ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ի. Ի. ՊՐԻՎԱԼՈՎ

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

Թույլատրված է ՌՍՖՍՀ բարձրագույն և միջնակարգ մասնագիտական կրթության մինիստրության կողմից որպես դասագիրք բարձրագույն տեխնիկական ուսումնական հաստատությունների համար

Վերահրատարակություն

ԵՐԵՎԱՆԻ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ—1970

Թարգմանված է ռուսերեն 27-րդ հրատարակությունից, համեմատված է 29-րդ հրատարակության հետ և կատարված են համապատասխան փոփոխություններ։

Թարգմանիչ՝ **Վ. Վ. ՍԱՂԱԹԵԼՅԱՆ**

ИВАН ИВАНОВИЧ ПРИВАЛОВ

2—2—3 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

(На армянском языке, перевод с русского)

Издательство Ереванского университета

Е Р Е В А Н—1970

ՀԵՂԻՆԱԿԻ ԱՌԱՋԱԲԱՆԸ
ՏԱՍՆԵՐԵՔԵՐՈՐԴ ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅԱՆ ԱՌԹԻՎ

Իմ «Անալիտիկ երկրաչափություն» գրքի ներկա հրատարակության մեջ վերամշակման է ենթարկված նախորդ հրատարակության նյութը։ Այդ մեթոդական աշխատանքը կատարելով, ես ձգտել եմ վերացնել դասընթացի մի քանի հարցերը սովորողների կողմից ըմբռնելու դժվարությունները, որոնք դասավանդման ընթացքում նկատել են բուհերի մի շարք դասախոսներ։ Խորին շնորհակալություն եմ հայտնում բոլոր նրանց, ովքեր ուղարկել են իրենց դիտողությունները։ Առանձնապես արժեքավոր ցուցումներ եմ ստացել դոցենտ Վ. Պ. Մինորսկուց, որին սրտագին շնորհակալություն եմ հայտնում։

Ի. ՊՐԻՎԱԼՈՎ

ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅԱՆ ԿՈՂՄԻՑ

Սույն գրքի 18-րդ հրատարակությունը խմբագրելիս հաշվի են առնվել այն դիտողությունները, որոնք արվել են Մոսկվայի մաթեմատիկական ընկերության բարձրագույն տեխնիկական ուսումնական հաստատությունների սեկցիայում նախորդ հրատարակությունները քննարկելիս: Վերամշակման շնորհիվ գիրքն ընդունեց այն տեսքը, որը պահպանվել է մինչև սույն հրատարակությունը:

27-րդ հրատարակության ժամանակ որոշ կրճատումներ են կատարվել: Այն կապակցությամբ, որ երկրորդ կարգի կորերի ընդհանուր տեսությունը բարձրագույն տեխնիկական ուսումնական հաստատությունների ծրագրերի մեջ չի մտնում՝ լրիվ հանված է առաջին մասի VII *գլուխը, ինչպես նաև* V *գլխի* § *5-ը և* § *7-ը: Երկրորդ կարգի կորերի ձևափոխության տարրական հարցերը, որոնք առաջ մտնում էին* VII *գլխի,* §§ *1-4 մեջ, այժմ կազմում են* V *գլխի* § *6-ը և* § *7-ը. այդ նույն գլխի* § *6-ն այժմ դարձել է* § *5: Նախկին* VII *գլխի № 9 խնդիրը տեղափոխված է* V *գլխի խնդիրների մեջ և այժմ այնտեղ ունի 19-րդ համարը:*

Բարձրագույն տեխնիկական ուսումնական հաստատությունների ծրագրերի մեջ չմտնող ամբողջ նյութը շարված է մանրատառով: Մանրատառով են շարված նաև ուղիղի և հարթության հավասարումների այն արտածումները (երկրորդ մասի IV-V *գլուխներում), որոնց ժամանակ վեկտորական հանրահաշիվը չի օգտագործված:*

Գիրքը ինչպես 18-րդ, այնպես էլ 27-րդ հրատարակության նախապատրաստելու ամբողջ աշխատանքը կատարել են Ե. Ե. Բրենևը, Ն. Ա. Օլիսովը և Ն. Յա. Սիսոևան: 18-րդ հրատարակության համար կատարված աշխատանքին հսկել է Պ. Կ. Ռաշևսկին. 27-րդ հրատարակությունը նախապատրաստելու աշխատանքին մասնակցել է նաև Ի. Գ. Արամանովիչը:

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Անալիտիկ երկրաչափության առարկան՝ երկրաչափական ձևերի հետազոտումն է հանրահաշվական անալիզի օգնությամբ: Տարրական մաթեմատիկայի զանազան բաժիններում հանրահաշիվը կիրառվում է երկրաչափական շատ խնդիրներ լուծելիս: Այսպես, օրինակ, երկրաչափության մեջ կարիք է լինում թվերի օգնությամբ որոշել հատվածների և աղեղների երկարությունները, որոշ պատկերների մակերեսները, մարմինների ծավալները, եռանկյունաչափության մեջ թվային առնչություններից օգտվում են հատվածների հարաբերությունների և անկյունների միջև կախումներ ստանալու համար: Սակայն, եթե մաթեմատիկայի այդ բաժիններում հանրահաշվի օգնությամբ լուծվում է երկրաչափական ձևերի չափերի հարցը, անալիտիկ երկրաչափության մեջ թվերի օգնությամբ բնորոշվում է նրանց ամենաէական առանձնահատկությունը՝ նրանց դիրքը:

Երկրաչափական ձևի դիրքը որոշող թվերը կոչվում են նրա կոորդինատներ: Իսկ այն եղանակը, որի օգնությամբ որոշվում է երկրաչափական ձևի դիրքը, կոորդինատների եղանակ կամ կոորդինատների մեթոդ անունն է կրում: Երկրաչափական ձևերը շատ բազմազան են և, անալիտիկ երկրաչափությունը կառուցելիս բնականաբար, մենք պետք է այդ ձևերից որևէ մեկն ընդունենք որպես սկզբնային և նրա օգնությամբ կազմենք մյուս բոլոր ձևերը: Ամենից պարզը կլինի որպես այդպիսի սկզբնային ձև ընդունել երկրաչափական կետը: Այդ դեպքում երկրաչափական ամեն մի այլ ձև, օրինակ՝ գիծը կամ մակերևույթը, կարելի է դիտարկել որպես կետերի երկրաչափական տեղ:

Որպես սկզբնային էլեմենտ ընդունելով կետը, մենք ամենից առաջ պետք է ցույց տանք, թե տարածության մեջ կետի դիրքն ինչպես է որոշվում թվերի օգնությամբ: Կոորդինատների մեթոդի այս առաջին գաղափարն է, որ դրվել է երկրաչափական զանազան խնդիրների լուծման հիմքում: Այդ մեթոդի երկրորդ գաղափարն է՝ ցույց տալ, թե գծի երկրաչափական հատկությունները ինչպես են անդրադառնում այդ գծին պատկանող կետերի կոորդինատների վրա: Կոորդինատների մեթոդի բեղմնավոր գաղափարները կիրառություն են գտել մաթեմատիկայի ու մեխանիկայի բոլոր բնագավառներում, դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի զարգացման շնորհիվ նրանք դարձել են մաթեմատիկական հետազոտության հզորագույն զենք:

Անալիտիկ երկրաչափության շարադրմանն անցնելով, մենք, հարմարության համար, ամբողջ դասընթացը երկու մասի ենք բաժանում: Առաջին մասում կզբաղվենք երկրաչափական հարթ ձևերի հետազոտությամբ՝ հանրահաշվական միջոցներով, որոնք հիմնված են կոորդինատների կիրառման վրա: Երկրորդ մասում մենք նույնը կկատարենք երկրաչափական տարածական ձևերի նկատմամբ:

Դասընթացի մեջ օժանդակ դեր ունի 2-րդ և 3-րդ կարգի դետերմինանտների տեսությանը նվիրված գլուխը: Այդ գլուխը, ինչպես և նրա հետագա կիրառումները, կարելի է բաց թողնել:

Երկրաչափական առավելագույն դիտողականության նպատակով հարթության և ուղիղի (տարածության մեջ) հիմնական հավասարումները տրված են վեկտորական տեսքով: Այդ կապակցությամբ էլ մտցված է հատուկ գլուխ, որտեղ շարադրված են անհրաժեշտ տեղեկություններ վեկտորական հանրահաշվից: Սակայն, հաշվի առնելով այն բուհերի կարիքները, որտեղ անալիտիկ երկրաչափությունն ուսումնասիրելիս վեկտորական հանրահաշիվ չեն անցնում, հարթության և ուղիղի տեսության վեկտորական շարադրմանը զուգընթաց մենք տալիս ենք նաև նրա կոորդինատային շարադրանքը:

ԱՌԱՋԻՆ ՄԱՍ

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԸ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

ԳԼՈՒԽ I

ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ

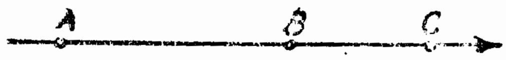
§ 1. Ուղղությամբ օժտված հատվածներ: Հատվածի և նրա երկարության գաղափարները հայտնի են տարրական երկրաչափությունից: Հատվածը ուղիղի՝ երկու կետերով սահմանափակված մասն է: Հատվածի երկարությունը մի թիվ է, որն ստացվում է այդ հատվածը չափելով նախապես ընտրված մի որոշ հատվածի՝ մասշտաբի միավորի օգնությամբ: A և B կետերով սահմանափակված հատվածը, ինչպես և նրա երկարությունը նշանակում են AB կամ BA:

Մաթեմատիկայի ու ֆիզիկայի շատ հարցերում նշանակություն ունի հատվածի ուղղությունը. օրինակ՝ երբ հատվածը դիտվում է որպես շարժվող կետի անցած ճանապարհ:

Հատվածի ուղղությունը բնորոշելու համար, հատվածը սահմանափակող երկու կետերից մեկն ընդունում են որպես հատվածի սկիզբ, մյուսը՝ որպես ծայր. հատվածի ուղղություն համարում են նրա սկզբից դեպի ծայրը գնացող ուղղությունը: Այն հատվածը, որի վրա նշված է ուղղությունը (այսինքն՝ ասված է, թե երկու ծայրակետերից որն է սկիզբ համարվում և որը՝ ծայր), կոչվում է ուղղությամբ օժտված հատված:

Պայմանավորվենք ուղղությամբ օժտված հատվածը նշանակել երկու տառով՝ նրանց գլխին գրված գծիկով, առաջ գրելով հատվածի սկիզբը նշանակող տառը: Այսպես, օրինակ, այն հատվածը, որի համար A կետը սկիզբ է, իսկ B կետը ծայր, կնշանակենք $\overline{AB}$: Նկատենք, որ ուղղությամբ օժտված $\overline{AB}$ և $\overline{BA}$ հատվածները նույնը չեն, քանի որ նրանք ունեն հակադիր ուղղություններ:

