը կստանանք, եթե (19) հավասարումներից արտաքսենք h-ը. առաջին հավասարման մեջ տեղադրելով $h=z$, կստանանք՝

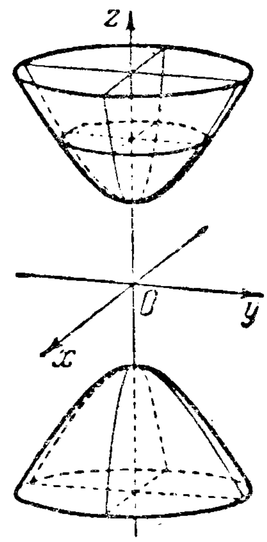
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1,\ \text{կամ՝}\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\text{։} \tag{III}$$

(III) հավասարումով որոշվող 2-րդ կարգի մակերևույթը կոչվում է երկխոռոչ հիպերբոլոիդ, իսկ a, b, c մեծությունները՝

նրա կիսառանցքներ: *Այդ մակերևույթը հատելով* $z=0$, $y=0$, $x=0$ *հարթություններով, հատույթում կստանանք, համապատասխանորեն, կեղծ տեղ և երկու հիպերբոլներ հետևյալ հավասարումներով՝*

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,\ y=0;\ \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ x=0։ \qquad (21)$$

Ինչպես արդեն ասացինք, հիպերբոլոիդը հատելով xOy *հարթությանը զուգահեռ* $z=h$ *հարթությամբ, հատույթում ստացվում է (19) էլիպսը (20) կիսառանցքներով, երբ* $|h|\geqslant c$։ *Այստեղից հետևում է, որ երկխոռոչ հիպերբոլոիդը կարող ենք դիտել որպես այնպիսի էլիպսի շարժումով առաջացած մակերևույթ, որի հարթությունը մնում է զուգահեռ* xOy *հարթությանը, իսկ առանցքների ծայրերը սահում են* xOz *և* yOz *հարթություններում գտնվող (21) հիպերբոլների վրայով, ընդ որում շարժման ժամանակ էլիպսը մնում է ինքն իրեն նման (գծ. 122)։*



Գծ. 122

Երկխոռոչ հիպերբոլոիդը սիմետրիկ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, իսկ կոորդինատային հարթությունները նրա համար սիմետրիայի հարթություններ են։

$a=b$ *դեպքում* (III) *հավասարումը որոշում է պտտման երկխոռոչ հիպերբոլոիդ՝* Oz *պտտման առանցքով։*

§8. Էլիպսական պարաբոլոիդ: Պտտման պարաբոլոիդն *ստացվում է*

$$y^2=2pz$$

պարաբոլը պտտելով Oz *առանցքի շուրջը։ Նրա հավասարումը կլինի (գլ.* VI, §4*)՝*

$$x^2+y^2=2p\,z։$$

Այս մակերևույթը հատելով Oz *պտտման առանցքին ուղղահայաց* $z=h$ $(h\geqslant 0)$ *հարթությամբ, հատույթում ստացվում է մի շրջանագիծ, որի հավասարումներն են՝*

$$x^2+y^2=2p\,h,\ z=h, \qquad (22)$$

իսկ շառավիղը հավասար է՝

$$\sqrt{2ph}։ \qquad (23)$$

Հետևաբար, h-ը 0-ից մինչև $+\infty$ փոփոխելիս, (22) շրջանագիծը գծում է պտտման պարաբոլոիդը։

Այժմ (22) շրջանագծի փոխարեն վերցնենք

$$\frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh}=1,\ z=h \tag{24}$$

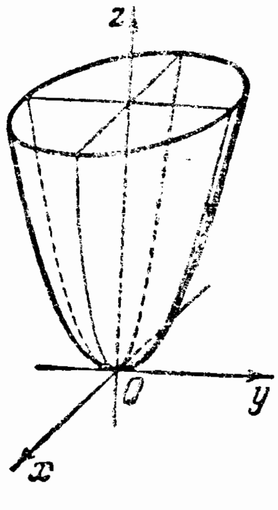
էլիպսը (p, q, h-ը՝ դրական թվեր են), որը գտնվում է xOy հարթությանը զուգահեռ $z=h$ հարթության մեջ և որի կիսաառանցքներն են՝

$$\sqrt{2ph} \text{ և } \sqrt{2qh}. \tag{25}$$

h-ը 0-ից մինչև $+\infty$ փոփոխվելիս, այդ էլիպսը գծում է մի 2-րդ կարգի մակերևույթ, որն անվանում են **էլիպսական պարաբոլոիդ**. այդ մակերևույթի հավասարումը կստանանք, եթե (24) երկու հավասարումներից h-ը արտաքսենք. առաջինի մեջ տեղադրելով $h=z$, կստանանք՝

$$\frac{x^2}{2pz}+\frac{y^2}{2qz}=1, \text{ կամ՝ } \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z. \tag{IV}$$

Այդ մակերևույթը հատելով $z=0$, $y=0$, $x=0$ կոորդինատային հարթություններով, հատույթում կստանանք, համապատասխանորեն, կետ և երկու պարաբոլներ հետևյալ հավասարումներով՝



Գծ. 123

$$x^2=2pz,\ y=0;\ y^2=2qz,\ x=0. \tag{26}$$

Շարադրածից հետևում է, որ էլիպսական պարաբոլոիդը կարելի է դիտել որպես այնպիսի էլիպսի շարժումով առաջացած մակերևույթ, որը շարժման ժամանակ մնում է ինքն իրեն նման և որի առանցքների ծայրերը սահում են (26) պարաբոլների վրայով, ընդ որում էլիպսի հարթությունը մնում է զուգահեռ xOy հարթությանը (գծ. 123)։

(IV) հավասարումը պարունակում է x և y կոորդինատների միայն քառակուսիները, հետևաբար, xOz և yOz հարթությունները մակերևույթի համար սիմետրիայի հարթություններ են։ $p=q$ դեպքում (IV) հավասարումը որոշում է պտտման պարաբոլոիդ՝ Oz պտտման առանցքով։

§ 9. Հիպերբոլական պարաբոլոիդ։ Հիպերբոլական պարաբոլոիդի պարզագույն հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\ q>0), \tag{V}$$

որը (IV) հավասարումից տարբերվում է միայն y^2-ու մոտ դըրված նշանով։

xOz կոորդինատային հարթությունն այդ մակերևույթը հատում է

$$x^2=2pz \tag{27}$$

պարաբոլով, որի համար Oz առանցքը սիմետրիայի առանցք է, և որը գտնվում է Oz առանցքի դրական ուղղության կողմում։

yOz հարթությանը զուգահեռ $x=h$ հարթությունը (V) մակերևույթը հատում է մի պարաբոլով, որի հավասարումներն են՝

$$\left.\begin{aligned} & y^2=-2qz+\frac{qh^2}{p}, \\ & x=h, \end{aligned}\right\}$$

կամ՝

$$\left.\begin{aligned} & y^2=-2q\left(z-\frac{h^2}{2p}\right), \\ & x=h։ \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

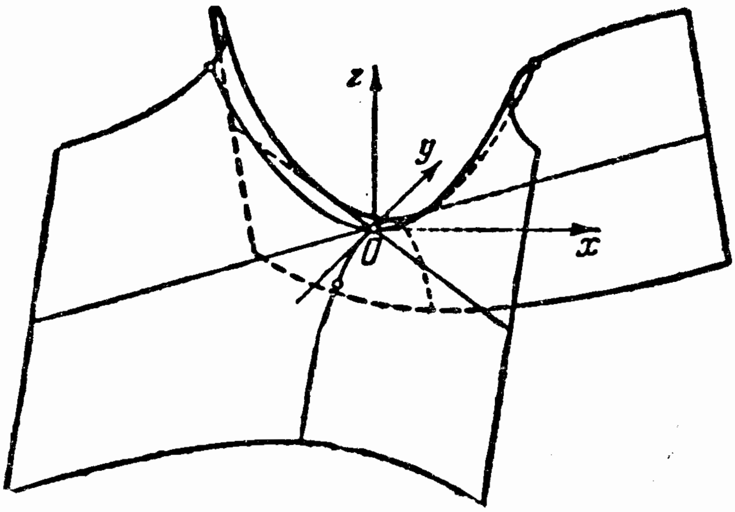
Այս հավասարումներից երևում է, որ $x=h$ հարթություններում գտնվող այդ պարաբոլներն ունեն միևնույն q պարամետրը, նրանց սիմետրիայի առանցքները գտնվում են xOz հարթության մեջ և զուգահեռ են Oz առանցքին, պարաբոլների ճյուղերն ուղղված են դեպի ներքև (Oz առանցքի բացասական ուղղությամբ), իսկ գագաթներն ունեն $z=\frac{h^2}{2p}$ ապլիկատները։ Քանի որ xOz հարթության մեջ գտնվող (27) պարաբոլի հավասարումից նույնպես $x=h$ դեպքում z-ի համար ստացվում է նույն $\frac{h^2}{2p}$ արժեքը, ապա այստեղից եզրակացնում ենք, որ (28) պարաբոլների գագաթները դասավորված են (27) պարաբոլի վրա (գծ. 124)։

Այսպիսով, (V) հիպերբոլական պարաբոլոիդը կարելի է դիտել որպես այնպիսի պարաբոլի շարժումով առաջացած մակերևույթ, որի սիմետրիայի առանցքը մնում է xOz հարթության մեջ, իսկ գագաթը շարժվում է (27) պարաբոլի վրայով, ընդ որում պարաբոլի հարթությունը մնում է զուգահեռ yOz հարթությանը։

(V) հիպերբոլական պարաբոլոիդը հատելով z=h հարթությամբ, հատույթում կստանանք մի հիպերբոլ, որի հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2h, \quad z=h։$$

$h>0$ դեպքում հիպերբոլի իրական սիմետրիայի առանցքը զուգահեռ կլինի Ox առանցքին, իսկ $h<0$ դեպքում՝ Oy առանցքին։



Գծ. 124

xOy հարթությունը, հատվելով (V) մակերևույթի հետ, հատույթում տալիս է

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0, \quad z=0$$

գիծը, որի առաջին հավասարումը տրոհվում է երկու հավասարումների՝

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0, \quad z=0$$

և

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0, \quad z=0,$$

հետևաբար, այդ հատույթը իրենից ներկայացնում է մի զույգ հատվող ուղիղներ։ z=0 հարթության հետ հատման այդ ուղիղները կարծես թե ծառայում են որպես անցման գծեր՝ հիպերբոլների մի ընտանիքից (որոնք ստացվում են մակերևույթը հատելով $z=h$ հարթությամբ, երբ $h>0$) դեպի մյուս ընտանիքը (երբ $h<0$) անցնելու համար:

Քանի որ (V) հավասարումը պարունակում է x և y կոորդինատների միայն քառակուսիները, ուստի xOz և yOz հարթությունները մակերևույթի համար սիմետրիայի հարթություններ են:

§ **10. 2-րդ կարգի կոն:** VI գլխի § 3-ում մենք կազմեցինք այն կոնի հավասարումը, որի գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, իսկ ուղղորդ գիծն է՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad z=c:$$

Ստացված

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{VI}$$

հավասարումը որոշվում է 2-րդ կարգի կոն:

Այդ մակերևույթը սիմետրիկ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, իսկ կոորդինատային հարթությունները նրա համար սիմետրիայի հարթություններ են (գծ. 125):

§ **11. 2-րդ կարգի գլաններ:** III գլխի §5-ի օրինակներում մենք դիտարկել ենք հետևյալ 2-րդ կարգի գլանները՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{VII}$$

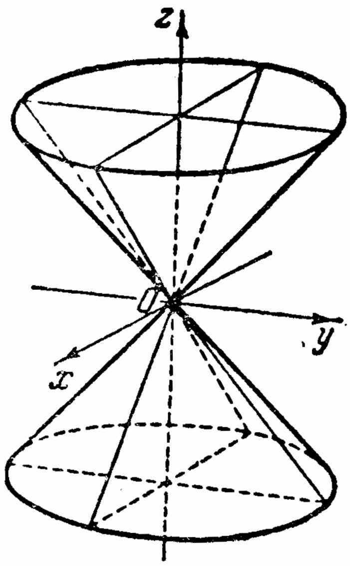
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{VIII}$$

$$y^2=2px: \tag{IX}$$

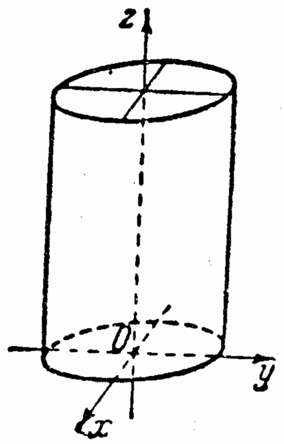
Այս գլանների ուղղորդ գծերը գտնվում են xOy հարթության մեջ և, համապատասխանորեն, էլիպս, հիպերբոլ և պարաբոլ են: Այդ գլանների ծնիչները զուգահեռ են Oz առանցքին:

(VII), (VIII) և (IX) հավասարումներով որոշվող գլանները համապատասխանորեն կոչվում են էլիպսական գլան (գծ. 126), հիպերբոլական գլան (գծ. 127) և պարաբոլական գլան (գծ. 128):

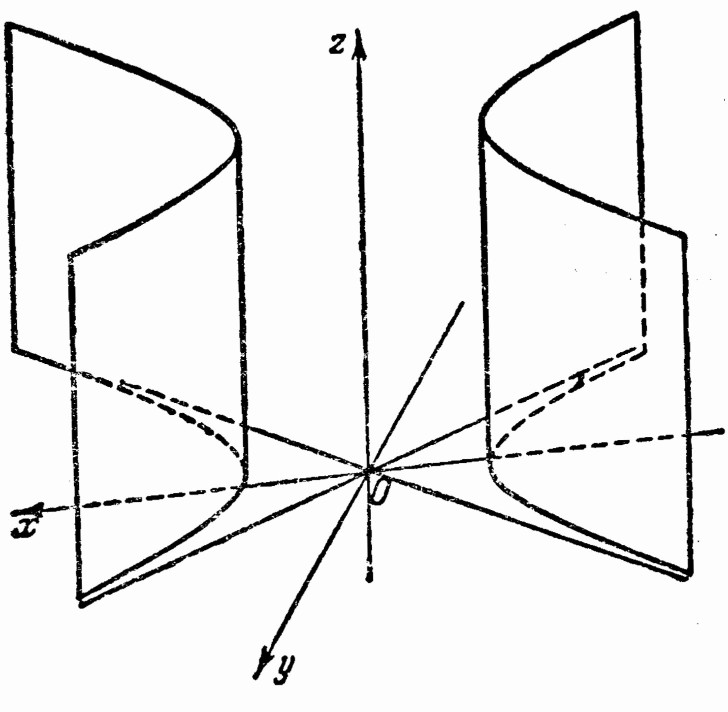
$a=b$ դեպքում էլիպսական գլանը դառնում է պտտման մակերևույթ՝ Oz պտտման առանցքով:



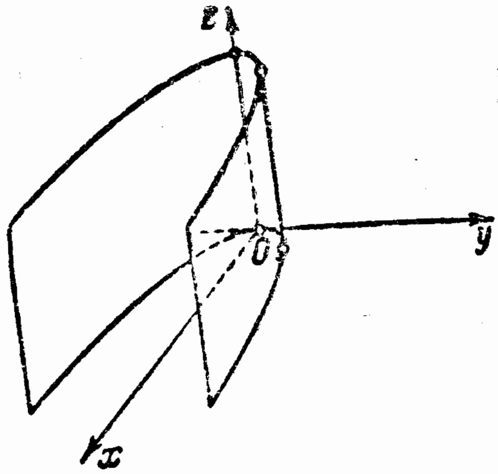
Գծ. 125



Գծ. 126



Գծ. 127



Գծ. 128

§ 12. 2-րդ կարգի մակերևույթների ուղղագիծ ծնիչները։ Վ. Գ. Շուխովի կոնստրուկցիաները։ *Ուղիղ գծի շարժումով առաջացած մակերևույթները կոչվում են* գծավոր մակերևույթներ, *իսկ նրանց վրա գտնվող ուղիղները՝* ուղղագիծ ծնիչներ։

Այդպիսի մակերևույթների օրինակներ կարող են ծառայել գլանային և կոնական մակերևույթները։ 2-րդ կարգի մակերևույթներից ուղղագիծ ծնիչներ ունեն (բացի գլաններից ու կոներից) միախոռոչ հիպերբոլոիդը և հիպերբոլական պարաբոլոիդը։

Դիտարկենք

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

միախոռոչ հիպերբոլոիդը։ Այդ հավասարումը կարելի է գրել նաև

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

կամ

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{29}$$

տեսքով։ Կազմենք առաջին աստիճանի հավասարումների հետևյալ սիստեմը՝

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=k\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

որտեղ k-ն կամայական թիվ է։

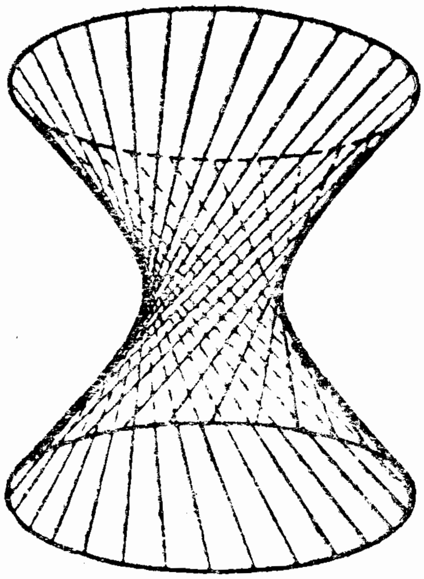
k-ի որոշակի արժեքի դեպքում այս հավասարումները որոշում են ուղիղ գիծ։ k պարամետրը փոփոխելով, մենք կստանանք ուղիղ գծերի մի համախումբ (ուղիղների ընտանիք)։ (30) հավասարումներն այնպես են կազմված, որ նրանք անդամ առ անդամ բազմապատկելով, տալիս են (29) մակերևույթի հավասարումը։ Հետևաբար, ամեն մի (x, y, z) կետ, որի կոորդինատները բավարարում են (30) սիստեմին, գտնվում է (29) մակերևույթի վրա։ Այսպիսով, (30) ընտանիքին պատկանող ամեն մի ուղիղ ամբողջությամբ գտնվում է միախոռոչ հիպերբոլոիդի վրա։

Կարելի է ցույց տալ, որ միախոռոչ հիպերբոլոիդի վրա գտնվում է ուղղագիծ ծնիչների մի ընտանիք ևս, որը տարբեր է մեր դիտարկած ընտանիքից։ Այդ նոր ընտանիքը որոշվում է

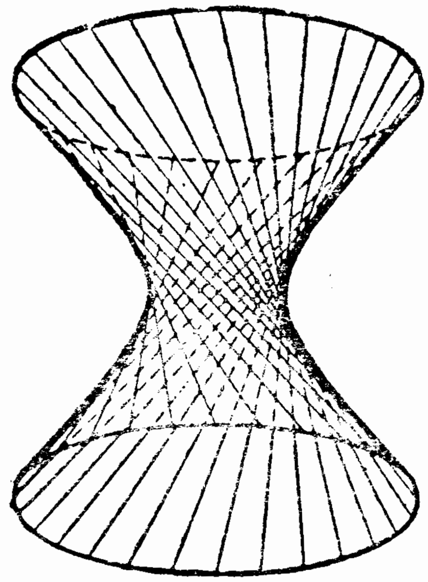
$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=l\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{l}\left(1+\frac{y}{b}\right), \end{aligned}\right\}$$

հավասարումներով, որտեղ l-ը կամայական պարամետր է։

Բացի դրանից, կարելի է ապացուցել, որ միախոռոչ հիպերբոլոիդի յուրաքանչյուր կետով անցնում են մեկական ուղիղներ այդ ընտանիքներից յուրաքանչյուրից (գծ. գծ. 129 և 130)։



Գծ. 129



Գծ. 130

Համանման դատողությունների օգնությամբ կարելի է համոզվել, որ

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$

հիպերբոլական պարաբոլոիդի վրա նույնպես գտնվում են ուղղագիծ ծնիչների երկու ընտանիքներ (նրանցից մեկը պատկերված է գծ. 131-ում)։ Այդ ընտանիքների հավասարումները կլինեն՝

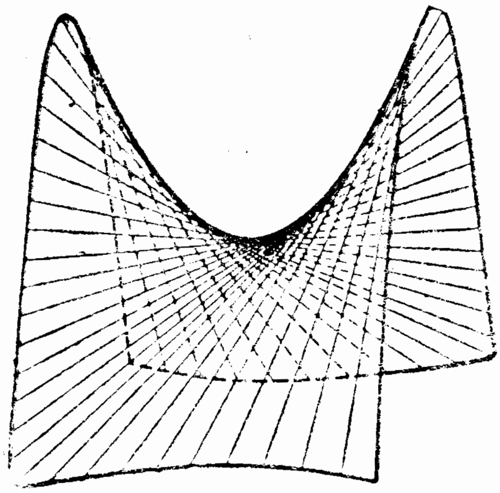
$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}&=2kz,\\ \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}&=\frac{1}{k},\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}&=\frac{1}{l},\\ \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}&=2lz,\end{aligned}\right\}$$

որտեղ k-ն և l-ը կամայական պարամետրեր են։

Մակերևույթի յուրաքանչյուր կետով անցնում են մեկական ուղիղներ յուրաքանչյուր ընտանիքից։

Միախոռոչ հիպերբոլոիդի վրա ուղղագիծ ծնիչների առկայությունն օգտագործվում է շինարարական տեխնիկայում: Այդպիսի օգտագործման գաղափարը և նրա գործնական իրականացումը պատկանում է ՍՍՀՄ գիտությունների ակադեմիայի պատվավոր անդամ, ռուս նշանավոր ինժեներ Վլադիմիր Գրիգորևիչ Շուխովին (1853—1939):



Գծ. 131

Վ. Գ. Շուխովն իրականացրել է կայմերի, աշտարակների և հենարանների այնպիսի կոնստրուկցիաներ, որոնք բաղկացած են պտտման միախոռոչ հիպերբոլոիդի ուղղագիծ ծնիչներով դասավորված մետաղյա ձողերից: Այդպիսի առաջին կոնստրուկցիան Վ. Գ. Շուխովն իրականացրել է ճնշիչ ջրավազանի համար 26 մ. բարձրությամբ հենարան կառուցելիս (1896): Այդպիսի կոնստրուկցիաների բարձր դիմացկունությունը և թեթևությունը կանխորոշեցին նրա լայն տարածումը մեր երկրում և արտասահմանում:

Վարժություններ

1. Կազմել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է $y=x$ ուղիղն Ox առանցքի շուրջը պտտելով:

2. Կազմել $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ կոնի և $z=c$ հարթության հատման գծի հավասարումները:

3. Կազմել այն կոնական մակերևույթի հավասարումը, որի գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, իսկ ուղղորդ գիծն է՝

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \quad z=h.$$

4. Ինչպիսի՞ մակերևույթ է որոշում $x^2=y^2+z^2$ հավասարումը:

5. Ինչպիսի՞ մակերևույթ է որոշում

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0$$

հավասարումը:

6. Ինչպիսի՞ մակերևույթ է որոշում

$$x^2+y^2+4z^2-1=0$$

հավասարումը:

7. *Ինչպիսի՞ մակերևույթ է ներկայացնում*

$$x^2+y^2-z^2-1=0$$

հավասարումը։

8. *Ինչպիսի՞ մակերևույթ է որոշում*

$$x^2-y^2-z^2-4=0$$

հավասարումը։

9. *Ինչպիսի՞ մակերևույթ է որոշվում*

$$z=x^2+y^2$$

հավասարումով։

10. *Կազմել այն գլանային մակերևույթի հավասարումը, որի ծնիչները զուգահեռ են* $x=y=z$ *ուղղին, իսկ ուղղորդ գիծն է՝*

$$x^2+y^2+z^2=1, \quad x+y+z=0$$

հավասարումներով որոշվող գիծը։

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

Էջ 36—38 (I մաս, I գլուխ)

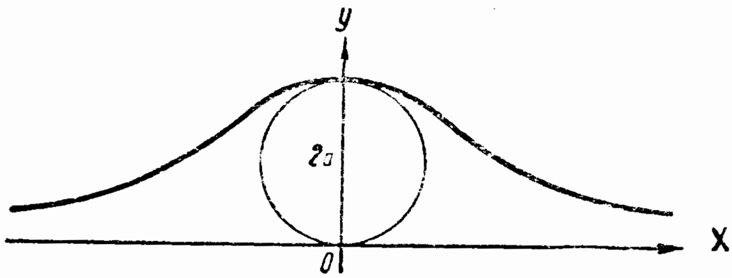
2. (5,2)։ **3.** (—4,2)։ **4.** (a,—b)։ **5.** (—a, b)։ **6.** (—a, —b)։ **8.** (0, 0), (2, 0), (2,2), (0, 2) *կամ* (0, 0), (0, 2), (—2,2), (—2, 0), *կամ* (0, 0), (—2, 0), (—2, —2), (0, —2), *կամ* (0, 0), (0, —2), (2, —2), (2, 0)։ **9.** $(\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, -\sqrt{2})$։ **10.** (3, 0), (0, 4), (—3, 0), (0, —4) *կամ* (4, 0), (0, 3), (—4, 0), (0, —3)։ **11.** (a, 0), $\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, (—a, 0), $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$։ **12.** $AB=\sqrt{98}$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$։ **13.** $\angle A$ *բութ է*։ **15.** $10+2\sqrt{5}$։ **16.** $\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$, 1։ **17.** x=—14, y=17։ **18.** (—3, 4, 0)։ **19.** (15, 15), *կամ* (3, 3)։ **20.** (1, 10) *կամ* (—11, 10)։ **21.** (—3, 9)։ **22.** (4, 5), (—2, —3)։ **23.** $(^8/_5, {}^8/_5)$։ **24.** (—3, —5) *կամ* (2, —7)։ **25.** $x=\frac{\pm(a\pm\sqrt{b^2-h^2}}{2}$, $y=\frac{h}{2}$։ **26*.** BC *կողմի միջնակետի կոորդինատները նշանակելով* a *և* b, *ստանում ենք* a=—1, b=4։ *Քանի որ եռանկյան միջնագծերը հատվում են մի կետում, որտեղ նրանցից յուրաքանչյուրը բաժանվում է* 2 : 1 *հարաբերությամբ (հաշված այն գագաթից, որտեղից տարված է միջնագիծը), ապա որոնելի կետի* (x, y) *կոորդինատները, ըստ (6) և (7) բանաձևերի, կլինեն՝*

$$x=\frac{1+2\cdot(-1)}{2+1}=-\frac{1}{3}, \quad y=\frac{2+2\cdot 4}{2+1}=\frac{10}{3}$$

։ **27.** (3, —4), (4, —2), (3, —6), (2, —4)։ **28.** $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$։ **30.** $^3/_2$ *քառ. միավոր*։ **31.** 33,5 *քառ. միավոր*։ **32.** *Գտնվում են*։ **33.** P=13, $\varphi=\operatorname{arc\,tg}{}^{12}/_5$։ **34.** $\left[\frac{1}{4}\cdot(5+\sqrt{17}), \quad \frac{1}{8}(7+\sqrt{17})\right]$։ **35.** *Ծանրության կենտրոնի հեռավորությունը մեծ հիմքից հավասար է* $\frac{h(2b+a)}{3(a+b)}$, իսկ հիմքին ուղղահայաց կողմից՝ $\frac{a^2+ab+b^2}{3(a+b)}$։ **36.** $A(1,\ 1)$, $B(2,\ 2\sqrt{3})$, $C(-4,\ 4)$, $D(\sqrt{3},-1)$, $E\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$։ **37.** $A\left(\sqrt{13},\ \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$, $B\left(\sqrt{2},-\frac{3\pi}{4}\right)$, $C(3,\ 0)$, $D\left(4,\ -\frac{\pi}{2}\right)$։

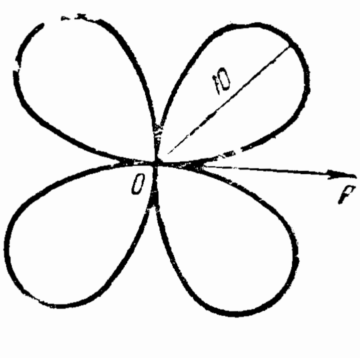
Էջ 49—52 (I մաս, II գլուխ)

1*. Կորի հավասարումից անմիջապես երևում է, որ կորը սիմետրիկ է Oy առանցքի նկատմամբ. x-ի նշանը փոխելիս, y-ի արժեքը չի փոխվում, քանի որ x-ը հավասարման մեջ մտնում է երկրորդ աստիճանով։ Քանի որ $y=0$ արժեքը կորի հավասարմանը չի բավարարում, ապա կորը Ox առանցքը չի հատում։ Կորի հավասարումը լուծենք y-ի նկատմամբ՝ $y=\frac{8a^3}{4a^2+x^2}$։ Համարելով հաստատուն $a>0$, նկատում ենք, որ x-ի բոլոր արժեքների դեպքում $y>0$. այդ նշանակում է, որ կորն ամբողջովին գտնը-



Գծ. 132

վում է վերին կիսահարթությունում։ Այդ նույն արտահայտությունից երևում է նաև, որ x-ի բացարձակ արժեքը աճելիս y օրդինատը նվազում է։ $x=0$ դեպքում $y=2a$։ Կորի հավասարումն այսպիսի հետազոտման ենթարկելով և կառուցելով կորի որոշ թվով կետեր (որոնց կոորդինատները կորոշենք՝ ընթացիկ կոորդինատներից մեկի կամայական արժեքով՝ անմիջականորեն հաշվելով մյուսի համապատասխան արժեքը), համոզվում ենք, որ կորն ունի այնպիսի ձև, ինչպես պատկերված է գծ. 132-ում։ Կորը կառուցելիս պետք է a հաստատունին տալ մի որոշ կամայական արժեք։ **2*.** r բևեռային շառավիղն իր մեծագույն արժեքին հասնում է այն դեպքում, երբ $\sin 2\varphi$-ն ունի մեծագույն արժեք, այսինքն՝ երբ $\sin 2\varphi=1$, որ տեղի կունենա $\varphi=45^\circ$, 225° և այլ արժեքների դեպքում, այդ ժամանակ $r=10$։ r բևեռային շառավիղը փոքրագույն արժեք կընդունի այն դեպքում, երբ $\sin 2\varphi$-ն ընդունի փոքրագույն արժեք, այսինքն՝ $\sin 2\varphi=-1$, որ տեղի կունենա $\varphi=135^\circ$, 315° և այլ արժեքների դեպքում. r-ի փոքրագույն արժեքը կլինի -10։ Երբ $\varphi=0^\circ$, 90°, 180° և այլն, այդ դեպքում $r=0$։ Այժմ պետք է կառուցել կորի մի