Եթե դիտարկենք մեկ ուղիղի վրա գտնվող ուղղությամբ օժտված հատվածները, ապա նրանց ուղղությունները կարելի է ընտրոշել + և — նշաններով: Դրա համար այդ ուղիղի երկու հակադիր ուղղություններից մեկը (միևնույն է, թե որը) կանվանենք դրական ուղղություն, մյուսը՝ բացասական: Գծագրի վրա դրական ուղղությունը պայմանավորվենք նշել սլաքով (գծ. 1-ում ձախից աջ ուղղությունն է դրական ընդունված): Այն ուղիղը, որի վրա ընտրված է դրական ուղղություն, կոչվում է առանցք:



Գծ. 1

Առանցքի վրա գտնվող ուղղությամբ օժտված հատվածի երկարությունը՝ վերցրած որոշակի նշանով, կոչվում է առանցքի՝ ուղղությամբ օժտված հատվածի մեծություն. այդ դեպքում նշանը դրական է գրվում, եթե հատվածի ուղղությունը համընկնում է առանցքի դրական ուղղության հետ, և՝ բացասական, եթե հատվածի ուղղությունը հակադիր է առանցքի դրական ուղղությանը[1]: Այսպես, օրինակ՝ գծ. 1-ում պատկերված $\overline{AC}$ հատվածի մեծությունը դրական է, իսկ $\overline{CB}$ հատվածինը՝ բացասական: Ակնհայտ, ուղղությամբ օժտված հատվածի երկարությունը հավասար է նրա մեծության մոդուլին[2]: Պայմանավորվենք ուղղությամբ օժտված $\overline{AB}$ հատվածի երկարությունը նշանակել AB, իսկ մեծությունը՝ մեծ $\overline{AB}$:

Առանցքի՝ ուղղությամբ օժտված հատվածի մեծության սահմանումից հետևում է, որ $\overline{AB}$ և $\overline{BA}$ հատվածների մեծությունները միմյանցից տարբերվում են նշանով՝

$$\text{մեծ}\ \overline{AB} = -\ \text{մեծ}\ \overline{BA}:$$

Դիտողություն: Հետագայում հարկ է լինելու դիտարկել նաև ուղղությամբ օժտված այնպիսի «հատված», որի սկիզբն ու վերջը համընկնում են: Այդպիսի հատվածի ուղղությունը կարելի

[1] «Առանցքի՝ ուղղությամբ օժտված հատվածի մեծություն» տերմինը գործածելն իմաստ ունի միայն այն դեպքում, երբ դիտարկվում է առանցքի վրա գտնվող ուղղությամբ օժտված հատված: Սակայն հետագայում, կարճության համար ուղղությամբ օժտված հատվածի մեծության մասին խոսելիս «առանցքի» բառը բաց ենք թողնելու: Ճիշտ այդպես էլ, կարճության համար, մենք հաճախ ասելու ենք «AB հատված», փոխանակ ասելու «ուղղությամբ օժտված AB հատված»:

[2] Թվի բացարձակ մեծությունն անվանում են նաև մոդուլ. a թվի մոդուլը նշանակելու ենք $|a|$:

է ցանկացած ձևով ընտրել: Նրա երկարությունը, հետևաբար նաև մեծությունը հավասար է զրոյի: Այդպիսի հատվածները կանվանենք զրոյական հատվածներ կամ զրո հատվածներ:

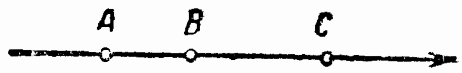
Մի որոշ առանցքի վրա վերցնենք երեք կետ՝ A, B, C և պարզենք, թե ինչի հավասար կլինի $\overline{AB}$ և $\overline{BC}$ հատվածների մեծությունների գումարը: Մենք հիմա ցույց կտանք, որ առանցքի վրա A, B և C կետերի ցանկացած դասավորության դեպքում $\overline{AB}$ և $\overline{BC}$ հատվածների մեծությունների գումարը հավասար է $\overline{AC}$ հատվածի մեծությանը՝

$$\text{մեծ}\,\overline{AB} + \text{մեծ}\,\overline{BC} = \text{մեծ}\,\overline{AC}, \qquad (1)$$

այսինքն՝ եթե $\overline{AB}$ և $\overline{BC}$ հատվածներն առանցքի վրա այնպես են դասավորված, որ նրանցից առաջինի ծայրը երկրորդի համար սկիզբ է հանդիսանում, ապա նրանց մեծությունների գումարը հավասար է այն $\overline{AC}$ հատվածի մեծությանը, որի սկիզբն առաջին հատվածի սկիզբն է, ծայրը՝ երկրորդ հատվածի ծայրը:

(1) հավասարությունն ապացուցելու համար նախ ենթադրենք, թե B կետը գտնվում է A և C կետերի միջև (գծ. 2):

Հատվածը դիտարկելով որպես շարժվող կետի անցած ճանապարհ, կարող ենք ասել, որ այս դեպքում շարժվող կետը, անցնելով $\overline{AB}$ ճանապարհը, շարժումը շարունակում է $\overline{BC}$ ճանապարհով՝ նույն ուղղությամբ: Այդ ժամանակ $\overline{AC}$ հատվածի երկարությունն ակներևաբար հավասար կլինի $\overline{AB}$ և $\overline{BC}$ հատվածների երկարությունների գումարին, իսկ բոլոր երեք հատվածների մեծությունները կունենան նույն նշանը, քանի որ երեք հատվածներն էլ ուղղված են դեպի միևնույն կողմը: Հետևաբար՝



Գծ. 2

$$\text{մեծ}\,\overline{AB} + \text{մեծ}\,\overline{BC} = \text{մեծ}\,\overline{AC}:$$

Այսպիսով, եթե B կետը գտնվում է $\overline{AC}$ հատվածի վրա, ապա (1) հավասարությունն իրավացի է:

Այժմ ենթադրենք, թե B կետը գտնվում է $\overline{AC}$ հատվածից դուրս՝ կամ հատվածի շարունակության վրա C կետից այն կողմը (գծ. 3), կամ էլ նրա շարունակության վրա A կետից այն կողմը (գծ. 4): Երկու դեպքում էլ շարժվող կետը, $\overline{AB}$ ճանապարհն անցնելով, շարժումը շարունակում է $\overline{BC}$ ճանապարհով՝ հակադիր ուղղությամբ: Պարզ է, որ այժմ $\overline{AC}$ հատվածի երկարությունը հավասար կլինի $\overline{AB}$ և $\overline{BC}$ հատվածների երկարությունների տարբերությանը [կամ՝ $AC = AB - BC$ (գծ. 3), կամ՝ $AC = BC - AC$ (գծ. 4)]։

Գծ. 3

Գծ. 4

Ակներև է, որ $\overline{AC}$ հատվածի ուղղությունը կհամընկնի $\overline{AB}$ և $\overline{BC}$ հատվածներից այն հատվածի ուղղության հետ, որն ավելի մեծ երկարություն ունի (գծ. 3-ում՝ $\overline{AB}$ հատվածի ուղղության հետ, գծ. 4-ում՝ $\overline{BC}$ հատվածի ուղղության հետ)։ Այդ պատճառով, $\overline{AC}$ հատվածի մեծությունը կունենա այն նշանը, ինչ որ երկար հատվածի մեծությունը։

Հետևաբար, $\overline{AC}$ հատվածի մեծությունը կարելի է գտնել մեծ $\overline{AB}$ և մեծ $\overline{BC}$ հարաբերական թվերի գումարման կանոնով։

Այսպիսով, $\overline{AC}$ հատվածից դուրս B կետի ցանկացած դասավորության դեպքում ևս կունենանք՝

$$\text{մեծ}\ \overline{AB} + \text{մեծ}\ \overline{BC} = \text{մեծ}\ \overline{AC}։$$

Մնում է նկատել, որ (1) հավասարությունը ճիշտ կլինի նաև այն դեպքում, երբ երեք կետերից որևէ երկուսը համընկնեն։ Ընթերցողն ինքը հեշտությամբ կարող է ստուգել այդ։ Օրինակ, եթե համընկնեն A և C կետերը, ապա կունենանք՝

$$\text{մեծ}\ \overline{AB} + \text{մեծ}\ \overline{BC} = \text{մեծ}\ \overline{AB} + \text{մեծ}\ \overline{BA} = 0,$$

բայց նաև՝ մեծ $\overline{AC} = 0$։ Հետևաբար, (1) հավասարությունը ճիշտ կլինի։

Դ ի տ ո ղ ու թ յ ու ն։ Եթե (1) հավասարության մեջ գրված լինեին հատվածների ոչ թե մեծությունները, այլ երկարությունները, ապա այն ճիշտ կլիներ միայն այն դեպքում, երբ B կետը գտնվեր $\overline{AC}$ հատվածի վրա, և իր ուժը կկորցներ B կետի ամեն մի այլ դասավորության դեպքում։

Օգտվելով (1) հավասարությունից, հեշտ է ցույց տալ, որ առանցքի վրա ցանկացած թվով և ցանկացած դասավորությամբ վերցրած՝ $A, B_1, B_2, \ldots, B_n, C$ կետերի համար կունենանք՝

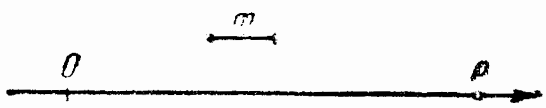
$$\text{մեծ}\ \overline{AB_1} + \text{մեծ}\ \overline{B_1B_2} + \ldots + \text{մեծ}\ \overline{B_nC} = \text{մեծ}\ \overline{AC}, \qquad (1')$$

այսինքն՝ եթե առանցքի վրա յուրաքանչյուր հաջորդ հատվածի սկիզբը համընկնում է նախորդի ծայրի հետ, ապա նրանց մեծությունների գումարը հավասար է այն հատվածի մեծությանը, որի սկիզբը համընկնում է առաջին հատվածի սկզբի հետ, ծայրը՝ վերջին հատվածի ծայրի հետ:

§ 2. Կոորդինատները ուղիղ գծի վրա: *Տեսնենք, թե կետի դիրքն ինչպե՞ս կարելի է որոշել ուղիղ գծի վրա:*

Այդ ուղիղի վրա վերցնենք մի O կամայական կետ (լատիներեն origo=սկիզբ բառից), որի նկատմամբ պետք է որոշենք ուղիղի բոլոր կետերի դիրքը: Պարզ է, որ ուղիղ գծի յուրաքանչյուր P կետի դիրքը լիովին կորոշվի $\overline{OP}$ ուղղությամբ օժտված հատվածով. ուղիղի յուրաքանչյուր կետին համապատասխանում է ուղղությամբ օժտված մի որոշակի հատված, որի սկիզբն O կետումն է, ծայրը՝ տված P կետում և, հակադարձաբար, ուղղությամբ օժտված յուրաքանչյուր հատվածին, որի սկիզբը համընկնում է O կետի հետ, համապատասխանում է մեկ որոշակի P կետ՝ այդ հատվածի ծայրը:

Այժմ ուղիղի վրա ընտրենք դրական ուղղություն և մասշտաբի m միավոր (գծ. 5-ում դրական ուղղությունն ընտրված է ձախից դեպի աջ): Այդ դեպքում, ուղիղ գծի յուրաքանչյուր P կետի դիրքը կորոշվի մի թվով՝ $\overline{OP}$ հատվածի մեծությամբ: Կետի դիրքը որոշող այդ թիվը կոչվում է այդ կետի **կոորդինատ**: Այսպիսով, $\overline{OP}$ ուղղությամբ օժտված հատվածի մեծությունը՝ ուղիղ գծի P կետի կոորդինատն է: P կետի կոորդինատը նշանակելով x տառով, կունենանք՝



Գծ. 5

$$x = \text{մեծ}\ \overline{OP}:$$

Գիտենալով P կետը, հեշտ է գտնել նրա կոորդինատը. այն հավասար է $\overline{OP}$ ուղղությամբ օժտված հատվածի մեծությանը: Հակադարձաբար, տված x կոորդինատով կարելի է կառուցել միակ կետ՝ այն կլինի x մեծությունն ունեցող $\overline{OP}$ ուղղությամբ օժտված հատվածի P ծայրը:

Եթե ուղիղ գծի վրա նշված է մի որոշ O կետ, ցույց է տըրված դրական ուղղությունը և, բացի այդ, ընտրված է մասշտաբի միավոր, այդ դեպքում մենք կասենք, որ ուղիղի վրա սահմանված է **կոորդինատների սիստեմ**: O կետը, որը դիտարկվող հատվածների սկիզբն է, կոչվում է կոորդինատների սկիզբ կամ կոորդինատների սկզբնակետ, իսկ տված ուղիղը՝ կոորդինատների առանցք կամ կոորդինատային առանցք: Ակներևորեն, դրական կիսաառանցքի կետերն ունեն դրական կոորդինատներ (գծ. 5-ում՝ O-ից դեպի աջ գտնվող կետերը), բացասական կիսաառանցքի կետերը՝ բացասական կոորդինատներ, իսկ O սկզբնակետի կոորդինատը հավասար է զրոյի:

Պայմանավորվենք կետի կոորդինատը գրել այդ կետը նշանակող տառի աջ կողմում, փակագծերի մեջ՝ P(x):

§ 3. Երկու կետերի հեռավորությունն ուղիղ գծի վրա: Դիցուք կոորդինատների մի որոշ սիստեմում տրված են երկու կետեր՝ $A(x_1)$ և $B(x_2)$: Տեսնենք, թե այդ երկու կետերի AB հեռավորությունն ինչպե՞ս կարտահայտվի նրանց կոորդինատների միջոցով:

(1) հավասարության համաձայն, կարող ենք գրել՝

$$\text{մեծ}\,\overline{OA}+\text{մեծ}\,\overline{AB}=\text{մեծ}\,\overline{OB},$$

որտեղից՝

$$\text{մեծ}\,\overline{AB}=\text{մեծ}\,\overline{OB}-\text{մեծ}\,\overline{OA}:$$

Քանի որ $\text{մեծ}\,\overline{OA}=x_1$ և $\text{մեծ}\,\overline{OB}=x_2$, ուստի՝

$$\text{մեծ}\,\overline{AB}=x_2-x_1:$$

Այսպիսով, առանցքի ուղղությամբ օժտված հատվածի մեծությունն ստանալու համար, պետք է նրա ծայրի կոորդինատից հանել սկզբի կոորդինատը:

A և B կետերի հեռավորությունը հավասար է $\overline{AB}$ հատվածի երկարությանը: Հետևաբար՝

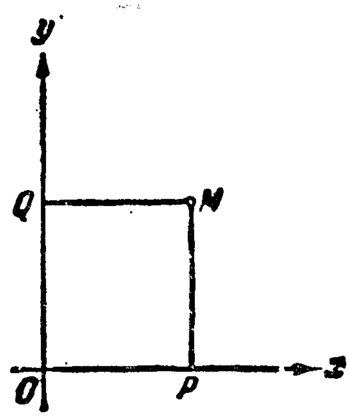
$$AB=|x_2-x_1|,$$

այսինքն՝ երկու կետերի հեռավորությունը հավասար է այդ կետերի կոորդինատների տարբերության բացարձակ մեծությանը:

Օրինակ, եթե տված են A (5) և B (—3) կետերը, ապա $\text{մեծ}\,A3=-3-5=-8$, իսկ նրանց հեռավորությունը՝ $AB=8$:

§ 4. Ուղղանկյուն կոորդինատները հարթության վրա: Այժմ սահմանենք հարթության վրա կոորդինատների մեթոդի գաղափարը, այսինքն՝ ցույց տանք այն եղանակը, որը հնարավորություն է տալիս թվերի օգնությամբ որոշելու հարթության կետերի դիրքը:

Վերցնենք երկու փոխադարձաբար ուղղահայաց ուղիղներ և յուրաքանչյուրի վրա ընտրենք դրական ուղղություն: Այդ ուղիղները, որոնց նկատմամբ պետք է որոշենք հարթության կետերի դիրքը, կոչվում են կոորդինատների (կամ կոորդինատային) առանցքներ: Կոորդինատների առանցքները սովորաբար դասավորվում են այնպես, ինչպես ցույց է արված գծ. 6-ում. մեկը՝ հորիզոնական, որի վրա դրական ուղղությունն ընտրում ենք ձախից դեպի աջ, մյուսը՝ ուղղաձիգ, որի վրա դրական ուղղությունը ընտրում ենք ներքևից վերև: Դրանցից մեկը (սովորաբար հորիզոնականը) անվանում են աբսցիսների առանցք (Ox առանցք), մյուսը՝ օրդինատների առանցք (Oy առանցք): Կոորդինատային առանցքների հատման կետը կոչվում է կոորդինատների սկզբնակետ (գծ. 6-ում կոորդինատների սկզբնակետը նշանակված է O տառով): Վերջապես, ընտրենք մասշտաբի միավոր (մենք միշտ ենթադրելու ենք, որ կոորդինատային երկու առանցքների վրա էլ մասշտաբի միևնույն միավորն է ընտրված):



Գծ. 6

Այժմ հարթության ցանկացած կետի դիրքը կարելի է որոշել թվերով՝ այդ կետի կոորդինատներով: Իրոք, հարթության յուրաքանչյուր M կետին կոորդինատային առանցքների վրա համապատասխանում են երկու կետեր՝ P և Q, որոնք նրա պրոյեկցիաներն[1] են այդ առանցքների վրա (գծ. 6) և, հակադարձաբար, գիտենալով կոորդինատային առանցքների վրա P և Q կետերը, կարելի է հարթության վրա կառուցել M միակ կետը, որի համար P-ն և Q-ն պրոյեկցիաներ են այդ առանցքների վրա: Այսպիսով, հարթության M կետի դիրքը որոշելը հանգում է կոորդինատային առանցքների վրա P և Q պրոյեկցիաների դիրքերը որոշելուն:

Բայց մենք արդեն գիտենք, որ առանցքի վրա կետի դիրքը լիովին որոշվում է նրա կոորդինատով: Դիցուք x-ը P կետի կոորդինատն է աբսցիսների առանցքի վրա ($x=$մեծ$\overline{OP}$), իսկ y-ը՝ Q կետի կոորդինատն օրդինատների առանցքի վրա ($y=$մեծ$\overline{OQ}$): x և y թվերը լիովին որոշում են M կետի դիրքը հարթության վրա և կոչվում են այդ կետի կոորդինատներ, x-ը՝ աբսցիս, y-ը՝ օրդինատ:

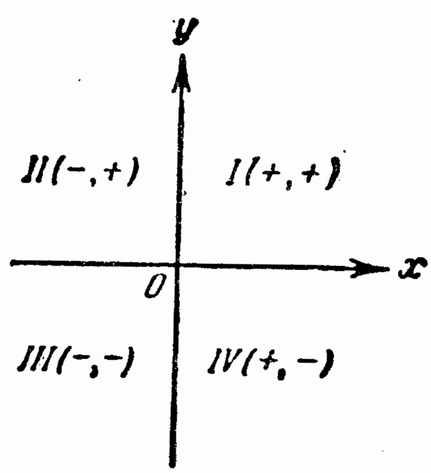
[1] M կետի պրոյեկցիա առանցքի վրա կոչվում է M կետից այդ առանցքին իջեցրած ուղղահայացի հիմքը:

Այսպիսով, կետի աբսցիս կոչվում է Ox առանցքի այն հատվածի մեծությունը, որի սկիզբը կոորդինատների սկզբնակետն է, ծայրը՝ կետի պրոյեկցիան աբսցիսների առանցքի վրա. կետի օրդինատ կոչվում է Oy առանցքի այն հատվածի մեծությունը, որի սկիզբը կոորդինատների սկզբնակետն է, ծայրը՝ կետի պրոյեկցիան օրդինատների առանցքի վրա:

Ուրեմն հարթության ցանկացած կետի դիրքը լրիվին որոշվում է x *և* y *թվերի զույգով, որոնցից առաջինը կետի աբսցիսն է, երկրորդը՝ օրդինատը:*

Կետի կոորդինատները պայմանավորվենք գրել կետը նշանակող տառի աջ կողմը՝ փակագծերի մեջ, առաջ գրելով աբսցիսը, ապա՝ օրդինատը, անջատելով իրարից ստորակետով՝ M(x,y)*: Կոորդինատային առանցքների՝ գծ. 6-ում ցույց տրված դասավորության դեպքում օրդինատների* Oy *առանցքից դեպի աջ գտնվող կիսահարթության բոլոր կետերի* x *աբսցիսները դրական կլինեն, դեպի ձախ գտնվող կիսահարթության կետերինը՝ բացասական:* Oy *առանցքի վրա գտնվող կետերի համար աբսցիսը հավասար է զրոյի: Ճիշտ այդպես էլ, աբսցիսների* Ox *առանցքից վերև գտնվող կետերի* y *օրդինատները դրական կլինեն, դեպի ներքև գտնվողներինը՝ բացասական:* Ox *առանցքի վրա գտնվող կետերի համար օրդինատը հավասար է զրոյի: Կոորդինատների սկզբնակետն ունի (0,0) կոորդինատներ:*

Կոորդինատային առանցքները հարթությունը տրոհում են չորս մասի, որոնք կոչվում են քառորդներ *կամ* կվադրանտներ *(երբեմն անվանում են նաև կոորդինատային անկյուններ): Հարթության այն մասը, որը գտնվում է* Ox *և* Oy *դրական կիսաառանցքների միջև, կոչվում է առաջին քառորդ: Այնուհետև քառորդների համարակալումը կատարվում է ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ (գծ. 7): Առաջին քառորդի բոլոր կետերի համար* $x>0$, $y>0$. II *քառորդի կետերի համար* $x<0$, $y>0$. III *քառորդի կետերի համար* $x<0$, $y<0$. IV *քառորդի կետերի համար՝* $x>0$, $y<0$*:*



գծ.7

Հարթության կետի դիրքը որոշելու համար այստեղ օգտագործված կոորդինատները կոչվում են ուղղանկյուն կոորդինատներ, *քանի որ հարթության* M *կետն ստացվում է ուղիղ* անկյան տակ միմյանց հանդիպող PM և QM ուղիղների հատմամբ (գծ. 6), ինչպես նաև՝ դեկարտյան կոորդինատներ—մաթեմատիկոս և փիլիսոփա Դեկարտի անունով, որը 1637 թվականին հրապարակել է անալիտիկ երկրաչափության վերաբերյալ առաջին աշխատությունը:

Կոորդինատների դեկարտյան ուղղանկյուն սիստեմը կոորդինատների միակ սիստեմը չէ, որ հնարավորություն է տալիս որոշելու հարթության կետերի դիրքերը (տե՛ս սույն գլխի § 11-ը), սակայն նա պարզագույն սիստեմն է, և մենք հետագայում առավելապես նրանից ենք օգտվելու:

Կոորդինատների նկարագրված մեթոդից բխում են հետևյալ երկու հիմնական խնդիրների լուծումները.