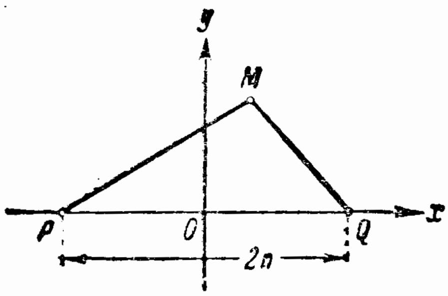


Գծ. 133

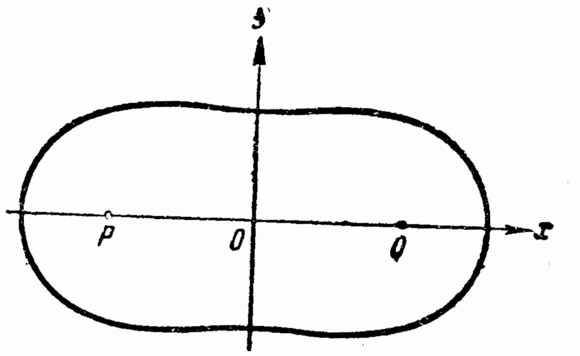
շարք կետեր, որոնց կոորդինատները կարելի է որոշել՝ նրանցից մեկին տված կամայական արժեքով, անմիջականորեն գտնելով մյուսի համապատասխան արժեքը։ Կորը բաղկացած է չորս օղակներից, ինչպես ցույց է տրված գծ. 133-ում, և այդ պատճառով էլ կոչվում է քառաթերթ վարդ։

6. $5x-3y+17=0$։ **7.** $y=\frac{x^2}{8}+2$։ **8.** $x^2+y^2=12x$ շրջանագիծն է։

9. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ (այդ գիծը կոչվում է էլիպս)։ **10*.** Նախքան կորի հավասարումը կազմելը, պետք է ընտրել կոորդինատային սիստեմը։ Կոորդինատային սիստեմի ընտրությունից է կախված որոնելի հավասարման ավելի կամ պակաս չափով բարդ լինելը։ Այսպես, օրինակ, մենք արդեն տեսել ենք, որ եթե կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք շրջանագծի կենտրոնում, ապա նրա հավասարումն ավելի պարզ տեսք կունենա, քան կոորդինատային սիստեմի այլ ընտրության դեպքում։ Այնպիսի կանոններ, որոնցով կարելի լիներ առաջնորդվել կոորդինատային սիստեմ ընտրելիս, գոյություն չունեն, և առավել հարմար ընտրություն կատարելու ունակությունը ձեռք է բերվում միայն փորձի միջոցով։ Որոնելի հավասարումը կազմելու համար, տվյալ դեպքում, պարզվում է, որ ամենից հարմար է որպես Ox առանցք ընդունել P և Q կետերով անցնող ուղիղը (այդ դեպքում P և Q կետերի կոորդինատները շատ պարզ կլինեն), իսկ որպես Oy առանցք՝ PQ հատվածի միջնուղղահայացը (P և Q կետերի իրավահավասարությունը թույլ կտա ենթադրելու, որ կորը սիմետրիկ է)։ Դիցուք x-ը և y-ը որոնելի կորի վրա գտնվող M կամայական կետի կոորդինատներն են (գծ. 134)։ Այդ նշանակում է, որ x-ն ու y-ը կլինեն ընթացիկ կոորդինատներ, այսինքն՝ այնպիսի փոփոխական կոորդինատներ, որոնք կարող են հավասար-



Գծ. 134



Գծ. 135

վել կորի ցանկացած կետի կոորդինատներին։ Կորի (որպես երկրաչափական տեղի) հավասարումը կազմել՝ այդ նշանակում է բանաձևի (հավասարման) միջոցով արտահայտել կորի երկրաչափական հատկությունը։ Դրան հասնում ենք, կորի ընթացիկ կոորդինատների և կորը բնորոշող հաստատուն մեծությունների միջև մի որոշ առնչություն հաստատելու միջոցով։ Տվյալ դեպքում, մենք պետք է առնչություն գտնենք x, y ընթացիկ կոորդինատների և m^2, n հաստատունների միջև։ Կորը որպես երկրաչափական տեղ սահմանելուց բխում է (գծ. 134), որ $PM \cdot QM = m^2$։ PM և QM հատվածների երկարությունները արտահայտենք երկու կետերի հեռավորության բանաձևի միջոցով. մեր ընտրած կոորդինատային սիստեմի նկատմամբ P և Q կետերի կոորդինատները կլինեն՝ $P(-n, 0)$ $Q(+n, 0)$, հետևաբար՝

$$\sqrt{(x+n)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-n)^2+y^2}=m^2 ։$$

Այս էլ հենց կորի (երկրաչափական տեղի) հավասարումն է։ Բայց, անշուշտ, այն պետք է պարզեցնել՝ արմատներից ազատել, հնարավոր կրճատումներ կատարել և այլն։ Այդ նպատակով որոշ տարրական ձևափոխություններ կատարելով, ստանում ենք՝

$$(x^2+y^2+n^2+2nx)(x^2+y^2+n^2-2nx)=m^4$$

կամ՝

$$(x^2+y^2+n^2)^2-4n^2x^2=m^4,$$

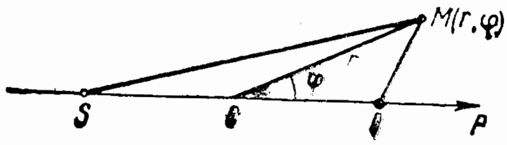
կամ՝

$$(x^2+y^2)^2+2n^2(x^2+y^2)-4n^2x^2=m^4-n^4,$$

և, վերջնականապես,

$$(x^2+y^2)^2-2n^2(x^2-y^2)=m^4-n^4 ։$$

Կորը կառուցելու համար ստացված հավասարումը հետազոտենք։ Քանի որ կորի հավասարման մեջ x-ի ցանկացած արժեքը փոխարինելով այնպիսի արժեքով, որը բացարձակ մեծությամբ նրան հավասար է և ունի նրա հակառակ նշանը, y-ի արժեքը չի փոխվում և, հակադարձաբար, y-ի ցանկացած արժեքը փոխարինելով բացարձակ մեծությամբ նրան հավասար և նրա հակառակ նշանն ունեցող արժեքով, x-ի արժեքը չի փոխվում, ապա կորը սիմետրիկ է կոորդինատային առանցքների նկատմամբ։ Այնուհետև, դիտարկվող երկրաչափական տեղի երկրաչափական սահմանումից ուղղակի հետևում է, որ այդ կորը փակ կոր է։ Հավասարման մեջ ընդունելով նախ $y=0$ և ապա $x=0$, կգտնենք կորի հատման կետերը Ox և Oy առանցքների հետ։ Կառուցելով կորի մի շարք կետեր (որոնց կոորդինատները կարելի է գտնել մեր գտած հավասարման մեջ կոորդինատներից մեկին տալով կամայական արժեքներ և հենց այդ հավասարումից հաշվելով մյուս կոորդինատի համապատասխան արժեքները) և նրանք միացնելով անընդհատ գծով, կստանանք գծ. 135-ում պատկերված կորը ($m>n$ դեպքում)։ **11***. ա) Կոորդինատային առանցքներն ընտրելով այնպես, ինչպես 10* վարժությունում, լեմնիսկատի հավասարումը կընդունի $(x^2+y^2)^2=2m^2(x^2-y^2)$ տեսքը։ բ) Եթե բևեռն ընտրենք համընկած ուղղանկյուն կոորդինատային սիստեմի սկզբնակետի



Գծ. 136

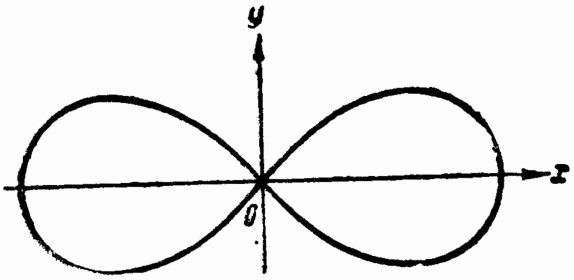
հետ, իսկ բևեռային առանցքը Ox առանցքի հետ, ապա լեմնիսկատի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով կունենա $r^2=2m^2\cos 2\varphi$ տեսքը։ Ցուցում։ Բևեռային կոորդինատներով հավասարումն ստանալու համար, ամենից առաջ ընտրում ենք կոորդինատային սիստեմը՝ բևեռն ընտրում ենք համընկած մեր ընտրած ուղղանկյուն կոորդինատային սիստեմի սկզբնակետի հետ, իսկ բևեռային առանցքը՝ Ox առանցքի հետ։ Այդ ժամանակ կունենանք (գծ. 136)՝ $SM\cdot QM=m^2$։ Այնուհետև, SM և QM հատվածներն արտահայտելով եռանկյունաչափությունից հայտնի բանաձևով, ստանում ենք՝

$$\sqrt{r^2+m^2+2mr\cos\varphi}\cdot\sqrt{r^2+m^2-2mr\cos\varphi}=m^2$$

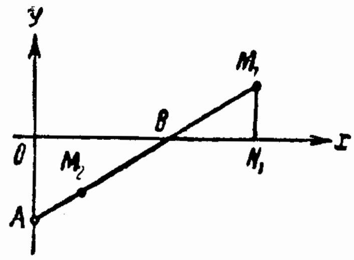
հավասարումը։ Տարրական ձևափոխություններից հետո կստանանք՝

$(r^2+m^2)^2-4m^2r^2\cos^2\varphi=m^4$, $r^4=4m^2r^2\cos^2\varphi-2m^2r^2$ կամ՝ $r^4=2m^2r^2(2\cos^2\varphi-1)$ և, վերջնականապես, $r^2=2m^2\cos 2\varphi$։ Այս կորը պատկերված է գծ. 137-ում։

12*. $x^2y^2=(y+a)^2(b^2-y^2)$։ Ցուցում: BM_1N_1 և BAO եռանկյունների նմանությունից ունենք (գծ. 138)՝ $\frac{y}{BN_1}=\frac{a}{OB}$։ Քանի որ $OB=x-BN_1$ և

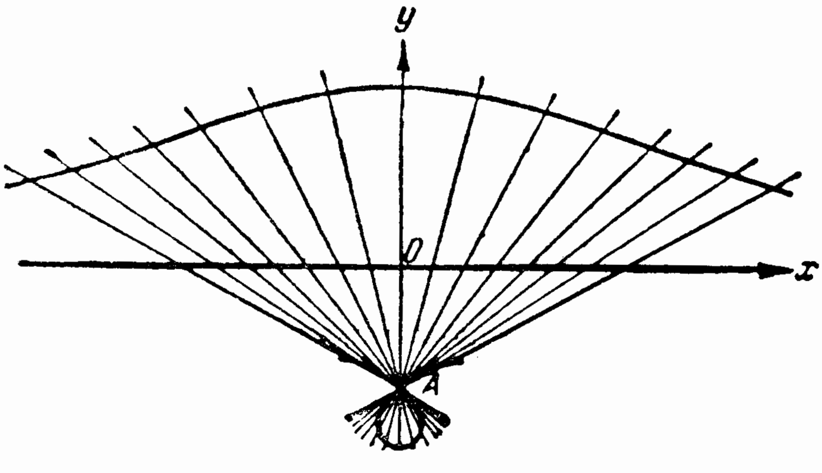


Գծ. 137



Գծ։ 138

$BN_1=\sqrt{b^2-y^2}$, ապա ստանում ենք $\frac{y}{\sqrt{b^2-y^2}}=\frac{a}{x-\sqrt{b^2-y^2}}$ հավասարումը կամ՝ $xy=(a+y)\sqrt{b^2-y^2}$, և, վերջնականապես, $x^2y^2=(a+y)^2(b^2-y^2)$։ Կորը կառուցելու եղանակը (գծ. 139) պարզ է նրա երկրաչափական սահ-



Գծ. 139

մանումից։ Գծագրի վրա պատկերված է կորի տեսքը $a<b$ դեպքում։ $a>b$-ի և

$a=b$ դեպքերում կորը գծեք ինքնուրույն։ Շատ օգտակար է՝ կոնխոիդի հավասարումը հետազոտելու միջոցով համոզվել, որ գծած գրաֆիկները ճիշտ են։ **13.** $y^2=x^2\dfrac{a+x}{a-x}$։ Ցուցում: *Գծագիր 140-ից ունենք՝* $\dfrac{y}{AN_1}=\dfrac{OB}{AO}$, $AN_1=a+x$, $AO=a$, $OB^2=BM_1^2=x^2+(y-OB)^2$, *որտեղից՝* $OB=\dfrac{x^2+y^2}{2y}$։ *Գտած այս արժեքները տեղադրելով առաջին համեմատության մեջ, տարրական ձևափոխություններից հետո կստանանք* $y^2=x^2\dfrac{a+x}{a-x}$ *հավասարումը։ Ստրոֆոիդի տեսքը ցույց է տրված գծ. 141-ում, որից և երևում է կորը կառուցելու եղանակը։* **14*.** $x^3=y^2(2a-x)$։ Ցուցում: *Գծ. 142-ից ունենք՝*

$$OP=\sqrt{x^2+y^2},\quad ED^2=OE\cdot BE,$$

որտեղից՝

$$BE=\frac{ED^2}{OE},\qquad ED=2a\cdot\operatorname{tg}\varphi=2a\cdot\frac{y}{x},$$

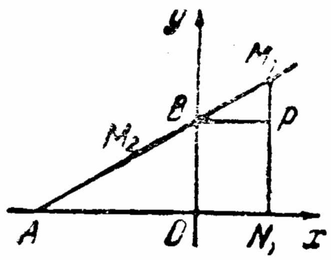
$$OE=\frac{2a}{\cos\varphi}=\frac{2a\sqrt{x^2+y^2}}{x}։$$

Քանի որ $OP=BE$, *ապա՝*

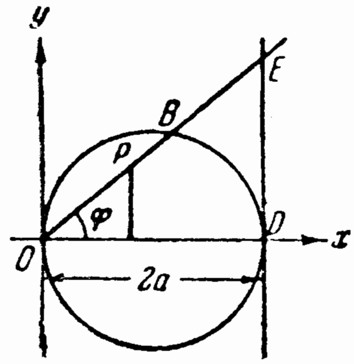
$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{4a^2y^2\cdot x}{x^2\cdot 2a\sqrt{x^2+y^2}}$$

և, վերջնականապես, $x^3=y^2(2a-x)$։ *Կորը պատկերված է գծ. 143-ում։ Այդ գծագրից պարզ է նաև կորը կառուցելու եղանակը։* **15*.** $r=m+2a\cos\varphi$։ Ցուցում: O *կետն ընդունենք որպես բևեռ, իսկ բևեռային առանցք համարենք* OD *տրամագիծը։* OBD *ուղղանկյուն եռանկյունից (գծ. 144) ունենք՝* $r=OM_1=BM_1+OB=m+2a\cos\varphi$։ *Հետևաբար, որոնելի հավասարումը կլինի՝* $r=m+2a\cos\varphi$։ *Կորը պատկերված է գծ. 145-ում, որտեղից պարզ երևում է նաև այդ կորը գծելու եղանակը։ Գծագրի վրա պատկերված է այն դեպքը, երբ* $m<2a$։ $m=2a$ *և* $m>2a$ *դեպքերի համար կորը գծել ինքնուրույն։* **18.** $4dx+R^2-r^2=0$, *եթե որպես* Ox *առանցք ընդունված է կենտրոնների գիծը, իսկ որպես* Oy *առանցք՝ կենտրոնների գծի միջնուղղահայացը։* **19.** *Եթե որպես բևեռ ընդունենք ուղիղ անկյան գագաթը, իսկ որպես բևեռային առանցք՝ նրա կողմերից մեկը, ապա երկրաչափական տեղի հավասարումը կունենա* $r=a\sin 2\varphi$ *տեսքը (տե՛ս 2*-րդ խնդիրը)։* **20.** *Շրջանագիծ է։*

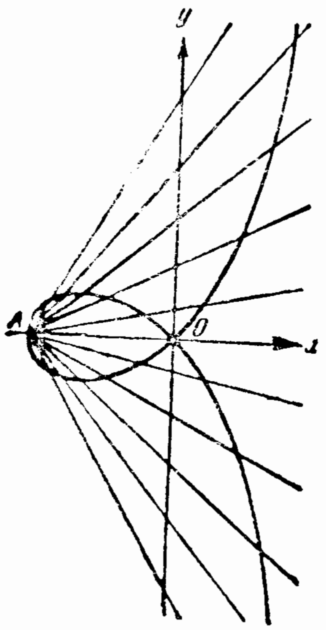
21. $r=\dfrac{2a}{\cos\varphi}-\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$։



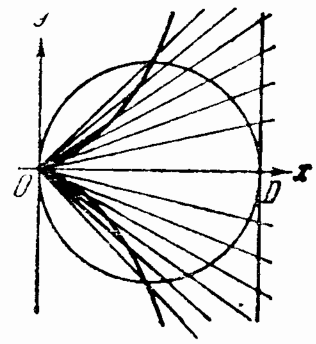
Գծ. 140



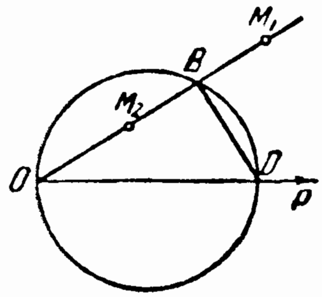
Գծ. 142



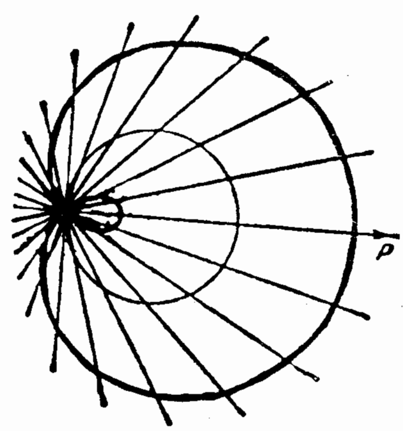
Գծ. 141



Գծ. 143



Գծ. 144



Գծ. 145

22. *ա)* $(x^2+y^2-2ax)^2=m^2(x^2+y^2)$,

բ) $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$։

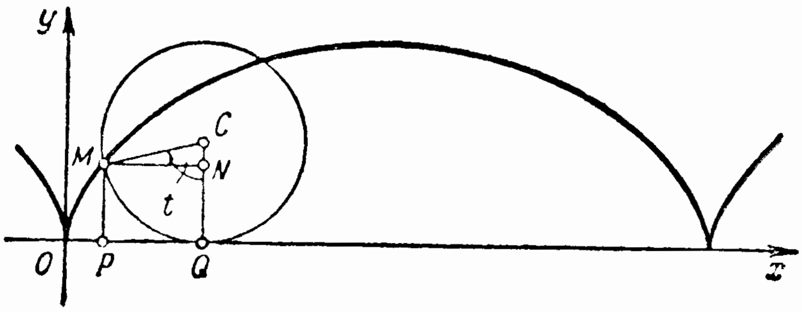
23*. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$։

Ցուցում: *Գծ. 146-ից՝*

$$x=OP=OQ-PQ=\overset{\frown}{MQ}-MN=at-a\sin t,$$
$$y=PM=QN=QC-NC=a-a\cos t,$$

որտեղ t*-ն շրջանագծի պտտման անկյունն է (համարելով* $t>0$ *ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ պտտվելիս)*։

24. $x=vt\cos\alpha$, $\qquad y=vt\sin\alpha-\dfrac{gt^2}{2}$։



Գծ. 146

էջ 80—84 (I մաս, III գլուխ)

1. *ա)* $y=x+5$, *բ)* $y=\sqrt{3}\,x+5$, *գ)* $y=-x+5$, *դ)* $y=5$։ **2.** $\sqrt{3}\,x-3y-9=0$։ **3.** *ա)* $y=x$, *բ)* $y=-x$, *գ)* $y=0$։ **5.** $4x-3p-12=0$։ **7.** $45°$։ **10.** $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1$, $-\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1$, $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=-1$, $\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{3}=1$. *կամ՝* $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$, $-\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$, $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=-1$, $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=1$։ **11.** 20 *քառ. միավոր*։ **12.** $45^3/_8$ *քառ. միավոր*։ **13.** *ա)* $a=-b$, *բ)* $a=-\dfrac{b\sqrt{3}}{3}$, *գ)* $a=b$։ **15.** $x-y+1=0$։ **16.** $7x-2y-20=0$։ **17.** $3x+y-5=0$։ **18.** $(^{45}/_{22},\ ^{24}/_{11})$։ **19.** *ա)* $\dfrac{\pi}{4}$, *բ)* 0, *գ)* $\dfrac{\pi}{2}$, *դ)* 0, *ե)* $\dfrac{5\pi}{6}$, *զ)* $\dfrac{3\pi}{4}$, *է)* $\operatorname{tg}\theta=-7$, *ը)* $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{1}{2}$, *թ)* $\operatorname{tg}\theta=$

$=\frac{1}{4}$ (*եթե ուղիղների յուրաքանչյուր զույգը դիտարկենք այն կարգով, ինչ կարգով նրանք տրված են*)։ **20.** $90°$։ **21.** $9x+y-30=0$, $x-9y+24=0$։ **22.** $26°30'$, $71°30'$, $82°$։ **23.** 1, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $135°$, $\mathrm{arctg}\,^1/_2$, $\mathrm{rctg}\,^1/_3$։ **24.** $(4, 1)$։ **25.** *ա*) $y=2x$, *բ*) $y+3x=0$, *գ*) $2y=x$ *և* $y=-2x$։ **26.** *ա*) $y=3$, *բ*) $y=x+5$, *գ*) $y=4x+11$, *դ*) $(2-\sqrt{3})x-(1+2)\sqrt{3})y+7+4\sqrt{3}=0$ *կամ*՝ $(2+\sqrt{3})x-(1-2\sqrt{3})y+7-4\sqrt{3}=0$, *ե*) $y+2x+1=0$։ **27.** $5x+25y+1=0$, $x+5y-5=0$։ **28.** $5x-4y-16=0$։ **29.** $x+3x-1=0$։ **30.** $53x+202y=0$։ **31.** $x+y-6=0$, $x-y=0$։ **32.** $4x-3y-17=0$։ **33.** $3x-2y-7=0$։ **34.** $x+y=0$։ **35.** $5y-9=0$, $9x-18y-8=0$, $9x-3y-35=0$։ **36.** $x-7y+10=0$, $x+3=0$, $x-y+4=0$, $(-3, 1)$։ **37.** $y+2x-2=0$, $x+2y=2$, $y=x$։ **38.** $x-y+3=0$, $x+2y-4=0$, $7x-y+7=0$, $(-^2/_3, {}^7/_3)$։ **39*.** *Եռանկյան կողմերի հավասարումներից գտնում ենք նրա գագաթների կոորդինատները*՝ $A(3, 1)$, $B(0, 4)$, $C(-1, 0)$։ *Այնուհետև որոշում ենք* AB *կողմի միջնակետի կոորդինատները*՝ $(^3/_2, {}^5/_2)$։ *Քանի որ եռանկյան միջնագծերը հատվում են այնպիսի կետում, որը յուրաքանչյուր միջնագիծը բաժանում է 2:1 հարաբերությամբ (գագաթից հաշված), ապա միջնագծերի հատման կետը գտնելու համար օգտվում ենք հատվածը տվյալ հարաբերությամբ բաժանելու բանաձևերից. այդպես գտնում ենք միջնագըծերի հատման* $(^2/_3, {}^5/_3)$ *կետը։ Մնում է տանել ուղիղ (0, 0) և* $(^2/_3, {}^5/_3)$ *կետերով, որի համար պետք է օգտագործել տրված երկու կետերով անցնող ուղիղի հավասարումը։ Վերջնականապես կունենանք*՝ $\frac{y}{^5/_3}=\frac{x}{^2/_3}$ *կամ*՝ $5x-2y=0$։ **40.** $3x-4y=0$։ **41*.** $(2, 0)$։ Ցուցում: *Որոնելի կետը՝ տված ուղիղի հատման կետն է տված կետերը միացնող հատվածի միջնուղղահայացի հետ*։ **42.** $(1, 1)$։ **43.** $(^{11}/_6, {}^1/_6)$։ **44.** $x+y-11=0$, $3x-y-16=0$։ **45.** $(2\pm2\sqrt{3}, 3)$։ **47.** $x-\sqrt{3}y+14=0$։ **48.** $x+\sqrt{3}y-10=0$։ **50*.** 3, $(2^{11}/_{17}, -1^7/_{17})$ *և* 7, $(-5^3/_5, -4^1/_5)$։ Ցուցում: *Տված ուղիղների հավասարումները նորմալ տեսքի բերելով ստանում ենք*՝ $\frac{15}{17}x-\frac{8}{17}y-3=0$ *և* $-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-7=0$, *որտեղից տեսնում ենք, որ ուղղահայացների որոնելի երկարությունները համապատասխանորեն հավասար են 3-ի և 7-ի։ Քանի որ* $\cos\alpha=\frac{x}{p}$, $\sin\alpha=\frac{y}{p}$, *որտեղ* x*-ն ու* y*-ը՝ կոորդինատների ըսկզբնակետից ուղիղի վրա իջեցրած* p *ուղղահայացի հիմքի կոորդինատներն են, իսկ* α*-ն՝* Ox *առանցքի հետ այդ ուղղահայացի կազմած անկյունն է, ապա որոնելի կոորդինատները կգտնենք* $x=p\cos\alpha$, $y=p\sin\alpha$ *բանաձևերից։ Ուրեմն, մեր օրինակում ուղղահայացի հիմքի կոորդինատները կլինեն*՝

$$x=3\cdot\frac{15}{17}=2\frac{11}{17},\quad y=3\cdot\left(-\frac{8}{17}\right)=-1\frac{7}{17}\ \text{և}\ x=-7\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-5\frac{3}{5},$$

$y=7\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-4\frac{1}{5}$։ **51.** 5, 2։ **52.** $\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ և $\left(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$։

53*. $3x-4y-25=0$ և $3x-4y+5=0$։ Ցուցում: *Ամենից առաջ պարզ է, որ խնդիրը երկու պատասխան ունի, քանի որ տված ուղիղին զուգահեռ և նրանից 3 միավոր հեռավորություն ունեցող ուղիղը կարելի է տանել տըված ուղիղի տարբեր կողմերում. մի դեպքում որոնելի ուղիղի յուրաքանչյուր կետի շեղումը տված ուղիղից հավասար կլինի —3-ի, մյուս դեպքում՝ +3-ի։ Հետևաբար, (29) բանաձևում (գլ. III, § 15) տեղադրելով որոնելի ուղիղի* (x, y) *կամայական կետի կոորդինատները կստանանք՝*

$$\frac{3x-4y-10}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm3։$$

Սրանք էլ հենց կլինեն որոնելի ուղիղների հավասարումները, քանի որ x-*ն ու* y-*ը որոնելի ուղիղների վրա գտնվող ընթացիկ կետի կոորդինատներն են։ Պարզ ձևափոխությունից հետո կստանանք վերը բերված պատասխանները։* **54.** $5x+12y-37=0$ և $5x+12y+41=0$։ **55*.** $|d|=7$։ Ցուցում: *Որոնելի հեռավորությունը որոշելու համար պետք է ուղիղներից մեկի վրա վերցնել մի որոշակի կետ և գտնել այդ կետի հեռավորությունը մյուս ուղիղից։ Տվյալ խնդրում հարմար է, օրինակ, առաջին ուղիղի հավասարումից, ընդունելով այնտեղ* $y=0$, *գտնել (5, 0) կետը։ Այդ դեպքում, այդ կետի շեղումը երկրորդ ուղիղից կարտահայտվի այսպես՝* $\frac{3\cdot5+4\cdot0+20}{-\sqrt{3^2+4^2}}=-7$։

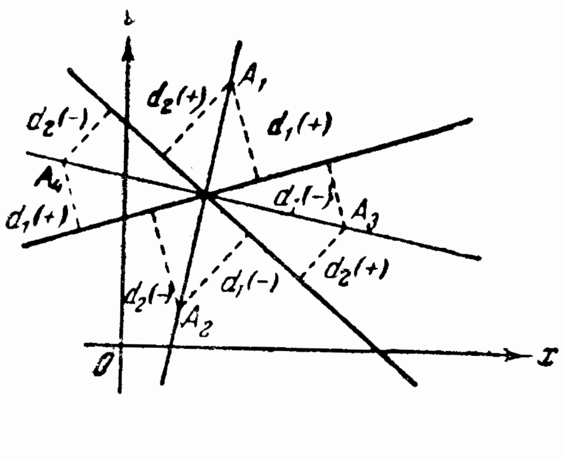
56. $|d|=1$։ **57.** $0{,}3\sqrt{5}$։ **58*.** $3x-4y-7=0$, $5x+12y-49=0$։ Ցուցում: *Որոնելի ուղիղի (շոշափողի) հավասարումը գրենք տված (5, 2) կետով անցնող և* k *ուղղություն ունեցող ուղիղի հավասարման տեսքով՝* $y-2=k(x-5)$։ *Այսպիսով, խնդիրը հանգում է* k *անկյունային գործակիցը գըտնելուն։ Քանի որ որոնելի ուղիղը պետք է անցնի (—3, 1) կետից 4 միավոր հեռավորության վրա, ապա* k-*ն որոշելու համար կարելի է օգտվել տըված ուղղից տված կետի շեղումը որոշող բանաձևից։ Դրա համար պետք է ուղիղի հավասարումը բերել նորմալ տեսքի և ընթացիկ կոորդինատների փոխարեն տեղադրել (—3, 1) կոորդինատները։ Այդպիսով, կունենանք՝*

$$\frac{1-8k}{\sqrt{k^2+1^2}}=\pm4,$$

որտեղից և կգտնենք անկյունային գործակցի արժեքները՝

$k_1=\frac{3}{4}$, $k_2=-\frac{5}{12}$։ *Այս արժեքները տեղադրելով որոնելի ուղիղի հավասարման մեջ, մենք կգտնենք երկու ուղիղների հավասարումներ՝* $3x-4y-7=0$, $5x+12y-49=0$։ **59.** $7x-6y-19=0$ և $9x+2y-5=0$։ **60*.** $3x-3y+19=0$ և $3x+3y-5=0$։ Ցուցում: *Անկյան կիսորդը՝ անկյան կողմերից հավասարապես հեռացած կետերի երկրաչափական տեղն է։ Հետևաբար, կիսորդի ցանկացած կետի* d_1 *և* d_2 *շեղումները անկյան կողմերից բացարձակ մեծությամբ հավասար կլինեն։ Երկու հակադիր անկյունների (որոնց մեջ գտնվում են* A_1 *և* A_2 *կետերը, գծ. 147) կիսորդների բոլոր կետերի* համար այդ շեղումները միատեսակ են և՛ մեծությամբ, և՛ նշանով, այսինքն՝ A_1A_2 կիսորդի կետերի կոորդինատները բավարարում են $d_1=d_2$ կամ՝ $d_1-d_2=0$ հավասարմանը։ Երկու կից անկյունների կիսորդների համար կունենանք $d_1+d_2=0$ հավասարումը, որովհետև d_1 և d_2 շեղումները այդ դեպքում բացարձակ մեծությամբ հավասար կլինեն, բայց կունենան հակառակ նշաններ։ Հետևաբար, մեր խնդրի դեպքում որոնելի կիսորդների համար կստանանք՝

$$\frac{3x+4y-9}{5}-\frac{12x+9y-8}{15}=0 \quad \text{և} \quad \frac{3x+4y-9}{5}+\frac{12x+9y-8}{15}=0,$$