Խնդիր I. Տրված M կետով գտնել նրա կոորդինատները:

Տված M կետից ուղղահայացներ ենք իջեցնում Ox և Oy առանցքներին: Այդ ուղղահայացների հիմքերը՝ P և Q կետերը կորոշեն որոնելի երկու կոորդինատները. M կետի առաջին կոորդինատը, նրա x աբսցիսը, հավասար է Ox առանցքի վրա գտնվող $\overline{OP}$ հատվածի մեծությանը: Իսկ M կետի երկրորդ կոորդինատը, նրա y օրդինատը, հավասար է Oy առանցքի վրա $\overline{OQ}$ հատվածի մեծությանը:

Խնդիր II. Գիտենալով M կետի x և y կոորդինատները, կառուցել այդ կետը:

Ox առանցքի վրա O կետից սկսած վերցնենք $|x|$ միավոր երկարություն ունեցող մի OP հատված, որի P ծայրը գտնվի O կետից դեպի աջ, եթե $x>0$, դեպի ձախ, եթե $x<0$, և համընկնի O կետի հետ, եթե $x=0$: Այդ հատվածի P ծայրը կլինի որոնելի M կետի պրոյեկցիան Ox առանցքի վրա: Oy առանցքի վրա O կետից սկսած վերցնենք $|y|$ միավոր երկարություն ունեցող մի $\overline{OQ}$ հատված, որի Q ծայրը գտնվի O կետից վերև՝ եթե $y>0$, ներքև՝ եթե $y<0$ և համընկնի O կետի հետ՝ եթե $y=0$: Այդ հատվածի Q ծայրը կլինի M կետի պրոյեկցիան Oy առանցքի վրա: Իմանալով P և Q կետերը, նրանցով, որպես պրոյեկցիաներով, հեշտ է կառուցել որոնելի M կետը: Դրա համար բավական է P և Q կետերից առանցքներին զուգահեռ ուղիղներ տանել. նրանց հատման կետը կլինի M-ը:

Դիտողություն: Եթե մենք պայմանավորվենք $\overline{PM}$ և $\overline{QM}$ ուղղությամբ օժտված հատվածները (գծ. 6) դիտարկել որպես այնպիսի առանցքների հատվածներ, որոնք ունեն իրենց զուգահետ կոորդինատային առանցքների ուղղությունները, ապա M կետի աբսցիսը կարտահայտվի ոչ միայն $\overline{OP}$ հատվածի մեծությամբ, այլև նրան հավասար $\overline{QM}$ հատվածի մեծությամբ։ Նույն կետի օրդինատը միատեսակ կարտահայտվի ինչպես $\overline{OQ}$ հատվածի մեծությամբ, այնպես էլ նրան հավասար $\overline{PM}$ հատվածի մեծությամբ $\overline{OP}$, $\overline{QM}$, $\overline{OQ}$ և $\overline{PM}$ ուղղությամբ օժտված հատվածները կանվանենք M կետի կոորդինատային հատվածներ։ Այդ դեպքում դիտարկված երկու հիմնական խնդիրները լուծելիս, անհրաժեշտություն չկա որոշել M կետի երկու պրոյեկցիաներն էլ. բավական է որոշել միայն մեկը, օրինակ՝ պրոյեկցիան աբսցիսների առանցքի վրա։ Այսպես, I խնդրում M կետից ուղղահայաց ենք իջեցնում աբսցիսների առանցքին։ Դրա P հիմքը կլինի M-ի պրոյեկցիան այդ առանցքի վրա։ $\overline{OP}$ հատվածի մեծությունը կտա տըված կետի x աբսցիսը, իսկ $\overline{PM}$ հատվածի մեծությունը՝ y օրդինատը։

Օրինակ։ Կառուցել այն կետը, որի կոորդինատներն են՝ $x=2$, $y=-3$։ O կետից սկսած դեպի աջ աբսցիսների առանցքի վրա վերցնենք 2 միավոր երկարությամբ հատված. այդ հատվածի P ծայրակետով տանենք Oy առանցքին զուգահեռ ուղիղ և նրա վրա P կետից սկսած դեպի ներքև վերցնենք 3 միավոր երկարությամբ հատված։ Այդ հատվածի ծայրակետը հենց կլինի որոնելի M կետը։

Այսպիսով, կոորդինատների մեր ընտրած սիստեմում հարթության յուրաքանչյուր կետին համապատասխանում է x և y կոորդինատների լիովին որոշակի մի կարգավորված զույգ և, հակադարձաբար, x և y թվերի յուրաքանչյուր կարգավորված զույգ հարթության վրա որոշում է միակ կետ, որի աբսցիսը հավասար է x-ին, օրդինատը՝ y-ին։ Ուստի, երբ տրված է կետը, այդ նշանակում է տրված են նրա կոորդինատները, գտնել մի կետ, նշանակում է գտնել նրա կոորդինատները։

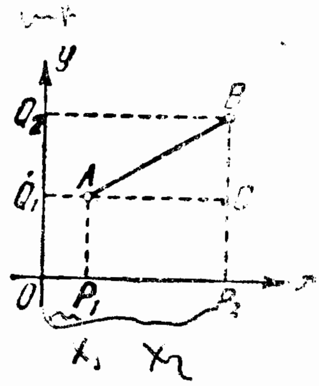
§ 5. Երկու կետերի հեռավորությունը հարթության վրա։ Այս գլխի 5, 6 և 10-րդ §-ներում մենք կդիտարկենք անալիտիկ երկրաչափության մի քանի պարզագույն խնդիրներ, որոնց հաճախ հանգեցվում են ավելի բարդ շատ խնդիրներ։ Այդպիսի պարզագույն խնդիրներից մեկը երկու կետերի հեռավորության վերաբերյալ խնդիրն է։

Դիցուք հարթության վրա ընտրված կոորդինատային սիստեմում[1] տված են երկու կետեր՝ $A(x_1, y_1)$ և $B(x_2, y_2)$: Այդ երկու կետերի միջև ընկած d հեռավորությունն արտահայտենք նրանց կոորդինատներով:

Գտնենք A և B կետերի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա (գծ. 8): Կունենանք՝

$$\text{մեծ}\ \overline{OP_1}=x_1, \quad \text{մեծ}\ \overline{OQ_1}=y_1,$$

$$\text{մեծ}\ \overline{OP_2}=x_2, \quad \text{մեծ}\ \overline{OQ_2}=y_2:$$



Գծ. 8

Տրված կետերից մեկից, օրինակ՝ A-ից, տանենք աբսցիսների առանցքին զուգահեռ ուղիղ մինչև P_2B ուղղի հետ հատվելը C կետում: ACB ուղղանկյուն եռանկյունից կստանանք՝

$$d^2=AC^2+CB^2$$

(այստեղ AC-ն ու BC-ն՝ ACB եռանկյան կողմերի երկարություններն են): Բայց քանի որ (գլ. I, § 3)՝

$$AC=P_1P_2=|x_2-x_1|$$

և

$$CB=Q_1Q_2=|y_2-y_1|,$$

ապա՝

$$d^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2,$$

կամ՝

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

որտեղից՝

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (3)$$

Պարզ է, որ այստեղ պետք է վերցնել արմատի թվաբանական արժեքը:

Այսպիսով, տված երկու կետերի միջև հեռավորությունը գտնելու համար պետք է քառակուսի արմատ հանել նրանց համանուն կոորդինատների տարբերությունների քառակուսիների գումարից:

Դիտողություն: Եթե տված A և B կետերը գտնվեն

[1] Պարզ է, որ կետերի կոորդինատների մասին խոսել կարելի է միայն այն դեպքում, երբ կոորդինատների սիստեմն ընտրված է: Հետագայում մենք ամեն անգամ չենք հիշեցնելու կոորդինատային սիստեմի ընտրված լինելու մասին:

կոորդինատային առանցքներից մեկին զուգահեռ ուղղի վրա, ABC եռանկյուն չենք ստանա, սակայն (3) բանաձևն այս դեպքում ևս իրավացի կլինի։ Իսկապես, եթե A և B կետերը գտնվեն, օրինակ, Ox առանցքին զուգահեռ ուղղի վրա, այդ դեպքում՝ ակներևաբար՝ $AB=P_1P_2=|x_2-x_1|$ (գլ. I, § 3)։ Այս նույն պատասխանը կստացվի նաև (3) բանաձևից, քանի որ տվյալ դեպքում $y_1=y_2$։

$M(x, y)$ կետի հեռավորությունը $O(0,0)$ կետից, (3) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$d=\sqrt{x^2+y^2}\text{։} \qquad (3')$$

Օրինակ։ Գտնել $(-1, 4)$ և $(2, 0)$ կետերի հեռավորությունը։ Այդ հեռավորությունը հաշվենք (3) բանաձևով։ Այստեղ $x_1=-1$, $y_1=4$, $x_2=2$, $y_2=0$, հետևաբար՝

$$d=\sqrt{[2-(-1)]^2+(0-4)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5\text{։}$$

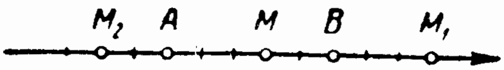
§ 6. Հատվածի բաժանումը տվյալ հարաբերությամբ։ Դիցուք տված են A և B երկու կետերը։ Այդ կետերով տանենք ուղիղ և նրա վրա կամայապես ընտրենք դրական ուղղություն։ Դիցուք M-ը մի որոշ կետ է այդ առանցքի վրա։ Որտեղ էլ գտնըվելու լինի M կետը—$\overline{AB}$ հատվածի ներսը, թե՞ նրա շարունակության վրա դեպի մեկ կամ մյուս կողմը—պայմանավորվենք ասել, որ նա բաժանում է $\overline{AB}$ ուղղությամբ օժտված հատվածը։ Ընդորում, եթե M կետը գտնվում է A և B կետերի միջև, կասենք, որ նա $\overline{AB}$ հատվածը ներքնապես է բաժանում, իսկ եթե M կետը գտնվում է հատվածի շարունակության վրա, ապա կասենք, որ նա հատվածն արտաքնապես է բաժանում։