Գծ. 147

կամ՝

$$3x-3y+19=0 \text{ և } 3x+3y-5=0$$

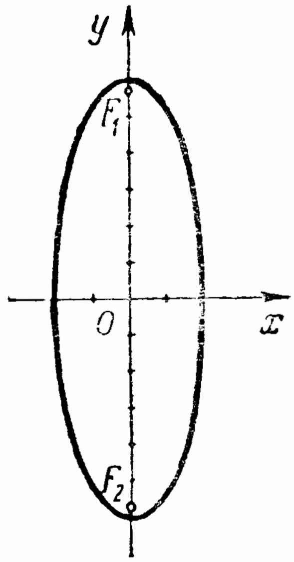
հավասարումները։ Գտած ուղիղների 1 և -1 անկյունային գործակիցները բավարարում են ուղղահայացության պայմանին։ **61.** $3x-y+55=0$, $5x+15y+3=0$։ **62.** $x+y=0$։ **63.** $(1, -4)$ և $\left(3\frac{6}{7}, -1\frac{1}{7}\right)$։ **64.** $x+3y+7=0$, $3x-y+9=0$ և $3x-y-3=0$։ **65.** $3x+y-14=0$ և $x+2y-2=0$, $x-3y+2=0$ և $x+2y-14=0$։ **66.** Այն ուղիղն է, որն ուղղահայաց է տված կետերը միացնող ուղիղին։ **67.** Ուղիղ գիծ է։

№ 119—126 (I մաս, IV գլուխ)

1. ա) $(x+2)^2+(y+3)^2=9$, բ) $(x-2)^2+(y+3)^2=25$, գ) $(x-5)^2+(y-6)^2=13$։ **2*.** $(x-3)^2+(y+5)^2=100$։ Ցուցում: Շրջանագծի $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ հավասարմանը պետք է բավարարեն տված կետերի կոորդինատները։ Ընթացիկ կոորդինատների փոխարեն հերթով տեղադրելով այդ կետերի կոորդինատները, կստանանք երեք հավասարումներ a, b և r^2 անհայտ մեծությունների նկատմամբ. այդ սիստեմը լուծելով, կստանանք որոնելի հավասարումը։ **3*.** $B=0$, $C=A$, $D=-6A$, $E=-4A$, $F=-12A$։ Ցուցում: 5 միավոր շառավիղ և (3, 2) կենտրոն ունեցող շրջանագծի հավասարումը կարելի է գրել $(x-3)^2+(y-2)^2=25$ տեսքով կամ փակագծերը բացելով և բոլոր անդամները տեղափոխելով հավասարման ձախ մասը՝ $x^2+y^2-6x-4y-12=0$։ Քանի որ $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ հավասարումը պետք է արտահայտի այդ նույն շրջանագիծը, ապա այդ հավասարման գործակիցները պետք է համեմատական լինեն վերևում գրած հավասարման գործակիցներին։ **4*.** ա) $(2, -1)$, $r=2$, բ) $\left(-\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $r=\frac{5\sqrt{2}}{4}$, *գ)* $(3, 0)$, $r=4$, *դ)* $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, $r=\frac{3}{2}$։ Ցուցում: *ա) Տված հավասարումը բերելով* $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ *տեսքին, եզրակացնում ենք, որ կենտրոնի կոորդինատներն են (2, −1), իսկ շառավիղը հավասար է 2-ի։ բ) Նախապես հավասարումը բաժանել 2-ի վրա, և ապա վարվել այնպես, ինչպես ա) կետում։* **5.** $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2=0$։ **6.** $x^2+y^2-6x=0$։ **7.** $x^2+y^2+8y=0$։ **8.** $(x+5)^2+(y-3)^2=9$ *և* $(y+5)^2+(y+3)^2=9$։ **9*.** $(x-4)^2+(y-7)^2=9$։ Ցուցում: *Շառավիղի երկարությունը հավասար է շրջանագծի կենտրոնի հեռավորությանը տված ուղղից։* **10*.** $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$։ Ցուցում: *Շոշափողի որոնելի հավասարումը վերցնենք* $y-y_0=k(x-x_0)$ *տեսքով։ Որպեսզի որոշենք շոշափողի* k *անկյունային գործակիցը, շրջանագծի հավասարումը դիֆերենցենք՝* $2(x-a)\,dx + 2(y-b)\,dy=0$, *որտեղից՝* $\frac{dy}{dx}=-\frac{x-a}{y-b}$, *հետևաբար՝* $k=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = -\frac{x_0-a}{y_0-b}$։ k *գործակցի համար գտած այդ արժեքը տեղադրելով շոշափողի հավասարման մեջ, ամբողջ հավասարումն ընդհանուր հայտարարի բերելով և հավասարման ձախ մասին ավելացնելով* $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2$ *գումարը, իսկ աջ մասին՝ այդ գումարին հավասար* r^2*-ն* (*(*x_0, y_0*) կետը գտնվում է շրջանագծի վրա, ուստի նրա կոորդինատները բավարարում են շրջանագծի հավասարմանը), տարրական ձևափոխություններից հետո կստանանք շոշափողի հավասարումը՝* $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$։ **11.** $x_0x+y_0y=r^2$։ **12.** $4x+3y-30=0$։ **13*.** $x-3y-10=0$ *և* $3x-y+10=0$։ Ցուցում: *Շոշափողի հավասարումը վերցնենք* $x_0x+y_0y=10$ *տեսքով, որտեղ* (x_0, y_0)*-ն շոշափման կետի կոորդինատներն են։ Այդ կոորդինատների արժեքները կըգտնենք երկու պայմանից՝ 1)* (x_0, y_0) *կոորդինատները պետք է բավարարեն շրջանագծի հավասարմանը (շոշափման կետը գտնվում է շրջանագծի վրա) և 2) (−5, −5) կետը գտնվում է շոշափողի վրա, ուրեմն նրա կոորդինատները պետք է բավարարեն շոշափողի հավասարմանը։ Այսպիսով, ըստանում ենք* x_0*-ի և* y_0*-ի նկատմամբ երկու հավասարումների սիստեմ՝* $x_0^2+y_0^2=10$, $5x_0+5y_0=-10$։ *Այս սիստեմը լուծելով, կստանանք երկու զույգ արժեքներ՝* $x_0=1$, $y_0=-3$ *և* $x_0=-3$, $y_0=1$։ *Այս արժեքները տեղադրելով շոշափողի հավասարման մեջ, կստանանք շոշափողները՝* $x-3y-10=0$ *և* $3x-y+10=0$։ **14.** $x+2y+5=0$ *և* $2x-11y+25=0$։ **15*.** *ա)* $2x+3y\pm13=0$։ Ցուցում: *Շոշափման կետի կոորդինատները կգտնենք հետևյալ երկու պայմաններից՝ 1) այդ կետը գտնվում է շրջանագծի վրա և 2) շոշափողի և տված ուղղի անկյունային գործակիցները հավասար են։ բ)* $3x+4y+20=0$ *և* $3x+4y-5=0$։ **16*.** $d=6$։ Ցուցում: *Շոշափողի* d *երկարությունը այն ուղղանկյուն եռանկյան էջն է, որի գագաթները գտնվում են՝ 1) շրջանագծի կենտրոնում, 2) տված* M *կետում և 3) շոշափման կետում։ Հետևաբար,* d^2 *մեծությունը կորոշենք որպես ներքնաձիգի (շրջանագծի կենտրոնի և տված* M *կետի հեռավորության) քառակուսու և շրջանագծի շառավիղի քառակուսու տարբերություն՝* $d^2=[(7-2)^2+$

$+(8-3)^2]-14$, որտեղից՝ $d=6$։ **17.** ա) $(x-3)^2+y^2=9$ շրջանագիծն է, բ) $(x-2a)^2+y^2=4a^2$ շրջանագիծն է։ **18.** ա) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, բ) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, գ) $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{4}=1$, դ) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$, ե) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$, զ) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, է) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$։ **19.** ա) էլիպսի մեծ առանցքը հավասար է 10-ի, փոքր առանցքը՝ 8-ի, $F_1(3, 0)$, $F_2(-3, 0)$, $\varepsilon=0{,}6$, բ) էլիպսի մեծ առանցքը հավասար է 12-ի, փոքր առանցքը՝ 4-ի, $F_1(0, 4\sqrt{2})$, $F_2(0, -4\sqrt{2})$ (գծ. 148), $\varepsilon=\frac{2\sqrt{2}}{3}$։ **20.** ա) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, բ) $\sqrt{\frac{2}{5}}$, գ) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, դ) 0,8։ **21.** $\frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$։ **22.** $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ կամ $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{y^2}{(25/4)^2}=1$, նայած թե Ox առանցքի վրա մեծ առանցքն է գտնվում, թե փոքրը։ **23.** $\frac{(x-8)^2}{64}+\frac{(y+5)^2}{25}=1$։ **24.** $\frac{(x-8)^2}{64}+\frac{(y-5)^2}{320/11}=1$։ **25.** Ոչ մեկը, երկուսը, մեկը։ **26.** $x-3y+12=0$։ **27.** $(5, -4)$։ **28*.** $x+y-3=0$ և $x-5y-9=0$։ Ցուցում: Շոշափման կետի կոորդինատները նշանակենք x_1, y_1։ Այդ դեպքում շոշափողի հավասարումը կունենա $\frac{xx_1}{6}+\frac{yy_1}{3}=1$ տեսքը։ Այսպիսով, խնդիրը հանգում է շոշափման կետի կոորդինատները գտնելուն։ Քանի որ շոշափողն անցնում է (4, —1) կետով, ապա x_1, y_1 կոորդինատները պետք է բավարարեն $\frac{4x_1}{6}-\frac{y_1}{3}=1$ հավասարմանը։ Մյուս կողմից նույն x_1, y_1 կոորդինատները պետք է բավարարեն նաև էլիպսի հավասարմանը, ուրեմն՝ $\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{3}=1$։ Ստացված հավասարումների սիստեմը լուծելով x_1-ի և y_1-ի նկատմամբ, կգտնենք շոշափման կետերի կոորդինատները՝ (2, 1) և $\left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$։ x_1 և y_1 կոորդինատների համար գտած այդ արժեքները տեղադրելով շոշափողի հավասարման մեջ, կստանանք $x+y-3=0$ և $x-5y-9=0$ շոշափողները։ **29.** $x+3=0$ և $x-6y+9=0$։ **30*.** $3x-y\pm 7=0$։ Ցուցում: Շոշափման կետի կոորդինատները կարելի է որոշել հետևյալ երկու պայմաններից՝ 1) նրանք պետք է բավարարեն էլիպսի հավասարմանը և 2) որոնելի շոշափողների անկյունային գործակիցները պետք է՝ հավասար լինեն տված ուղիղի անկյունային գործակցին։ **31.** $x+y\pm 3=$

$=0$։ **32.** $x=\pm 12$։ **33.** $\frac{x^2}{60}+\frac{y^2}{24}=1$ կամ $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{24}=1$։ **34.** $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$։ **35.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$։ **36.** $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{80}=1$։ **37.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$։

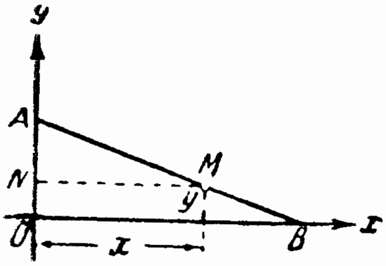


Գծ. 148

38*. $5x+6y-11=0$։ Ցուցում: *Եթե որոնելի լարի անկյունային գործակիցը նշանակենք* k_1, *իսկ այդ լարերին համալուծ տրամագծի անկյունային գործակիցը՝* k_2, *ապա, ինչպես հայտնի է,* k_1 *և* k_2 *անկյունային գործակիցները միմյանց հետ կապված կլինեն* $k_1=-\frac{5}{6k_2}$ *առնչությամբ։ Քանի որ յուրաքանչյուր տրամագիծ անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով, ապա* k_2 *անկյունային գործակից ունեցող տրամագծի հավասարումը կարելի է գրել* $y=k_2x$ *տեսքով։ Քանի որ տրամագիծը կիսում է այն լարերը, որոնց նա համալուծ է, ուստի նա պետք է անցնի որոնելի լարի միջնակետով. ուրեմն (1, 1) կոորդինատները պետք է բավարարեն* $y=k_2x$ *հավասարմանը, որտեղից կգտնենք՝* $k_2=1$ *և* $k_1=-\frac{5}{6}$։ *Հետևաբար, որոնելի լարի հավասարումը կլինի՝* $y-1=-\frac{5}{6}(x-1)$, *կամ՝* $5x+6y-11=0$։ **39.** $5x-4y-14=0$։ **40.** $\frac{48\sqrt{2}}{5}$։ **41*.** *Տրամագծի ծայրակետերը սիմետրիկ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, այսինքն՝ ծայրակետերի համապատասխան կոորդինատները բացարձակ մեծությամբ իրար հավասար են, բայց ունեն հակառակ նշաններ։ Հետևաբար, եթե տրամագծի մի ծայրակետի կոորդինատները նշանակենք* x_1, y_1, *ապա մյուսինը կլինեն* $-x_1$, $-y_1$։ *Ուրեմն, տրամագծի ծայրակետերում տարված շոշափողների հավասարումները կունենան* $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ *և* $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=-1$ *տեսքը, որտեղից ուղղակի երևում է, որ այդ ուղիղների անկյունային գործակիցները հավասար են։* **42.** $y=\pm 3x$։ **43.** $60°$։ **44.** $k_1=\frac{1}{2}$, $k_2=-1$; $4\sqrt{\frac{5}{3}}$; $\frac{8}{\sqrt{3}}$։ **45.** $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{2}$։ **46*.** $y=\pm\frac{b}{a}x$։ Ցուցում: *Դիցուք որոնելի տրամագծերի հավասարումներն են՝* $y=k_1x$ *և* $y=k_2x$։ *Երկու տրամագծերը սիմետրիկ դասավորություն ունեն կոորդինատային առանցքների նկատմամբ։ Հետևա-*

բար, $k_2=-k_1$ և $k_1k_2=k_1^2=-\frac{b^2}{a^2}$, որտեղից $k_1=+\frac{b}{a}$, $k_2=-\frac{b}{a}$։

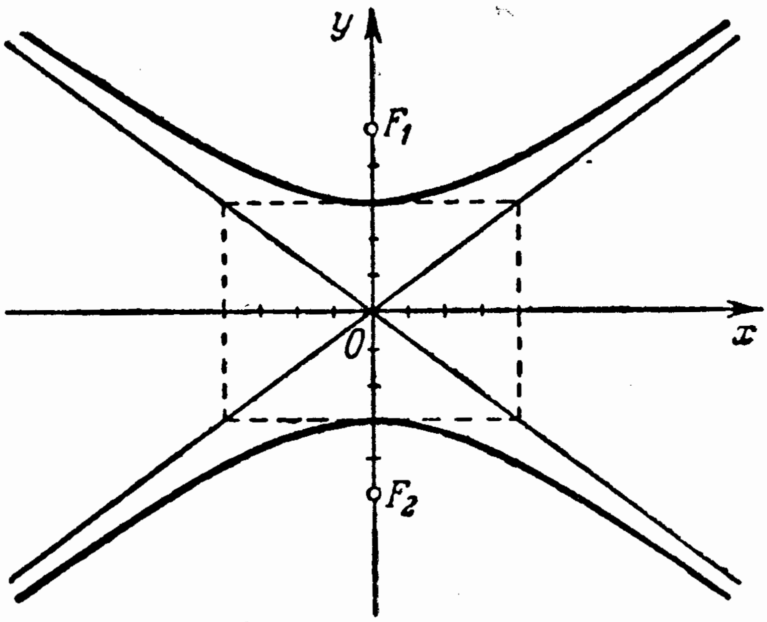
47. $y=\pm 3x$։ **48.** $\frac{\pi}{3}$։ **49*.** *Էլիպս է։* Ցուցում: *Ուղիղ անկյան կողմերն ընդունենք որպես կոորդինատային առանցքներ։ Նշանակենք* $AM=a$, $BM=b$ *(գծ. 149)։ Գծագրից գտնում ենք՝* $\frac{x}{a}=\sin \widehat{MAN}$, $\frac{y}{b}=\cos\widehat{MAN}$, *որտեղից, քառակուսի բարձրացնելով և գումարելով, կստանանք՝* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, *այսինքն՝* M *կետը էլիպս է գծում. եթե* M *կետը համընկնում է* AB *հատվածի միջնակետի հետ, ապա* $a=b$ *և ստանում ենք շրջանագիծ՝* $x^2+y^2=a^2$։ **50.** $r=\frac{5}{3-\sqrt{5}\cos\varphi}$։



Գծ. 149

51. *ա)* $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$, *բ)* $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{13}=1$, *գ)* $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$, *դ)* $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{28}=1$, *ե)* $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$, *զ)* $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1$։ **52.** *ա) Հիպերբոլի իրական առանցքը հավասար է 24-ի, կեղծ առանցքը՝ 10-ի,* $F_1(13, 0)$, $F_2(-13, 0)$, $\varepsilon=\frac{13}{12}$։ *բ) Հիպերբոլի իրական առանցքը հավասար է 6-ի, կեղծ առանցքը՝ 8-ի,* $F_1(0, 5)$, $F_2(0, -5)$, $\varepsilon=\frac{5}{3}$ *(գծ. 150)*։ **53.** *ա)* $\varepsilon\cos\frac{\alpha}{2}=1$, *բ)* $\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$։ **54*.** $5y\pm 2x=0$։ Ցուցում: *Հիպերբոլի հետ տրամագծի հատման կետերի կոորդինատները կգտնենք հետևյալ երկու պայմաններից՝ 1) այդ կետերը գտնվում են հիպերբոլի վրա և 2) այդ կետերի հեռավորությունները հիպերբոլի կենտրոնից հավասար են* $\sqrt{29}$։ **55.** $r_1=6$, $r_2=14$։ **56.** $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$։ **57.** $x-y-2=0$, $x-y+2=0$։ **58.** $x-y-1=0$, $9x+5y-23=0$։ **59.** $3x-2y\pm 4=0$։ **62*.** *1)* b, *2) Հիպերբոլի կամայական կետի կոորդինատները նշանակելով* (x, y), *իսկ այդ կետի շեղումներն ասիմպտոտներից՝* d_1, d_2, *կունենանք՝* $d_1=\frac{bx+ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $d_2=\frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b_2}}$, *որտեղից՝* $|d_1\cdot d_2|=\left|\frac{b^2x^2-a^2y^2}{a^2+b^2}\right|=\frac{a^2b^2}{c^2}$։ **63.** $a=\frac{p}{\varepsilon^2-1}$, $b=\frac{b}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}$։ **64.** $\frac{x^2}{15}-$

$-\frac{y^2}{6}=1$։ **65**, $2x-y\pm 1=0$։ **66.** $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{10}=1$։ **67.** $\varepsilon=\sqrt{3}$։ **68.** $2x-y=0$ *և* $x-3y=0$, *ինչպես նաև* $2x+y=0$ *և* $x+3y=0$։ **69.** $y=\pm\frac{4}{3}x$։ **70.** $y=\pm\frac{5}{3}x$։ **71.** *ա)* $x^2-y^2=8$, *բ)* $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$, *գ)* $\frac{x^2}{25}-$



Գծ. 150

$-\frac{y^2}{9}=1$։ **72.** $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ *հիպերբոլի աջ ճյուղը*։ **73.** $x^2-y^2=a^2$, *եթե տված կետերի կոորդինատներն են՝* $(a, 0)$ *և* $(-a, 0)$։ **74.** $mx+x_0^2y=2mx_0$։ **75.** *ա)* $y^2=16x$, *բ)* $y^2=8x$, *գ)* $y^2=-8x$, *դ)* $x^2=12y$, *ե)* $x^2=8y$, *զ)* $x^2=-8y$, *է)* $y^2=6x-9$, *ը)* $x^2=6y-9$։ **76.** *ա)* $(y-b)^2=2p(x-a)$, *բ)* $(y-b)^2=-2p(x-a)$, *գ)* $(x-a)^2=2p(y-b)$, *դ)* $(x-a)^2=-2p(y-b)$։ **77.** $y^2=-4x$։ **78.** $(x+2)^2=-32(y-1)$։ **79.** $2p$։ **80***. $3x-y-11=0$։ Ցուցում: *Լարի հավասարումը գրենք* $y-1=k(x-4)$ *տեսքով*։ k *անկյունային գործակից ունեցող լարերին համալուծ տրամագծի հավասարումը կլինի՝* $y=\frac{3}{k}$։ *Քանի որ այդ տրամագիծը պետք է անցնի (4, 1) կետով, ապա կունենանք՝* $1=\frac{3}{k}$, *որտեղից որոշում ենք* $k=3$։ *Այսպիսով, ստանում ենք լարի որոնելի հավասարումը՝* $y-1=3(x-4)$, *կամ՝* $3x-y-11=0$։ **81.** $4x+y+3=0$։ **82.** $y=\pm 4$։ **83.** $2x-2y+5=0$ *և* $8x+4y+5=0$։ **84.** $(9, 6\sqrt{3})$։ **85.** $x+y+1=0$ *և* $x+3y+9=0$։ **86.** *ա)* $2x-y+2=0$, *բ)* $x+y+4=0$։ **87.** *Պարաբոլ է, որի ֆոկուսը գտնվում է տված կետում և որի համար որպես դիրեկտրիսա ծառայում է տված ուղիղը*։

1. ա) (—2, —6), բ) (—2, 4), գ) (6, —6), դ) (6, 4)։ **2.** (12, —22), (—12, 22)։ **3.** (3, —3), (—3, 3)։ **4.** (—7, 5)։ **5.** ա) $x=X$, $y=-Y$, բ) $x=-X$, $y=-Y$։ **6.** $x=Y$, $y=X$։ **7.** $X=+2$, $Y=0$։ **8.** 135° կամ 315° անկյունով։ Այն ժամանակ M կետի կոորդինատները համապատասխանորեն կլինեն՝ $X=-\sqrt{2}$, $Y=-\sqrt{2}$ և $X=+\sqrt{2}$, $Y=+\sqrt{2}$։ **9.** Հավասարումն իր տեսքը չի փոխի։ **10.** $XY=-\frac{a^2}{2}$։ **11.** $X^2-Y^2=2$. **12.** $Y=4X^2$։ Գագաթն է $O_1(1, 1)$։ Նոր կոորդինատային առանցքներն ունեն հին առանցքների ուղղությունները։ **13.** $Y=-3X^2$։ Գագաթն է՝ $O_1\left(\frac{5}{6}, \frac{25}{12}\right)$։ Նոր կոորդինատային առանցքներն ունեն հին առանցքների ուղղությունները։ **14.** $XY=-5$։ Կենտրոնն է՝ (—4, 2)։ Նոր կոորդինատային առանցքներն ունեն հին առանցքների ուղղությունները։ **15.** ա) $Y^2=-\frac{3}{2}X$, նոր սկզբնակետն է՝ $O_1\left(\frac{11}{6}, -\frac{3}{2}\right)$, բ) $Y^2=4X$, նոր սկզբնակետն է՝ $O_1(-4, 4)$։ **16.** $\left(y+\frac{N}{2M}\right)^2=\frac{1}{M}\left(x-\frac{4MP-N^2}{4M}\right)$. գագաթի կոորդինատներն են՝ $\left(\frac{4MP-N^2}{4M}, -\frac{N}{2M}\right)$, սիմետրիայի առանցքը զուգահեռ է Ox առանցքին։ **17.** ա) $(x-1)^2=\frac{1}{2}(y-6)$, բ) $(x+3)^2=-(y-2)$, գ) $(y+4)^2=2(x+2)$, դ) $(y+1)^2=-\frac{1}{2}(x+4)$: **18.** ա) $\frac{(x+2)^2}{4}+y^2=1$. էլիպս՝ (—2, 0) կենտրոնով և 2 ու 1 կիսաառանցքներով, բ) $\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$ էլիպս՝ (2,3) կենտրոնով և $2\sqrt{2}$ ու 4 կիսաառանցքներով, գ) $\frac{(x-4)^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$. հիպերբոլ՝ (4, 0) կենտրոնով, իրական կիսաառանցքը հավասար է 4-ի, կեղծը՝ 2-ի, դ) $(y-3)^2-(x-1)^2=8$. հավասարասրուն հիպերբոլ՝ (1, 3) կենտրոնով և $2\sqrt{2}$ կիսաառանցքներով, իրական առանցքը զուգահեռ է օրդինատների առանցքին։ **19.** ա) $x^2-y^2=1$, բ) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$, գ) $y^2=\frac{\sqrt{2}}{2}x$, դ) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, ե) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$, զ) $13y^2-\frac{108}{\sqrt{13}}x=0$։ (Ամեն տեղ x-ը և y-ը կոորդինատներն են վերջնական սիստեմում)։ **20.** Երկրորդ կարգի։

Էջ 181–182 (I մաս, VI գլուխ)

1. -4; 8; -48; ab; $-2(x^3+y^3)$; $(x-y)(y-z)(z-x)$։ **2.** *ա)* $x-1$; $y=0$; $z=1$; *բ)* $x=a$; $y=1$; $z=-1$; *գ)* $x=7k$, $y=-2k$, $z=-5k$, *որտեղ* k-*ն կամայական է,* *դ)* $x=y=z=0$, *ե)* $x={}^1/_5\,(9-7z)$, $y={}^1/_5\,(1+2z)$, z-*ը կամայական է,* *զ) անհամատեղ սիստեմ է։* **3.** *4 քառ. միավոր։* **4.** *Այո՛, գտնվում են։* **5.** $x+4y-11=0$։ **6.** $h_c=\pm\dfrac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}$։ **7.** $\pm\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$։
8. *Ժամացույցի սլաքին հակառակ։* **9.** *ա)* $\cos(\alpha+\beta)$; *բ)* $\sin(\alpha+\beta)$; *գ)* 0։
10. $ACF+2BDE-AE^2-CD^2-FB^2$: **11.** *ա)* $x_1=2$, $x_2=3$; *բ)* $x_1=2$, $x_2=-\dfrac{11}{7}$, *գ)* $x=2$։

Էջ 196–197 (II մաս, 1 գլուխ)

2. *Կետը գտնվում է՝ ա)* Ox *առանցքի վրա,* *բ)* Oy *առանցքի վրա,* *գ)* yOz *հարթության վրա,* *դ)* xOz *հարթության վրա։* **3.** *ա)* xOy *հարթության նկատմամբ՝* $(2, -3, 1)$ *և* $(a, b, -c)$, yOz *հարթության նկատմամբ՝* $(-2, -3, -1)$ *և* $(-a, b, c)$; xOz *հարթության նկատմամբ՝* $(2, 3, -1)$ *և* $(a, -b, c)$, *բ)* Ox *առանցքի նկատմամբ՝* $(2, 3, 1)$ *և* $(a, -b, -c)$, Oy *առանցքի նկատմամբ՝* $(-2, -3, 1)$, *և* $(-a, b, -c)$, Oz *առանցքի նկատմամբ՝* $(-2, 3, -1)$, $(-a, -b, c)$, *գ) կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ՝* $(-2, 3, 1)$ *և* $(-a, -b, -c)$։ **4.** $S\left(0,\ 0\ \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $P_1\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}, 0\right)$, $P_2\left(-\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}, 0\right)$, $P_3\left(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{a}{2}, 0\right)$, $P_4\left(\dfrac{a}{2}, -\dfrac{a}{2}, 0\right)$։
5. $OA=\sqrt{50}$, $d_x=\sqrt{34}$, $d_y=\sqrt{41}$, $d_r=5$։ **6.** $d=3$։ **8*.** $r={}^7/_2$։ Ցուցում: *Նախ գտնում ենք սֆերայի կենտրոնի կոորդինատները, այն դիտելով որպես տված կետերից հավասարապես հեռացած կետ։* **9.** $(1, {}^5/_3, {}^1/_3)$։
10. $\sqrt{149}$, $2\sqrt{14}$, 13; $(6, 3, {}^{20}/_3)$։ **11.** $B\left(10, 0, \dfrac{13}{5}\right)$։ **12.** *Մի սիստեմի նկատմամբ՝* $(-3, -1, 3)$, *մյուս սիստեմի նկատմամբ՝* $(3, 1, -3)$։ **13.** *Գոյություն չունի։* **14.** $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$։ **15.** $\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$։ **16.** $\cos\alpha=\pm{}^2/_3$, $\cos\beta=\mp{}^2/_3$, $\cos\gamma=\mp{}^1/_3$։ **17.** $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\pm{}^1/_3\sqrt{3}$։ **18.** $R=11$, $\cos\alpha=-$

$-{}^6/_{11}$, $\cos\beta=-{}^2/_{11}$, $\cos\gamma=-{}^9/_{11}$։ **19.** $\gamma=60^\circ$, $A(3,\ 3\sqrt{2},\ 3)$։ **20.** $r=10\sqrt{3}$, $z=-\sqrt{11}$, $\cos\beta={}^4/_{15}\sqrt{3}$, $\cos\gamma=-{}^1/_{30}\sqrt{33}$։ **21.** $\cos\varphi_1={}^3/_7\sqrt{5}$, $\cos\varphi_2={}^1/_7\sqrt{13}$, $\cos\varphi_2={}^2/_7\sqrt{10}$։ **22*.** $d=13$, $\cos\alpha=\pm{}^3/_{13}$, $\cos\beta=\mp{}^4/_{13}$, $\cos\gamma=\pm{}^{12}/_{13}$։ Ցուցում: *Այդ կետերով անցնող ուղիղի ուղղորդ կոսինուսները գտնելու համար կոորդինատների սկզբնակետը տեղափոխում ենք* A *կետը, առանցքների ուղղությունները պահպանելով։ Գտնում ենք* B *կետի կոորդինատները նոր սիստեմի նկատմամբ՝* $X=5-2=3$, $Y=1-5=-4$, $Z=11+1=12$։ *Այժմ հեշտ է տեսնել, որ* $\cos\alpha=\pm{}^3/_{13}$, $\cos\beta=\mp{}^4/_{13}$, $\cos\gamma=\pm{}^{12}/_{13}$։ **23.** $d=5$, $\cos\alpha=\pm{}^4/_5$, $\cos\beta=\mp{}^3/_5$, $\cos\gamma=0$։ **24.** 60°։ **25.** 90°։

Էջ 236—238 (II մաս, II գլուխ)

1. $r=r_1+r_0$ *կամ՝* $x=x_1+a$, $y=y_1+b$, $z=z_1+c$։ **2*.** $x=x_1\cos(x,\ x_1)+y_1\cos(x,\ y_1)+z_1\cos(x,\ z_1)$, $y=x_1\cos(y,\ x_1)+y_1\cos(y,\ y_1)+z_1\cos(y,\ z_1)$, $z=x_1\cos(z,\ x_1)+y_1\cos(z,\ y_1)+z_1\cos(z,\ z_1)$։ Ցուցում: $ix+jy+kz=i_1x_1+j_1y_1+k_1z_1$, *որտեղ* i, j, k-*ն՝ հին սիստեմի երեք հիմնական միավոր վեկտորներն են, իսկ* i_1, j_1, k_1-*ը՝ նոր սիստեմի*։ **3.** $x=x_1\cos(x,\ x_1)+y_1\cos(x,\ y_1)+z_1\cos(x,\ z_1)+a$, $y=x_1\cos(y,\ x_1)+y_1\cos(y,\ y_1)+z_1\cos(y,\ z_1)+b$, $z=x_1\cos(z,\ x_1)+y_1\cos(z,\ y_1)+z_1\cos(z,\ z_1)+c$։ **5.**

$$r=\frac{r_1+r_2+r_3}{3};\qquad x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\qquad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\quad z=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}.$$

6.

$$r=\frac{m_1r_1+m_2r_2+m_3r_3}{m_1+m_1+m_3},\qquad x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3},$$

$$y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3},\qquad z=\frac{m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