Ասում ենք, որ M կետը $\overline{AB}$ հատվածը բաժանում է λ հարաբերությամբ, եթե λ թիվը որոշվում է այսպես՝

$$\lambda=\frac{\text{մեծ } \overline{AM}}{\text{մեծ } \overline{MB}}\text{։} \qquad (4)$$

Եթե M կետը $\overline{AB}$ հատվածը ներքնապես է բաժանում, այդ դեպքում $\overline{AM}$ և $\overline{MB}$ հատվածներն ունեն միևնույն ուղղությունը իսկ նրանց մեծությունները՝ նույն նշանը, հետևաբար λ հարաբերությունը դրական է։ Եթե M կետը համընկնում է հատվածի A սկզբնակետի հետ, ապա $\lambda=0$։ Բաժանող M կետը հատվածի B ծայրակետին մոտենալիս λ հարաբերությունն անսահմանորեն աճում է, քանի որ հայտարարը (մեծ $\overline{MB}$-ն) ձգտում է զրոյի։ Բաժանող M կետը հատվածի B ծայրակետի հետ համընկնելու դեպքը պետք է բացառել, քանի որ այդ դեպքում հարաբերությունն իմաստը կորցնում է (կոտորակի հայտարարը զրո է դառնում)։

Եթե M կետը հատվածն արտաքնապես է բաժանում, ապա նրա ցանկացած դիրքի դեպքում $\overline{AM}$ և $\overline{MB}$ հատվածներն ունեն հակադիր ուղղություններ, իսկ նրանց մեծությունները՝ հակադիր նշաններ և, հետևաբար, λ հարաբերությունը, որով M կետը բաժանում է $\overline{AB}$ հատվածը, բացասական է։ Ընդ որում պարզ է, որ եթե բաժանող M կետը գտնվում է $\overline{AB}$ հատվածից դուրս՝ նրա սկզբից այն կողմը, ապա λ հարաբերության բացարձակ մեծությունը մեկից փոքր է. իսկ եթե M-ը գտնվում է $\overline{AB}$ հատվածի շարունակության վրա՝ նրա ծայրից այն կողմը, ապա $|\lambda|>1$ (նկատենք, որ բաժանող M կետի ոչ մի դիրքի դեպքում λ հարաբերությունը չի կարող հավասարվել —1-ի)։



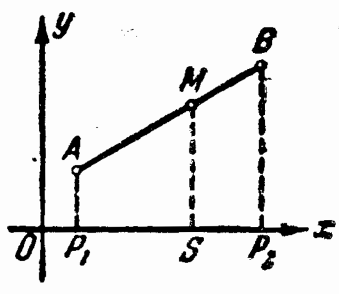
Գծ. 9.

Այսպիսով, ուղիղի վրա M կետի յուրաքանչյուր դիրքին (բացի այն դեպքից, երբ M-ը համընկնում է դիտարկվող հատվածի ծայրի հետ) համապատասխանում է λ հարաբերության որոշակի արժեք։

Այսպես, օրինակ, գծ. 9-ում M կետը $\overline{AB}$ հատվածը բաժանում է $\lambda=\frac{3}{2}$ հարաբերությամբ։ Այդ նույն կետը $\overline{BA}$ հատվածը բաժանում է $\lambda=\frac{2}{3}$ հարաբերությամբ։ M_1 կետը $\overline{BA}$ հատվածն արտաքնապես բաժանում է $\lambda=-\frac{8}{3}$ հարաբերությամբ, իսկ M_2 կետն այդ նույն $\overline{AB}$ հատվածը բաժանում է $\lambda=-\frac{2}{7}$ հարաբերությամբ։

Հատվածը տվյալ հարաբերությամբ բաժանելու խնդիրն այսպես պիտի հասկանալ. տված են $A(x_1, y_1)$ ու $B(x_2, y_2)$ կետերը և λ հարաբերությունը, որով $\overline{AB}$ ուղիղի մի որոշ $M(x, y)$ կետ բաժանում է $\overline{AB}$ հատվածը. պահանջվում է գտնել M կետի x, y կոորդինատները։

Դիցուք P_1, S, P_2 կետերը՝ A, M, B կետերի պրոյեկցիաներն են Ox առանցքի վրա ($AB \nparallel Oy$) (գծ, 10)։ AP_1, MS և BP_2 ուղիղները զուգահեռ են և, հետևաբար, նրանք AB ուղիղն ու Ox առանցքը բաժանում են համեմատական մասերի, այնպես որ՝ $AM : MB = P_1S : SP_2$։ Նման առնչություն կա նաև $\overline{AM}$, $\overline{MB}$, $\overline{P_1S}$ և $\overline{SP_2}$ ուղղությամբ օժտված հատվածների մեծությունների միջև՝



Գծ. 10

$$\frac{\text{մեծ}\ \overline{AM}}{\text{մեծ}\ \overline{MB}}=\frac{\text{մեծ}\ \overline{P_1S}}{\text{մեծ}\ \overline{SP_2}}: \tag{5}$$

Իրոք, գրված համաարության երկու մասերի մոդուլները, ինչպես հենց նոր ցույց տրվեց, հավասար են, իսկ նշաններն էլ համընկնում են, որովհետև $\overline{AB}$ *հատվածի նկատմամբ* M *կետի ամեն մի դասավորության դեպքում (ներսը, թե դուրսը՝ այս կամ այն կողմում)* S *կետը միշտ համապատասխան դասավորություն կունենա* $\overline{P_1P_2}$ *հատվածի նկատմամբ:*

Քանի որ (գլ. I, § 3)՝

$$\text{մեծ}\ \overline{P_1S}=x-x_1, \qquad \text{մեծ}\ \overline{SP_2}=x_2-x$$

և, ըստ պայմանի՝

$$\frac{\text{մեծ}\ \overline{AM}}{\text{մեծ}\ \overline{MB}}=\lambda,$$

ապա (5) համեմատությունից կստանանք՝

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda,$$

որտեղից՝ $x-x_1=\lambda(x_2-x)$, *կամ՝* $x-x_1=\lambda x_1-\lambda x$,

այսինքն՝ $x+\lambda x=x_1+\lambda x_2$:

Լուծելով x-*ի նկատմամբ, կստանանք՝*

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}: \tag{6}$$

M *կետի* y *օրդինատն ստանալու համար պետք է* A, M, B *կետերը պրոյեկտել օրդինատների առանցքի վրա. նախորդի նման կստանանք՝*

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}: \tag{7}$$

(6) և (7) բանաձևերն էլ հենց լուծում են առաջադրված խնդիրը. դրանցից հետևում է, որ λ-*ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է* AB *ուղղի մի որոշակի* M *կետ, որի կոորդինատները որոշվում են հենց այդ բանաձևերով: Բացառություն է կազմում* $\lambda=-1$ *արժեքը, որի դեպքում բանաձևերը կորցնում են իրենց իմաստը:*

(6) և (7) բանաձևերում, ընդունելով $\lambda=1$, *կգտնենք* հատվածի միջնակետի կոորդինատները՝

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \tag{8}$$

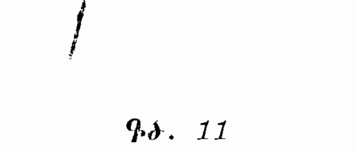
այսինքն՝ հատվածի միջնակետի կոորդինատներից յուրաքանչյուրը հավասար է նրա ծայրակետերի համանուն կոորդինատների կիսագումարին:

Դիտողություն: (6) և (7) բանաձևերն արտածելիս մենք ենթադրել էինք, որ AB *ուղիղը կոորդինատային առանցքներից ոչ մեկին զուգահեռ չէ: Սակայն բանաձևերն այդ դեպքում ևս իրավացի կլինեն: Իրոք, եթե* AB *ուղիղը զուգահեռ է* Oy *առանցքին, ապա* $x_1=x_2=x$ *և (6) բանաձևն ուժի մեջ է մնում: Ճիշտ այդպես էլ, (7) բանաձևն ուժի մեջ կմնա, եթե* AB *ուղիղը զուգահեռ լինի* Ox *առանցքին:*

Օրինակ: Գտնել այն M *կետի կոորդինատները, որն* A(1, 2) *և* B(—1,4) *կետերը միացնող* **AB** *հատվածը բաժանում է* 1:2 *հարաբերությամբ: Այստեղ՝* $x_1=1$, $y_1=2$, $x_2=-1$, $y_2=4$ *և* $\lambda=\frac{1}{2}$*: Հետևաբար՝*

$$x=\frac{1+\frac{1}{2}(-1)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}, \qquad y=\frac{2+\frac{1}{2}\cdot 4}{1+\frac{1}{2}}=\frac{8}{3}:$$

§ **7. Երկու առանցքներով կազմված անկյունը:** *Դիցուք հարթության վրա տված են* l_1 *և* l_2 *երկու առանցքներ, որոնք հատվում են* S *կետում (գծ. 11): Պայմանավորվենք տվյալ կարգով տրված* l_1 *և* l_2 *երկու առանցքների միջև կազմված անկյուն ասելով հասկանալ այն անկյունը, որով պետք է* l_1 *առանցքը պտտել* S *կետի շուրջը, որպեսզի նրա դրական ուղղությունը համընկնի* l_2 *առանցքի դրական ուղղության հետ: Այդ անկյունը նշանակելու ենք* (l_1, l_2)*: Նկատենք, որ* (l_1, l_2) *անկյունը կարող ենք դիտարկել նաև որպես* S *կետից* l_1 *և* l_2 *առանցքների դրական ուղղություններով ելնող ճառագայթներով կազմված անկյուն: Անկյունը չափելով, ինչպես սովորաբար, աստիճաններով կամ ռադիաններով*[1], *մենք ստացված թիվը, ինչպես և եռանկյունաչափա-*



Գծ. 11

[1] *Հիշենք, որ չափման երկու եղանակների միջև էական տարբերություն չկա, տարբերությունը միայն չափման միավորի ընտրության մեջ է,*

թյան մեջ, կվերցնենք $+$ կամ $-$ նշանով՝ պտտման ուղղությունից կախված, այն է՝ $+$ նշանով, եթե անկյունն ստացվում է l_1 առանցքը ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ պտտելով, և $-$ նշանով, եթե այդ առանցքի պտույտը կատարվում է ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ[2]։ Սակայն, l_1 առանցքը ո՛չ միակ ձևով կարելի է պտտել այնպես, որ նրա դրական ուղղությունը համընկնի l_2 առանցքի դրական ուղղության հետ։ Իրոք, եթե l_1 առանցքն արդեն պտտել ենք այդպիսի անկյունով, ապա դրանից հետո կարելի է լրացուցիչ կերպով այն նորից պտտել, ցանկացած անգամ լրիվ պտույտներ կատարելով ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ այնպես, որ l_1-ի դրական ուղությունն առաջվա նման համընկնի l_2-ի դրական ուղղության հետ։