8. $A=\sqrt{3}$, $\alpha=\beta=\gamma=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$։ **9.** 2։ **10*.** Ցուցում: *Զուգահեռագծի անկյունագծերն են՝* $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ *և* $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$։ **13.** 135°։ **14.** 60°։ **15*.** Ցուցում: xOy *հարթության մեջ վերցնել երկու* **a** *և* **b** *միավոր վեկտորներ, որոնք աբսցիսների առանցքի հետ կազմում են* α *և* $-\beta$ *անկյուններ, և կազմել* **ab** *արտադրյալը*։ **16.** *Չի կարելի*։ **17*.** Ցուցում: *Դիտարկել* xOy *հարթության մեջ գտնվող և աբսցիսների առանցքի հետ* α *ու* β *անկյուններ կազմող երկու միավոր վեկտորների վեկտորական արտադրյալը*։ **18.** $3\sqrt{10}$։

19. ${}^1/_2\sqrt{1562}$։ **20.** ${}^1/_2\sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}^2}$։

21. $\sin C = \dfrac{\sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}$։ **22.** 1։

26. 22,5։ **27.** $^{45}/_{109}\sqrt{109}$։ **28.** $-58i-20j+k, -80$։ **29*.** $\dfrac{|(A-C)(B\times D)}{|B\times D|} = {}^7/_6\sqrt{6}$։ Ցուցում: *Որոնելի հեռավորությունն իրենից կներկայացնի այնպիսի զուգահեռանիստի բարձրությունը, որի հիմքը* B *և* D *վեկտորներով որոշվող զուգահեռագիծն է, իսկ երրորդ կողը՝* A—C *վեկտորն է։* **30*.** $\dfrac{(B-A)\times C|}{C} = \dfrac{20\sqrt{2}}{11}$։ Ցուցում: *Որոնելի հեռավորությունն իրենից ներկայացնում է այն զուգահեռագծի բարձրությունը, որի հիմքը* C *վեկտորն է, իսկ մյուս կողմը՝* A—B *վեկտորը։*

էջ 246—247 *(*II մաս, III գլուխ*)*

1. $x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z-2=0$։ **2.** $(1, -2, 2)$, $R=4$։ **3.** $(1, 0, 0)$, $R=1$։ **4.** $\left(0, \dfrac{5}{4}, 0\right)$, $R=\dfrac{1}{4}\sqrt{89}$։ **5.** $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z=0$։ **6.** $x^2+y^2+z^2-2x=0$։ **7.** $x^2+y^2-x+1=0$։ **8.** *Էլիպս։* **9.** *Գլան, որի ծնիչները զուգահեռ են* Oz *առանցքին, իսկ ուղղորդ գիծն է՝* $x^2+y^2+2x=0$, $z=0$։

էջ 273—276 *(*II մաս, IV գլուխ*)*

1. *ա) Ո՛չ, բ) անցնում է, գ) ո՛չ, դ) անցնում է, ե) ո՛չ։* **2.** *ա)* $\cos\alpha={}^2/_7$, $\cos\beta={}^3/_7$, $\cos\gamma={}^6/_7$, $p=5$, *բ)* $\cos\alpha={}^{21}/_{79}$, $\cos\beta={}^{30}/_{79}$, $\cos\gamma=-{}^{70}/_{79}$, $p={}^{84}/_{79}$, *գ)* $\cos\alpha=-{}^1/_3$, $\cos\beta={}^2/_3$, $\cos\gamma=-{}^2/_3$, $p=7$։ **3.** $x=y=z=10$։ **4.** $(\pm\sqrt{2}, 1, 1)$։ **5.** $2x+9y-6z-121=0$։ **6*.** Ցուցում: *Որոնելի հարթության հավասարումը կլինի՝* $A_1(x-8)+B_1(x+7)+C(z-5)=0$, *ընդ որում* $n\{A_1, B_1, C_1\}$ *վեկտորը կարելի է վերցնել* $\overrightarrow{AB}\{6, -6, 7\}$ *վեկտորին հավասար, այսինքն՝ կարելի է ընդունել՝* $A_1=6$, $B_1=-6$, $C_1=7$։ *Այդ թվերը տեղադրելով հարթության հավասարման մեջ, կստանանք՝* $6x-6y+7z-125=0$։ **7.** $10x+2y+11z-148=0$։ **8.** $2, -4, {}^1/_2$։ **9.** $x+y+z-2=2$։ **10.** *ա) Հարթությունը զուգահեռ է* Oz *առանցքին, բ) հարթությունը զուգահեռ է* yOz *հարթությանը, գ) հարթությունն անցնում է* Ox *առանցքով։* **11.** *ա)* $3x+2z-5=0$, *բ)* $y-3z=0$, *գ)* $y-2=0$։ **12.** *ա)* $3x+5y-7z-100=0$, *բ)* $15x+17y-42z+238=0$։ **13.** *ա)* 45°, *բ)* 60°, *գ)* $\cos\varphi={}^8/_{21}$։ **14.** *ա)* $3x-7y+5z=0$, *բ)* $3x-7y+5z-66=0$, *գ)* $3x-7y+5z-39=0$, *դ)* $3x-7y+5z-9=0$։ **15.** *ա)* $5x+7y+3=0$, *բ)* $y-z+7=0$, *գ)* $5x+7z-46=0$։ **16.** $3x+y+2z-23=0$։ **17.** $2x+3y+z=0$։ **18.** *ա)* $(5, -7, 8)$, *բ)* $(-10, 0, 2)$, *գ)* $(3, -2, -5)$։ **19.** $|d|=1$։ **20.**

$(0,\ -{}^{73}/_{282},\ 0)$ և $(0,\ {}^{78}/_{12},\ 0)$։ **21**. $35y+12z=0$ և $3y-4z=0$։ **22**. $20x-4y-5z+133=0$ և $20x-4y-5z-119=0$։ **23**. ա) 3, բ) 5։ **24***. $45x+184y+482z-553=0$ և $96x-13y-4z-1106=0$։ Ցուցում: *Որոնելի հարթությունները այն կետերի երկրաչափական տեղերն են, որոնք հավասարապես են հեռացած տված երկու հարթություններից։ Որոնելի հարթություններից մեկի կետերի համար տված երկու հարթություններից ունեցած շեղումները բացարձակ մեծությամբ հավասար են և ունեն նույն նշանը, իսկ մյուս հարթության կետերի համար՝ բացարձակ մեծությամբ հավասար են, բայց ունեն հակառակ նշաններ։ Այդ պատճառով էլ հարթություններից մեկի հավասարումը կլինի՝*

$$\frac{3x+2y+6z-35}{\sqrt{9+4+36}}=\frac{21x-30y-70z-237}{\sqrt{441+900+4900}},$$

իսկ մյուսինը՝ $$\frac{3x+2y+6z-35}{\sqrt{9+4+36}}=-\frac{21x-30y-70z-237}{\sqrt{441+900+4900}}$$ ։ *Տարրական ձևափոխություններից հետո կստանանք պատասխանում գրված հավասարումները*։ **25**. $4x-50y-22z+675=0$ և $46x+50y+122z+375=0$։ **26**.

$(a_1-a)(x-a)+(b_1-b)(y-b)+(c_1-c)(z-c)=0$։ **27**. $\begin{vmatrix} x & z & 1 \\ x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}=0$։

28. $z_1y-y_1z=0$։ **29**. $y-y_1=0$։ **30**. $Ax+By-(A+B)z=0$, *որտեղ* A-ն և B-ն *կամայական են (բայց միաժամանակ հավասար չեն զրոյի)*։ **31**.

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$։ **32**. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0$։ **33**. $x=7k,\ y=-2k,\ z=-5k$,

որտեղ k-ն *կամայական է*։ **34**. $x=\frac{9-7z}{5},\ y=\frac{1+2z}{5}$, *իսկ* z-ը *կամայական*

է։ **35**. *Հատման կետ չկա*։ **36**. $(r-r_1)ab=0$, $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix}=0$։

37. $(r-r_1)(r_2-r_1)a=0$, $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0$։

Էջ 299—304 (II մաս, V գլուխ)

1. ա) *Ուղիղն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով*, բ) *ուղիղը զուգահեռ է* Oz *առանցքին*, գ) *ուղիղը զուգահեռ է* xOz *հարթությանը*, *դ) ուղիղը զուգահեռ է* Ox *առանցքին, ե) ուղիղը համընկնում է* Oy *առանցքի հետ, զ) ուղիղն ուղղահայաց է* Ox *առանցքին և հատվում է նրա հետ, է) ուղիղը գտնվում է* yOz *հարթության մեջ։* **2***. $D=3$։ Ցուցում: *Ուղիղի և* Oz *առանցքի հատման կետի կոորդինատները կլինեն* $(0, 0, Z_1)$, *որտեղ* z_1*-ն անհայտ կոորդինատ է։ Այդ կոորդինատները պետք է տված երկու հավասարումներին էլ բավարարեն, քանի որ երկու հարթություններն էլ* Oz *առանցքը պետք է հատեն միևնույն կետում։* $(0, 0, z_1)$ *արժեքները տեղադրելով տված հավասարումների մեջ (ընթացիկ կոորդինատների փոխարեն),* z_1*-ի ու* D*-ի նկատմամբ կստանանք երկու հավասարում՝* $2z_1-6=0$, $-z_1+D=0$, *որտեղից և կգտնենք՝* $D=3$։ **3***. $B=-6$, $D=-27$։ Ցուցում: *Քանի որ ուղիղը պետք է գտնվի* xOy *հարթության մեջ, ապա նա հատում է* Ox *և* Oy *առանցքները։ Այդ առանցքների հետ ուղիղի հատման կետերի կոորդինատները կլինեն՝* $(x_1, 0, 0)$, $(0, y_1, 0)$։ *Այս արժեքները տեղադրելով տված հավասարումների մեջ, կստանանք չորս հավասարումներ՝* $x_1-9=0$, $3x_1+D=0$, $-2y_1-9=0$, $By_1+D=0$, *որտեղից գտնում ենք՝* $B=-6$, $D=-27$։ **4***. *ա)* $D=0$, $D_1=0$, *բ)* $A=0$, $A_1=0$, *գ)* $\frac{B}{B_1}=\frac{D}{D_1}$, *դ)* $C=D=0$, $C_1=D_1=0$։ Ցուցում: *գ) Որպեսզի ուղիղն* Oy *առանցքը հատի, պետք է երկու հարթությունն էլ* Oy *առանցքը հատեն միևնույն կետում, այսինքն՝ պետք է* $(0, y_1, 0)$ *կոորդինատները (որտեղ* y_1*-ն անհայտ կոորդինատ է) երկու հավասարումներին էլ բավարարեն։ Այդ արժեքները տեղադրելով ուղիղի հավասարումների մեջ, ստանում ենք՝* $By_1+D=0$, $B_1y_1+D_1=0$, *որտեղից՝* $y_1=-\frac{D}{B}$, $y_1=-\frac{D_1}{B_1}$ *և, հետևաբար՝* $\frac{B}{B_1}=\frac{D}{D_1}$։ **5**. A *կետը գտնվում է տված ուղիղի վրա, իսկ* B *կետը՝ ոչ։* **7**. $4x+5y-32=0$, $11x+10z-78=0$, $11y-8z-8=0$։ Ցուցում: *Տրված ուղիղն* xOy *հարթության վրա պրոյեկտող հարթությունը պետք է բավարարի հետևյալ երկու պայմաններին՝ 1) նա պետք է անցնի տված ուղիղով, 2) նա պետք է ուղղահայաց լինի* xOy *հարթությանը կամ, որ նույնն է, զուգահեռ լինի* Oz *առանցքին։ Տրված երկու հավասարումներից արտաքսենք* z*-ը, որի համար երկրորդ հավասարումը բազմապատկենք 2-ով և գումարենք առաջինին։ Այդպիսով, կստանանք* $4x+5y-32=0$ *հավասարումը։ Ստացված հավասարումը՝ պրոյեկտող հարթության հավասարումն է, որովհետև՝ 1) նա տված երկու հավասարումների հետևանք է և, այդ պատճառով, տրված երկու հավասարումներին բավարարող* (x, y, z) *կոորդինատների արժեքները բավարարում են նաև ստացված հավասարմանը, որ նշանակում է՝ այդ հարթությունն անցնում է տված ուղիղով. 2) ստացված հարթությունը զուգահեռ է* Oz *առանցքին (հավասարումից բացակայում է* z *կոորդինատը)։ Տված ուղիղը մյուս կոորդինատային հարթությունների վրա պրոյեկտող հարթությունների հավասարումները կգտնվեն նման եղանակով։*

8. $\begin{cases} 9x-4y+13=0, \\ z=0, \end{cases}$ $\begin{cases} 15x-8z+3=0, \\ y=0, \end{cases}$ $\begin{cases} 5y-6z-14=0, \\ x=0։ \end{cases}$

9*. $x+y+z=0$, $y-z-1=0$։ Ցուցում: *Տված ուղիղով անցնող ամեն մի հարթության հավասարում կարելի է գրել այսպես՝* $x+y-z-1+\lambda(x-y+$

$+z+1)=0$ կամ՝ $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z-(1-\lambda)=0$։ Այս հարթություններից մենք պետք է ընտրենք այն, որը մեր ուղիղը պրոյեկտում է $x+y+z=0$ հարթության վրա։ Քանի որ պրոյեկտող հարթությունը պետք է ուղղահայաց լինի պրոյեկցիայի հարթությանը, ուստի λ-ն պետք է բավարարի հետևյալ պայմանին՝ $(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0$, որտեղից գտնում ենք՝ $\lambda=-1$։ Հետևաբար, պրոյեկտող հարթության հավասարումը կլինի՝ $y-z-1=0$։ Քանի որ ուղիղի պրոյեկցիան պետք է գտնվի այն հարթության վրա, որի վրա պրոյեկտվում է այդ ուղիղը, այն է՝ $x+y+z=0$ հարթության վրա, ուստի այս հավասարումը միացնելով պրոյեկտող հարթության մեր գտած հավասարմանը, կստանանք պրոյեկցիայի հավասարումները՝ $x+y+z=0$, $y-z-1=0$։ **10.** $2x+2y+z-15=0$, $4x-9y+10z-9=0$։ **11.** ա) $\cos\alpha=\frac{4}{13}$, $\cos\beta=-\frac{12}{13}$, $\cos\gamma=\frac{3}{13}$, բ) $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{1}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{3}$։ **12.** ա) $\frac{x+5}{3}=\frac{y+8}{2}=\frac{z}{1}$, բ) $\frac{x+5}{2}=\frac{y-7}{6}=\frac{z}{1}$, գ) $\frac{x}{1}=\frac{y-4}{0}=\frac{z-12}{3}$։ **13.** $\cos(L_1, L_2)={}^{20}/_{21}$, $\cos(L_2, L_3)={}^{106}/_{119}$, $\cos(L_3, L_1)={}^{38}/_{51}$։ **14.** $\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{30}}$, $\cos\beta=-\frac{2}{\sqrt{30}}$, $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{30}}$։ **15.** $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{6}}$։ **16.** $\cos\varphi={}^{4}/_{21}$։ **17.** ա) $x-2=0$, $y+3=0$, բ) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+8}{5}$։ **18.** $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+1}{3}$։ **19.** $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$։ **20.** ա) Գտնվում են, բ) ըրտընվում են, գ) չեն գտնվում։ **21.** $y=22x+71$, $z=2x-3$։ **22.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-3}$։ **23.** $x=3z-1$, $y=-5z-{}^{17}/_{4}$։ **24.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{\pm\sqrt{6}}=\frac{z+1}{\pm\sqrt{6}}$։ **25.** $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ a_1-a & b_1-b & c_1-c \end{vmatrix}=0$,

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ a_2-a & b_2-b & c_2-c \end{vmatrix}=0։$$