Այդպիսով, առանցքների միջև կազմված (l_1, l_2) անկյան համար կարելի է նշել ոչ թե մեկ, այլ անթիվ բազմությամբ արժեքներ։ Եթե այդ արժեքներից մեկը նշանակենք ω, ապա անկյան ամեն մի արժեք կարելի է ստանալ հետևյալ բանաձևով՝

$$(l_1, l_2) = \omega + 2n\pi,$$

որտեղ n-ը ցանկացած ամբողջ թիվ է (դրական, բացասական կամ զրո)։

Հետագայում, խոսելով երկու առանցքներով կազմված անկյան մասին, մենք սովորաբար նկատի ենք ունենալու նրա բոլոր հնարավոր արժեքներից որևէ մեկը. ամենից հաճախ՝ իր մոդուլով փոքրագույնը։

Մեր դատողությունների ընթացքում մենք ենթադրում էինք, որ l_1 և l_2 առանցքները հատվում են։ Առանցքների զուգահեռության դեպքում նրանցով կազմված անկյունը համարելու ենք հա-

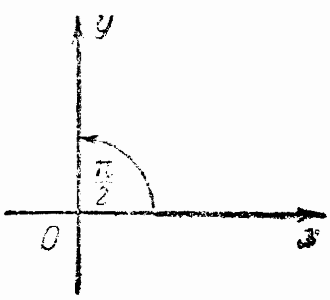
որպիսին մի դեպքում ընդունվում է այն կենտրոնական անկյունը, որը հենվում է շրջանագծի $\frac{1}{360}$ մասի վրա (աստիճան), մյուս դեպքում՝ այն կենտրոնական անկյունը, որը հենվում է շրջանագծի՝ իր երկարությամբ շառավղին հավասար աղեղի վրա (ռադիան)։ Անկյունները ռադիաններով չափելիս չափման միավորի (ռադիանի) անունը հաճախ բաց են թողնում։ Օրինակ, ասում են «ուղիղ անկյունը հավասար է $\frac{\pi}{2}$-ի», փոխանակ ասելու՝ «ուղիղ անկյունը հավասար է $\frac{\pi}{2}$ ռադիանի», «անկյունը հավասար է 2,3-ի», փոխանակ «անկյունը հավասար է 2,3 ռադիանի»։

[2] Տե՛ս սույն պարագրաֆի վերջում արված դիտողությունը։

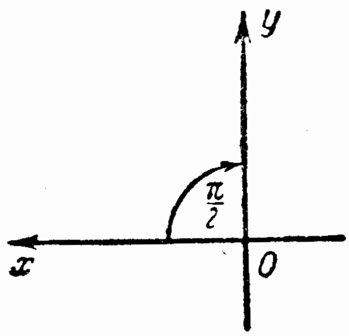
վասար զրոյի (կամ, ընդհանրապես՝ $2n\pi$), եթե նրանց դրական ուղղությունները համընկնում են, և π-ի (կամ, ընդհանրապես՝ $\pi+2n\pi$), եթե նրանց դրական ուղղությունները հակադիր են։

Շարադրվածի նմանությամբ, պայմանավորվում ենք առանցքով և ուղղությամբ օժտված հատվածով կազմված անկյուն ասելով հասկանալ այն անկյունը, որով պետք է առանցքը պտտել, որպեսզի նրա դրական ուղղությունը համընկնի հատվածի ուղղության հետ (հարկ եղած դեպքում կարելի է հատվածը շարունակել մինչև առանցքի հետ հատվելը)։

Դիտողություն։ Մենք պայմանավորվեցինք դրական համարել այն անկյունները, որոնք հաշվվում են ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ։ Սակայն, երբեմն ավելի հարմար է լինում դրական անկյունները հաշվել ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ։ Անկյուններ հաշվելու դրական ուղղության ընտրությունը կապված է կոորդինատային սիստեմի ընտրության հետ։ Հարթության վրա վերցնենք կոորդինատների ուղղանկյուն դեկարտյան սիստեմի առանցքների դասավորության երկու տեսակ։ Եթե նայենք Oy առանցքի դրական ուղղությամբ, Ox առանցքը կարող է ուղղված լինել դեպի աջ (գծ. 12) կամ դեպի ձախ (գծ. 13)։ Առաջին դեպքում կոորդինատների սիստեմը կոչվում է աջ սիստեմ, երկրորդ դեպքում՝ ձախ սիստեմ։ Այդ երկու սիստեմներից էլ կարելի է օգտվել։ Ինչպես աջ սիստեմում, այնպես էլ ձախ սիստեմում այն անկյուններն են դրական համարվում, որոնք հաշվվում են այն ուղղությամբ, ինչ ուղղությամբ որ պետք է Ox առանցքը պտտել ուղիղ անկյունով, որպեսզի նրա դրական ուղղությունը համընկնի Oy առանցքի դրական ուղղության հետ։ Ակներևաբար (տես գծ. 12 և 13), աջ սիստեմի դեպքում այդ պտույտը կա-



Գծ. 12

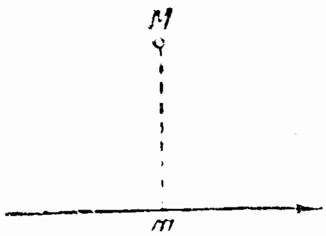


Գծ. 13

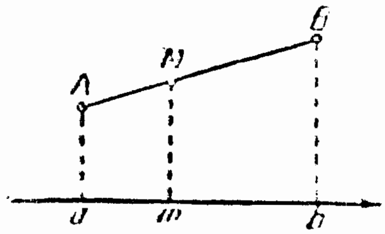
տարվում է ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ, իսկ ձախ սիստեմի դեպքում՝ ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ։ Հետագայում մենք, որպես կանոն, օգտվելու ենք կոորդինատների աջ սիստեմից և, դրան համապատասխան, դրական անկյունները հաշվելու ենք ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ, որ և նշեցինք սկզբում:

§ 8. Պրոյեկցիաների տեսության հիմնական դրույթները: Արդեն ասել ենք, որ M կետի պրոյեկցիա առանցքի վրա կոչվում է M կետից այդ առանցքի վրա իջեցրած ուղղահայացի m հիմքը (գծ. 14):

Դիցուք հարթության վրա տված է ուղղությամբ օժտված մի $\overline{AB}$ հատված և մի l առանցք (պրոյեկցիաների առանցք) (գծ. 15): Այդ հատվածը մենք դիտարկելու ենք որպես M շարժվող կետի անցնելիք ճանապարհ: Երբ M կետը շարժվի $\overline{AB}$ հատվածով, նրա m պրոյեկցիան առանցքի վրա կգծի ուղղությամբ օժտված



Գծ. 14



Գծ. 15

մի $\overline{ab}$ հատված, որը կոչվում է $\overline{AB}$ հատվածի երկրաչափական պրոյեկցիա l առանցքի վրա:

Սակայն, հետագայում հիմնական դեր կատարելու է հատվածի ոչ թե երկրաչափական պրոյեկցիան, այլ նրա մեծությունը, որը կոչվում է հատվածի պրոյեկցիա առանցքի վրա:

Այսպես, ուրեմն, ուղղությամբ օժտված հատվածի պրոյեկցիա առանցքի վրա կոչվում է առանցքի այն հատվածի մեծությունը, որի սկիզբը պրոյեկտվող հատվածի սկզբի պրոյեկցիան է, ծայրը՝ այդ հատվածի ծայրի պրոյեկցիան:

Նկատենք, որ ուղղությամբ օժտված հատվածի պրոյեկցիան թիվ է (դրական, բացասական կամ զրո): Պայմանավորվենք $\overline{AB}$ հատվածի պրոյեկցիան l առանցքի վրա նշանակել պր$_l \overline{AB}$ կարճ՝ պր $\overline{AB}$:

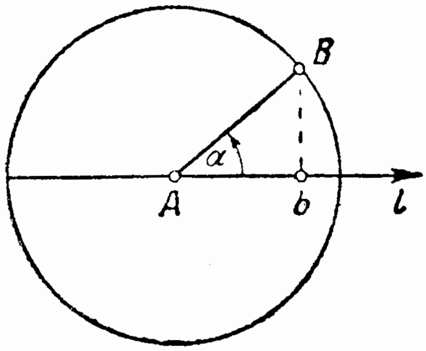
Ծանոթանանք պրոյեկցիաների տեսության հիմնական դրույթներին:

Ուղղությամբ օժտված $\overline{AB}$ հատվածի պրոյեկցիան l առանցքի վրա հավասար է այդ հատվածի AB երկարությանը՝ բազմապատկած պրոյեկցիաների առանցքով ու տվյալ հատվածով կազմված α անկյան կոսինուսով՝

$$\text{պր}_l\, \overline{AB} = AB\cos\alpha: \qquad (9)$$

Այս բանաձևի իրավացիությունը բավական է ապացուցել այն դեպքի համար, երբ պրոյեկցիաների առանցքն անցնում է պրոյեկտվող հատվածի սկզբնակետով։ Իրոք, $\overline{AB}$ հատվածի պրոյեկցիան չի փոխվի, եթե պրոյեկցիաների առանցքն ինքն իրեն զուգահեռ տեղափոխենք։ Այդ ժամանակ պրոյեկցիաների առանցքով և հատվածով կազմված անկյունը նույնպես կպահպանի իր նախկին արժեքը։

Դիցուք պրոյեկցիաների l առանցքն անցնում է $\overline{AB}$ պրոյեկտվող հատվածի սկզբնակետով (գծ. 16)։



Գծ. 16

(9) հավասարությունն ապացուցելու համար, կառուցենք մի եռանկյունաչափական շրջանագիծ, որի կենտրոնը $\overline{AB}$ հատվածի սկիզբն է, իսկ շառավիղը հավասար է այդ հատվածի երկարությանը, և ընդունենք, որ նրա սկզբնական տրամագիծն ուղղված է l առանցքով (գծ. 16)։ Կոսինուսի սահմանման համաձայն ունենք՝

$$\cos\alpha = \frac{\text{մեծ}\ \overline{AB}}{AB}:$$

Քանի որ

$$\text{մեծ}\ \overline{AB} = \text{պր}_l\, \overline{AB},$$

ապա՝

$$\cos\alpha = \frac{\text{պր}_l\, \overline{AB}}{AB},$$

որտեղից՝

$$\text{պր}_l\, \overline{AB} = AB\cos\alpha:$$

(9) հավասարությունն ապացուցվեց։

Այժմ ենթադրենք, թե ուղղությամբ օժտված $\overline{AB}$ հատվածը գտնվում է մի u առանցքի վրա. դիցուք φ-ն՝ պրոյեկցիաների l առանցքով և u առանցքով կազմված անկյունն է։

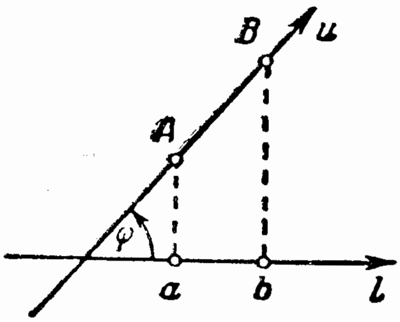
Ուղղությամբ օժտված $\overline{AB}$ հատվածի պրոյեկցիան l առանցքի վրա հավասար է այդ հատվածի մեծությանը՝ բազմապատկած պրոյեկցիաների l առանցքով և u առանցքով կազմված φ անկյան կոսինուսով՝

$$\text{պր}_l\, \overline{AB} = \text{մեծ}\,\overline{AB} \cdot \cos\varphi: \qquad (10)$$

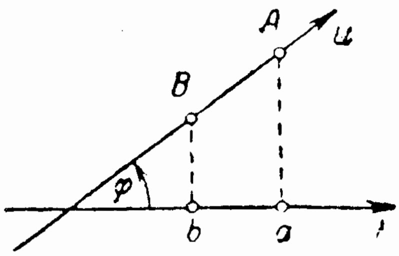
Նկատենք, որ այս բանաձևում պրոյեկցիան արտահայտված է մի որոշ առանցքի վրա գտնվող հատվածի մեծության *միջոցով,* մինչդեռ (9) բանաձևում օգտագործվում է հատվածի երկարությունը։

Ապացուցենք (10) հավասարությունը։ Այն դեպքում, երբ $\overline{AB}$ հատվածի ուղղությունը համընկնում է u առանցքի դրական ուղղության հետ (գծ. 17), (10) հավասարությունն ուղղակի հետևում է արդեն ապացուցված (9) հավասարությունից։ Իրոք, այդ դեպքում φ անկյունը միաժամանակ հանդիսանում է պրոյեկցիաների առանցքի և հատվածի միջև կազմված α անկյունը և հետևաբար՝

$$\text{պր}_l\,\overline{AB} = AB\cos\alpha = AB\cos\varphi\text{։}$$



Գծ. 17



Գծ. 18

Բացի այդ, հաշվի առնելով, որ տվյալ դեպքում

$$\text{մեծ}\,\overline{AB} = AB,$$

կստանանք՝

$$\text{պր}_l\,\overline{AB} = \text{մեծ}\,\overline{AB}\cos\varphi\text{։}$$

Իսկ եթե $\overline{AB}$ հատվածի ուղղությունը հակադիր է u առանցքի ուղղությանը (գծ. 18), ապա պրոյեկցիաների առանցքի և $\overline{AB}$ հատվածի միջև կազմված α անկյունը հավասար է $\varphi+\pi$ (քանի որ՝ եթե l առանցքը նախ պտտենք φ անկյունով, և ապա նաև π անկյունով, այդ ժամանակ նրա դրական ուղղությունը կհամընկնի u, առանցքի բացասական ուղղության հետ, այսինքն՝ $\overline{AB}$ հատվածի ուղղության հետ)։ Հետևաբար՝

$$\text{պր}_l\,\overline{AB} = AB\cos\alpha = AB\cos(\varphi+\pi) = -AB\cos\varphi\text{։}$$

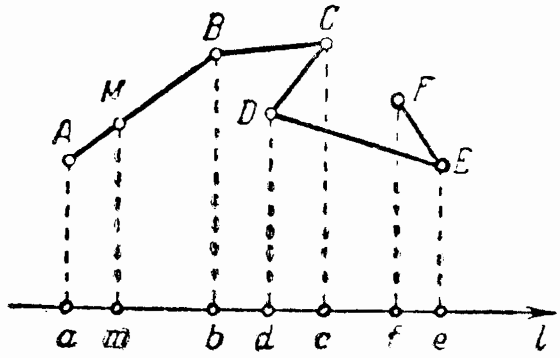
Հաշվի առնելով, որ այս դեպքում մեծ $\overline{AB} = -AB$, կստանանք

$$\text{պր}_l\,\overline{AB} = \text{մեծ}\,\overline{AB}\cos\varphi\text{։}$$

Այսպիսով, (10) հավասարությունը լրիվ ապացուցվեց։

Այժմ վերցնենք մի կամայական բեկյալ գիծ՝ ABCDEF (գծ. 19)։ Այդ բեկյալը մենք կդիտարկենք որպես հետագիծ մի M կետի, որը հաջորդաբար գծում է այդ բեկյալի բոլոր օղակները (հատ-

վածները)՝ նրա A *սկզբնակետից մինչև* F *ծայրակետը: Այդ ժամանակ բեկյալի վրա սահմանվում է շարժման ուղղություն, իսկ նրա օղակները կարող են դիտվել որպես ուղղությամբ օժտված հատվածներ: Այդպիսի բեկյալը կանվանենք* ուղղությամբ օժտված բեկյալ[1]: A, B, C, D, E *և* F *կետերը հաջորդաբար միացնող ուղղությամբ օժտված բեկյալը կնշանակենք* $\overline{\mathrm{ABCDEF}}$:



Գծ. 19

Երբ M *կետը շարժվի* $\overline{\mathrm{ABCDEF}}$ *բեկյալի վրայով, նրա* m *պրոյեկցիան առանցքի վրա կշարժվի* a *կետից, որն* A *կետի պրոյեկցիան է, մինչև* f *կետը, որն* F *կետի պրոյեկցիան է: Առանցքի ուղղությամբ օժտված* $\overline{\mathrm{af}}$ *հատվածը կոչվում է* $\overline{\mathrm{ABCDEF}}$ *բեկյալի երկրաչափական պրոյեկցիա առանցքի վրա:*

Բեկյալի երկրաչափական պրոյեկցիայի մեծությունն անվանում են բեկյալի պրոյեկցիա: Այսպիսով, ուղղությամբ օժտված բեկյալի պրոյեկցիա առանցքի վրա կոչվում է այդ առանցքի այն հատվածի մեծությունը, որի սկիզբը պրոյեկտվող բեկյալի սկզբնակետի պրոյեկցիան է, իսկ ծայրը՝ այդ բեկյալի ծայրակետի պրոյեկցիան:

Նկատենք, որ ուղղությամբ օժտված բեկյալի պրոյեկցիան առանցքի վրա՝ թ ի վ *է:*

Հեշտ է ցույց տալ, որ ուղղությամբ օժտված բեկյալի պրոյեկցիան հավասար է նրա հատվածների պրոյեկցիաների գումարին: *Իրոք, առանցքի վրա պրոյեկտելով* $\overline{\mathrm{ABCDEF}}$ *բեկյալի յուրաքանչյուր օղակը (գծ. 19), կստանանք (գլ. I. §1)՝*

$$\text{մեծ}\ \overline{\mathrm{af}} = \text{մեծ}\ \overline{\mathrm{ab}} + \text{մեծ}\ \overline{\mathrm{bc}} + \text{մեծ}\ \overline{\mathrm{cd}} + \text{մեծ}\ \overline{\mathrm{de}} + \text{մեծ}\ \overline{\mathrm{ef}},$$

կամ, բեկյալի պրոյեկցիան նշանակելով պր $\overline{\mathrm{ABCDEF}}$, *կունենանք՝*

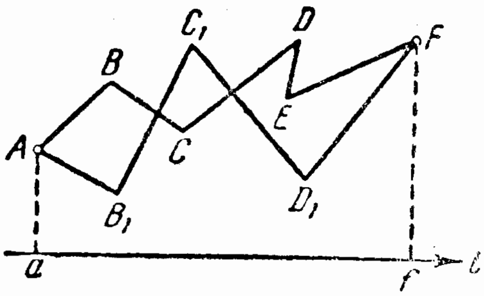
$$\text{պր}\ \overline{\mathrm{ABCDEF}} = \text{պր}\ \overline{\mathrm{AB}} + \text{պր}\ \overline{\mathrm{BC}} + \text{պր}\ \overline{\mathrm{CD}} + \text{պր}\ \overline{\mathrm{DE}} + \text{պր}\ \overline{\mathrm{EF}}: \qquad (11)$$

Այնուհետև պարզ է, որ ուղղությամբ օժտված բեկյալի պրոյեկցիան նրա ձևից կախված չէ, այլ կախված է միայն նրա

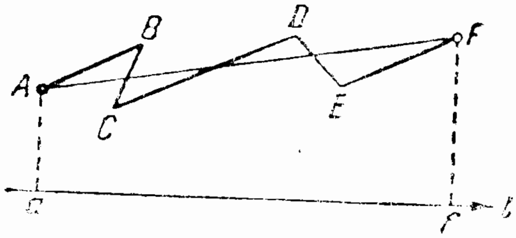
[1] *Հետագայում ուղղությամբ օժտված բեկյալն ուղղակի անվանելու ենք բեկյալ, բաց թողնելով «ուղղությամբ օժտված» բառերը, եթե այդ թյուրիմացության առիթ չի տա:*

սկզբնակետի և ծայրակետի դիրքից: Հետևաբար, ընդհանուր սկզբնակետ և ընդհանուր ծայրակետ ունեցող բեկյալների պրոյեկցիաները միմյանց հավասար են *(գծ. 20)*։

Բեկյալ գծի փակող հատված *անվանենք ուղղությամբ օժտված այն հատվածը, որի սկիզբն այդ բեկյալի սկզբնակետն է, իսկ ծայրը՝ նրա ծայրակետը։ Ակներևաբար,* բեկյալի պրոյեկցիան հավասար է նրա փակող հատվածի պրոյեկցիային *(գծ. 21)*։



Գծ. 20



Գծ. 21

Եթե բեկյալը փակ *է, այսինքն՝ նրա սկզբնակետն ու ծայրակետը համընկնում են, ապա* նրա պրոյեկցիան հավասար է զրոյի։

§ **9. Ուղղությամբ օժտված հատվածի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա։** *Այս պարագրաֆում մենք ամենից առաջ կստանանք բանաձևեր, որոնք արտահայտում են ուղղությամբ օժտված հատվածի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա։*

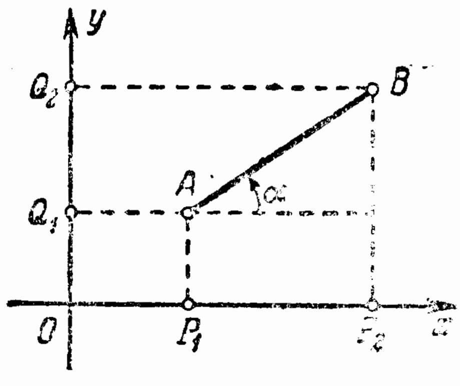
Դիցուք հայտնի են $\overline{AB}$ *հատվածի* d *երկարությունը և* Ox *առանցքով ու այդ հատվածով կազմված* α *անկյունը (գծ. 22)։*

$\overline{AB}$ *հատվածի պրոյեկցիան* Ox *առանցքի վրա կստանանք ուղղակի § 8-ի (9) բանաձևից՝ պր*$_x\,\overline{AB}=d\cos\alpha$։ $\overline{AB}$ *հատվածի պրոյեկցիան* Oy *առանցքի վրա ստանալու համար նկատենք, որ* Oy *առանցքի և* $\overline{AB}$ *հատվածի միջև կազմված անկյունը հավասար է* $\alpha-\frac{\pi}{2}$. *իսկապես, եթե* Oy *առանցքը նախ պտտենք* $-\frac{\pi}{2}$ *անկյունով, հետո՝* α *անկյունով, ապա նրա դրական ուղղությունը կհամընկնի* $\overline{AB}$ *հատվածի ուղղության հետ։ Այդ դեպքում պր*$_y\,\overline{AB}=d\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=d\sin\alpha$։ *Այսպիսով ստացանք՝*

$$\left.\begin{aligned} &\text{պր}_x\overline{AB}=d\cos\alpha,\\ &\text{պր}_y\overline{AB}=d\sin\alpha։\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Այժմ ենթադրենք, թե $\overline{AB}$ հատվածը գտնվում է մի u առանցքի վրա։ Այդպիսի դեպքում այդ հատվածի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա կարելի է արտահայտել նաև իր մեծության և Ox առանցքով ու u առանցքով կազմված φ անկյունով։ Ըստ (10) բանաձևի կունենանք՝

$$\left.\begin{aligned} \text{պր}_x\,\overline{AB} &= \text{մեծ}\,\overline{AB}\cos\varphi, \\ \text{պր}_y\,\overline{AB} &= \text{մեծ}\,\overline{AB}\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$



Գծ. 22

քանի որ Oy և u առանցքներով կազմված անկյունը հավասար է $\varphi - \frac{\pi}{2}$ և $\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\varphi$։

Իսկ եթե $\overline{AB}$ հատվածը տրված է իր $A(x_1, y_1)$ սկզբի և $B(x_2, y_2)$ ծայրի կոորդինատների միջոցով, ապա հատվածի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա կարելի է արտահայտել նրա ծայրակետերի կոորդինատների միջոցով։

$\overline{AB}$ հատվածի պրոյեկցիան Ox առանցքի վրա հավասար է Ox առանցքի $\overline{P_1P_2}$ հատվածի մեծությանը (գծ. 22)։ Քանի որ մեծ $\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1$ (գլ. 1, § 3), ուստի $\text{պր}_x\overline{AB} = x_2 - x_1$։ Ճիշտ այդպես էլ՝ $\text{պր}_y\overline{AB} = y_2 - y_1$։ Այսպիսով, ստացանք՝

$$\left.\begin{aligned} \text{պր}_x\,\overline{AB} &= x_2 - x_1, \\ \text{պր}_y\,\overline{AB} &= y_2 - y_1 ։\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Նկատենք, որ կոորդինատների սկզբնակետը $M(x, y)$ կամայական կետի հետ միացնող հատվածը պրոյեկտելով կոորդինատային առանցքների վրա, (14) բանաձևերով կստանանք՝

$$\left.\begin{aligned} \text{պր}_x\,\overline{OM} &= x, \\ \text{պր}_y\,\overline{OM} &= y ։\end{aligned}\right\} \qquad (14')$$

Այսպիսով, M կետի x և y կոորդինատները կարելի է դիտարկել որպես $\overline{OM}$ հատվածի պրոյեկցիաներ կոորդինատային առանցքների վրա։

Հետագայում մեզ հարկավոր է լինելու մի բանաձև, որը Ox առանցքով և $\overline{AB}$ հատվածով կազմված անկյան տանգենսն արտահայտում է այդ հատվածի ծայրակետերի կոորդինատների միջոցով։ Այդ բանաձևը հեշտությամբ կստացվի, եթե օգտվենք մեր ստացած բանաձևերից։ Իրոք, միմյանց հետ բաղդատելով (12) և (14) բանաձևերը, կստանանք՝

$$\left.\begin{aligned} d\cos\alpha &= x_2 - x_1 \\ d\sin\alpha &= y_2 - y_1 \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

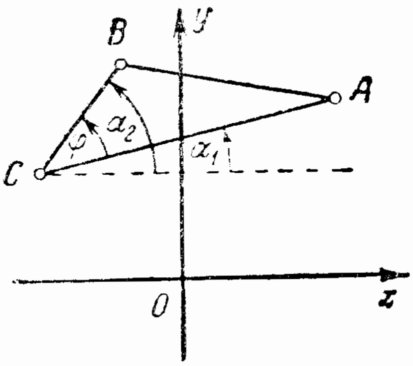
որտեղից

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (16)$$

Այս բանաձևը որոշում է Ox առանցքով և ուղղությամբ օժտված $\overline{AB}$ հատվածով կազմված անկյան տանգենսը։

Եթե հատվածի ուղղությունը փոխենք իր հակադիր ուղղությամբ, այսինքն՝ դիտարկենք $\overline{BA}$ հատվածը, ապա Ox առանցքի և հատվածի միջև կազմված անկյունը կփոխվի π-ով, իսկ անկյան տանգենսը, ակներևաբար, կպահպանի նախկին արժեքը և, հետևաբար, կորոշվի նույն (16) բանաձևով։

§ 10. Եռանկյան մակերեսը։ Տրված են եռանկյան գագաթները՝ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ (գծ. 23)։ Եռանկյան մակերեսն արտահայտենք նրա գագաթների կոորդինատների միջոցով։



Գծ. 23

Դիցուք $CA = d_1$, $CB = d_2$, իսկ φ-ն՝ $\overline{CA}$ և $\overline{CB}$ հատվածներով կազմված անկյունն է (այսինքն՝ այն անկյունը, որով պետք է պտտել $\overline{CA}$ հատվածը C կետի շուրջը, որպեսզի այն համընկնի $\overline{CB}$ հատվածի ուղղության հետ. անկյունը, ինչպես սովորաբար, վերցնելու ենք իր նշանով)։

Ինչպես հայտնի է, եռանկյան մակերեսը՝

$$S = \left| \frac{1}{2}\, d_1 d_2 \sin\varphi \right|.$$

Բայց, քանի որ $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, որտեղ α_1-ը և α_2-ը՝ Ox առանցքով և $\overline{CA}$ ու $\overline{CB}$ հատվածներով կազմված անկյուններն են, ուստի՝

$$\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi = \frac{1}{2}\, d_1 d_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(d_1\cos\alpha_1\, d_2\sin\alpha_2 - d_2\cos\alpha_2\, d_1\sin\alpha_1).$$

Նախորդ պարագրաֆի (15) բանաձևերի համաձայն՝

$$d_1\cos\alpha_1 = x_1 - x_3, \qquad d_1\sin\alpha_1 = y_1 - y_3,$$
$$d_2\cos\alpha_2 = x_2 - x_3, \qquad d_2\sin\alpha_2 = y_2 - y_3.$$

Տեղադրելով այս արժեքները եռանկյան S մակերեսի վերահիշյալ արտահայտության մեջ, կստանանք՝

$$S = \frac{1}{2}\left|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\right|: \qquad (17)$$

Օգտվելով դետերմինանտի գաղափարից (գլ. VI, § 1), ստացված բանաձևը կարելի է հետևյալ տեսքով գրել՝

$$S = \pm \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}: \qquad (17')$$

Այստեղ պետք է վերցնել $+$ կամ $-$ նշանը, նայած թե դետերմինանտն ինքը դրակա՞ն է, թե բացասական:

Մասնավորապես, երբ գագաթներից մեկը, օրինակ՝ C-ն, գտնվի կոորդինատների սկզբնակետում, կունենանք $x_3 = y_3 = 0$ և հետևաբար՝

$$S = \pm \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) = \pm \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}: \qquad (17'')$$

Օրինակ: Հաշվել այն ABC եռանկյան մակերեսը, որի գագաթներն են՝ $A(1, 2)$, $B(-2, 3)$, $C(0, 5)$:

Այստեղ $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $x_2 = -2$, $y_2 = 3$, $x_3 = 0$, $y_3 = 5$: Հետևաբար, (17) բանաձևի համաձայն, ABC եռանկյան մակերեսի համար կստանանք՝

$$S = \frac{1}{2}\left|(1-0)(3-5) - (-2-0)(2-5)\right| = 4 \text{ քառ. միավոր:}$$

Եթե A, B, C երեք կետերը գտնվում են մեկ ուղիղի վրա՝ ապա ABC եռանկյունը հանված է դառնում և ունի զրո մակերես՝ $S = 0$: Այդպիսի դեպքում (17) բանաձևը վերածվում է հետևյալ հավասարությանը՝

$$0 = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\right],$$

կամ՝

$$(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) = (x_2 - x_3)(y_1 - y_3), \qquad (18)$$

որը կարելի է գրել նաև համեմատության ձևով՝

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{y_1 - y_3}: \qquad (18')$$

Այս հավասարությունը միմյանց հետ կապում է A, B, C երեք կետերի կոորդինատները այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ կետերը գտնվում են մեկ ուղիղի վրա: Հետևաբար, դրած համեմատությունն արտահայտում է երեք կետերի մեկ ուղիղի վրա գտնվելու պայմանը։

Օրինակ 1. Իմանալ, թե A(1, 2), B(2, 3), C(3, 4) *կետերը գտնը-վու՞մ են արդյոք մեկ ուղիղի վրա։*

Այստեղ $x_1=1$, $y_1=2$, $x_2=2$, $y_2=3$, $x_3=3$, $y_3=4$։ *(18′) պայմանը դառնում է՝*

$$\frac{1-3}{2-3}=\frac{2-4}{3-4}, \text{ այսինքն՝ } 2=2$$

և, հետևաբար, բավարարվում է։ Ուրեմն տված երեք կետերը գտնվում են մեկ ուղիղի վրա։

Օրինակ 2. Ինչպիսի՞ պայմանի դեպքում $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ *կետերը և կոորդինատների սկզբնակետը կգտնվեն մեկ ուղիղի վրա։*

Այստեղ երրորդ կետի x_3, y_3 *կոորդինատները հավասար են զրոյի, և (18′) պայմանը դառնում է այսպիսին՝*

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2},$$

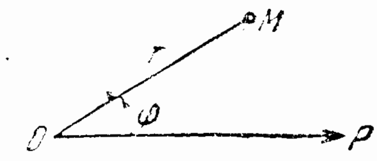
այսինքն՝ երկու կետեր կգտնվեն կոորդինատների սկզբնակետի հետ միասին մեկ ուղիղի վրա, եթե նրանց կոորդինատները համեմատական լինեն։

Դիտողություն։ (18) հավասարությունից (18′)-ին անցնել կարելի է միայն այն դեպքում, երբ x_2-x_3 *և* y_2-y_3 *թվերից ոչ մեկը հավասար չէ զրոյի։ Սակայն, քանի որ հիշելու համար (18′) հավասարությունն ավելի հարմար է, ուստի