26. $\frac{x-a}{ap_1}=\frac{y-b}{bp_1}=\frac{z-c}{-(am_1+bn_1)}$։

27. $\begin{vmatrix} y-nz-b & -(x-mz-a) & (x-a)n-(y-b)m \\ m & n & 1 \\ m_1 & n_1 & 1 \end{vmatrix}=0,$

$$\begin{vmatrix} y-n_1z-b_1 & -(x-m_1z-a_1) & (x-a_1)n_1-(y-b_1)m_1 \\ m & n & 1 \\ m_1 & n_1 & 1 \end{vmatrix}=0:$$

28. $(1, 1, 1)$: **29.** $(5, -1, 2)$: **30.** $\sin\varphi = {}^3/_{133}$: **31.** *ա)* $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z-3}{-8}$, *բ)* $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{11}=\dfrac{z-3}{0}$, *գ)* $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{1}$: **32.** $4x-y+3z-11=0$: **33.** ${}^1/_2\sqrt{6}$:

34*. ${}^2/_{13}\sqrt{26}$: Ցուցում: *Պետք է II ուղիղի վրա գտնվող կետից տանել III ուղիղը՝ զուգահեռ I ուղիղին, այնուհետև կազմել II և III ուղիղներով անցող հարթության հավասարումը և, վերջապես, գտնել I ուղիղի կետի հեռավորությունն այդ հարթությունից:* **35.** $p=-5$: **36.** $2x+3y+z+5=0$: **37.** $x-3y-z-10=0$: **38.** $x-3y+2z-4=0$: **39.** $x-2y-2z+2=0$: **40.** $2x+y-1=0$: **41.** $\dfrac{x+1}{48}=\dfrac{y}{37}=\dfrac{z-4}{4}$: **42.** $x+y+z=0$: **43.** $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$: **44.** $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ a_1-a & b_1-b & c_1-c \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix}=0$:

45. $(A_1m+B_1n+C_1p)(Ax+By+Cz+D)-(Am+Bn+Cp)(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0$: **46.** $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix}=0$: **47.** $\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0$:

48. $\dfrac{x-a}{m}=\dfrac{y-b}{n}=\dfrac{z-c}{p}$, *որտեղ՝* $m=\begin{vmatrix} a-a_1 & b-b_1 & c-c_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ 0 & -C & B \end{vmatrix}$,

$$n=\begin{vmatrix} b-b_1 & c-c_1 & a-a_1 \\ n_1 & p_1 & m_1 \\ 0 & -A & C \end{vmatrix}, \quad p=\begin{vmatrix} c-c_1 & a-a_1 & b-b_1 \\ p_1 & m_1 & n_1 \\ 0 & -B & A \end{vmatrix}:$$

49. $m(x-a)+n(y-b)+p(z-c)=0$:

էջ 323—324 (II մաս, VI գլուխ)

1. $x^2=y^2+z^2$։ **2.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=c$։ **3.** $Ah^2x^2+2Bh^2xy+Ch^2y^2+2Dhxz+2Ehyz+Fz^2=0$։ **4.** *Կոն, որն առաջացել է* $y=x$, $z=0$ *ուղիղն* Ox *առանցքի շուրջը պտտելով։* **5.** *Կոն, որի գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, իսկ ուղղորդ գիծն է՝* $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, $z=1$։ **6.** *Էլիպսոիդ, որն առաջանում է* $x^2+\frac{z^2}{1/4}=1$, $y=0$ *էլիպսն* Oz *առանցքի շուրջը պտտելով։* **7.** *Միախոռոչ հիպերբոլոիդ, որն առաջանում է* $x^2-z^2=1$, $y=0$ *հիպերբոլն* Oz *առանցքի շուրջը պտտելով։* **8.** *Երկխոռոչ հիպերբոլոիդ, որն առաջանում է* $x^2-y^2=4$, $z=0$ *հիպերբոլն* Ox *առանցքի շուրջը պտտելով։* **9.** *Պարաբոլոիդ, որն առաջանում է* $z=x^2$ $y=0$ *պարաբոլն* Oz *առանցքի շուրջը պտտելով։* **10.** $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-\frac{2}{3}=0$։

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Հեղինակի առաջաբանը տասներեքերորդ հրատարակության առթիվ . . . 3
Հրատարակչության կողմից 4
Ներածություն 5

Առաջին մաս

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԸ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Գլուխ I. Կոորդինատների մեթոդը 7
§ 1. Ուղղությամբ օժտված հատվածներ 7
§ 2. Կոորդինատներն ուղիղ գծի վրա 11
§ 3. Երկու կետերի հեռավորությունն ուղիղ գծի վրա . . . 12
§ 4. Ուղղանկյուն կոորդինատները հարթության վրա . . . 12
§ 5. Երկու կետերի հեռավորությունը հարթության վրա . . 16
§ 6. Հատվածի բաժանումը տվյալ հարաբերությամբ . . 18
§ 7. Երկու առանցքներով կազմված անկյունը 21
§ 8. Պրոյեկցիաների տեսության հիմնական դրույթները . . 24
§ 9. Ուղղությամբ օժտված հատվածի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա 28
§ 10. Եռանկյան մակերեսը 30
§ 11. Բևեռային կոորդինատներ 32
Վարժություններ 36

Գլուխ II. Գծեր և նրանց հավասարումները 39

§ 1. Տրված գծերի հավասարումները կազմելը 39
§ 2. Հավասարումների երկրաչափական իմաստը 41
§ 3. Երկու հիմնական խնդիր 44
§ 4. Երկու գծերի հատումը 44
§ 5. Գծերի պարամետրական հավասարումները 45
§ 6. Գծերի հավասարումները բևեռային կոորդինատներով . . 46
Վարժություններ 49

Գլուխ III. Ուղիղ գիծ 49
§ 1. Ուղիղի անկյունային գործակիցը 53

§ 2. Ուղիղ գծի հավասարումն անկյունային գործակցով . . . 54
§ 3. Երկու փոփոխականների միջև առաջին աստիճանի հավասարման երկրաչափական իմաստը 56
§ 4. $Ax+By+C=O$ առաջին աստիճանի ընդհանուր հավասարման հետազոտումը 58
§ 5. Ուղիղ գծի հավասարումը հատվածներով 59
§ 6. Ուղիղի կառուցումը տրված հավասարումով 61
§ 7. Երկու ուղիղներով կազմված անկյունը 62
§ 8. Երկու ուղիղների զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները 64
§ 9. Տվյալ կետով անցնող և տվյալ ուղղությունն ունեցող ուղիղի հավասարումը 64
§ 10. Երկու ուղիղների փոխադարձ դիրքը հարթության վրա . 67
§ 11. Ուղիղների փնջի հավասարումը 70
§ 12. Տրված երկու կետերով անցնող ուղիղի հավասարումը . 72
§ 13. Տրված երեք կետերի՝ մեկ ուղիղ վրա գտնվելու պայմանը 74
§ 14. Ուղիղ գծի նորմալ հավասարումը 74
§ 15. Առաջին աստիճանի ընդհանուր հավասարման բերումը նորմալ տեսքի 76
§ 16. Տված կետի հեռավորությունը տված ուղիղից 77
§ 17. Ուղիղի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով . 79
Վարժություններ 80

Գլուխ IV. Կոնական հատույթների տարրական տեսություն . 85

§ 1. Նախնական դիտողություններ 85
§ 2. Շրջանագիծ 85
§ 3. Էլիպս 87
§ 4. Հիպերբոլը և նրա ասիմպտոտները 90
§ 5. Պարաբոլ 95
§ 6. Էլիպսի, հիպերբոլի և պարաբոլի կետերի կառուցումը կարկինի և քանոնի օգնությամբ 97
§ 7. Էլիպսը, հիպերբոլը և պարաբոլը որպես կոնական հատույթներ 99
§ 8. Էլիպսի էքսցենտրիսիտետը և դիրեկտրիսաները 99
§ 9. Հիպերբոլի էքսցենտրիսիտետը և դիրեկտրիսաները . . 102
§ 10. Պարաբոլի էքսցենտրիսիտետը և դիրեկտրիսան . . . 104
§ 11. Կոնական հատույթի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով 105
§ 12. Էլիպսի տրամագծերը։ Համալուծ տրամագծեր . . 107
§ 13. Հիպերբոլի տրամագծերը։ Համալուծ տրամագծեր . . 110
§ 14. Պարաբոլի տրամագծերը 112
§ 15. Շոշափող 114
§ 16. Էլիպսը որպես շրջանագծի պրոյեկցիա 117
§ 17. Էլիպսի պարամետրական հավասարումները 118
Վարժություններ 119

Գլուխ V. Կոորդինատների ձևափոխումը։ Գծերի դասակարգումը . 127

§ 1. Կոորդինատների ձևափոխման խնդիրը 127
§ 2. Կոորդինատների սկզբնակետի տեղափոխումը 128

§ 3. Կոորդինատային առանցքների պտտումը 129
§ 4. Ընդհանուր դեպքը 130
§ 5. Կոորդինատների ձևափոխման բանաձևերի մի քանի կիրառումներ 132
§ 6. Երկրորդ աստիճանի ընդհանուր հավասարման ձևափոխումը, երբ այն չի պարունակում փոփոխականների արտադրյալը . 136
§ 7. Երկրորդ աստիճանի ընդհանուր հավասարման ձևափոխումը 144
§ 8. Գծերի դասակարգումը 147
Վարժություններ 150

Գլուխ VI. 2-րդ և 3-րդ կարգի դետերմինանտներ 153

§ 1. 2-րդ կարգի դետերմինանտներ 153
§ 2. Երեք անհայտներով երկու հավասարումների համասեռ սիստեմ 157
§ 3. 3-րդ կարգի դետերմինանտներ 159
§ 4. 3-րդ կարգի դետերմինանտների հիմնական հատկությունները 162
§ 5. Երեք անհայտներով երեք առաջին աստիճանի հավասարումների սիստեմ 167
§ 6. Համասեռ սիստեմ 169
§ 7. Երեք անհայտներով երեք առաջին աստիճանի հավասարումների սիստեմի ընդհանուր հետազոտությունը 173
§ 8. Դետերմինանտների մի քանի կիրառումներ անալիտիկ երկրաչափության մեջ 179
Վարժություններ 181

Երկրորդ մաս

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Գլուխ I. Կոորդինատների մեթոդը տարածության մեջ . . 183

§ 1. Ուղղանկյուն կոորդինատներ 183
§ 2. Հիմնական խնդիրներ 188
§ 3 Պրոյեկցիաների տեսության հիմնական դրույթները տարածության մեջ 191
§ 4. Երկու առանցքներով կազմված անկյան հաշվումը տարածության մեջ 194
Վարժություններ 196

Գլուխ II. Վեկտորական հանրահաշվի տարրերը 198

§ 1. Վիկտորներ և սկալյարներ 198
§ 2. Վեկտորների գումարումը 200
§ 3. Վեկտորների հանումը 203
§ 4. Վեկտորի բազմապատկումը թվով 204
§ 5. Վեկտորի պրոյեկցիաները 206
§ 6. Գործողություններ պրոյեկցիաներով տրված վեկտորների հետ 210
§ 7. Վեկտորների սկալյար արտադրյալը 211

§ 8. Սկալյար արտադրյալի հիմնական հատկությունները . . 212
§ 9. Պրոյեկցիաներով տրված վեկտորների սկալյար արտադրյալը 214
§ 10. Վեկտորի ուղղությունը 216
§ 11. Վեկտորական արտադրյալ 219
§ 12. Վեկտորական արտադրյալի հիմնական հատկությունները . 222
§ 13. Պրոյեկցիաներով տրված վեկտորների վեկտորական արտադրյալը 225
§ 14. Վեկտորա-սկալյար արտադրյալ 228
§ 15. Վեկտորա-սկալյար արտադրյալը պրոյեկցիաներով . . 231
§ 16. Կրկնակի վեկտորական արտադրյալ 233
Վարժություններ 236

Գլուխ III. Հավասարումների երկրաչափական նշանակություն . 239

§ 1. Մակերևույթի հավասարումը 239
§ 2. Հավասարման երկրաչափական իմաստը 241
§ 3. Երկու հիմնական խնդիր 241
§ 4. Սֆերա 241
§ 5. Գլանային մակերևույթներ 243
§ 6. Տարածության մեջ գտնվող գծի հավասարումները . . 244
§ 7. Երեք մակերևույթների հատումը 246
Վարժություններ 246

Գլուխ IV. Հարթություն 248

§ 1. Հարթության նորմալ հավասարումը 248
§ 2. Երեք փոփոխականների միջև առաջին աստիճանի հավասարման երկրաչափական իմաստը։ Առաջին աստիճանի ընդհանուր հավասարման բերումը նորմալ տեսքի 251
§ 3. Հարթության ընդհանուր հավասարման հետազոտումը . . 255
§ 4. Հարթության հավասարումը հատվածներով . . . 257
§ 5. Տվյալ կետով անցնող հարթության հավասարում . . 258
§ 6. Տված երեք կետերով անցնող հարթության հավասարումը . 260
§ 7. Երկու հարթություններով կազմված անկյունը . . . 263
§ 8. Երկու հարթությունների զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները 265
§ 9. Երեք հարթությունների հատման կետը 268
§ 10. Կետի հեռավորությունը հարթությունից 270
Վարժություններ 273

Գլուխ V. Ուղիղ գիծ 277

§ 1. Ուղիղ գծի հավասարումները 277
§ 2. Ուղիղը որպես երկու հարթությունների հատման գիծ։ Ուղիղի ընդհանուր հավասարումները 281
§ 3. Երկու ուղիղներով կազմված անկյունը 287

468 - 23

§ 4. Երկու ուղիղների զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները 288
§ 5. Տված երկու կետերով անցնող ուղիղի հավասարումները . 289
§ 6. Ուղիղի և հարթության միջև կազմված անկյունը . . 290
§ 7. Ուղիղի ու հարթության զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները 290
§ 8. Հարթությունների փնջի հավասարումը 292
§ 9. Ուղիղի հատումը հարթության հետ . . . 293
§ 10. Երկու ուղիղների մեկ հարթության մեջ գտնվելու պայմանը 295
Վարժություններ 299

Գլուխ VI. Գլանային և կոնական մակերևույթներ: Պտտման մակերևույթներ: 2-րդ կարգի մակերևույթներ 305

§ 1. Մակերևույթների դասակարգումը 305
§ 2. Գլանային մակերևույթներ (ընդհանուր դեպքը) . . . 305
§ 3. Կոնական մակերևույթներ 307
§ 4. Պտտման մակերևույթներ 308
§ 5. Էլիպսոիդ 310
§ 6. Միախոռոչ հիպերբոլոիդ 312
§ 7. Երկխոռոչ հիպերբոլոիդ 312
§ 8. Էլիպսական պարաբոլոիդ 315
§ 9. Հիպերբոլական պարաբոլոիդ 316
§ 10. 2-րդ կարգի կոն 319
§ 11. 2-րդ կարգի գլաններ 319
§ 12. 2-րդ կարգի մակերևույթների ուղղագիծ ծնիչները: Վ. Գ. Շուխովի կոնստրուկցիաները 320
Վարժություններ 323
Պատասխաններ 325

50951

Խմբագիր՝ Ա. Մ. Գաբրիելյան
Տեխն. խմբագիր՝ Հ. Ա. Հովսափյան
Վերստուգող սրբագրիչ՝ Հ. Ա. Վարդանյան

Պատվեր 468 Տիրաժ 10000

Հանձնված է արտադրության 26/XI 1970 թ.:
Ստորագրված է տպագրության 19/IV 1971 թ.:
Թուղթ 60×90 1/16: Տպագր. 22,12 մամուլ:
Հրատ. 16,2 մամ.: Գինը՝ 80 կոպ.:
Երևանի համալսարանի հրատարակչություն:
Երևան, Աբովյան փող. № 52:

Երևանի համալսարանի տպարան: Երևան, Աբովյան փող. № 52: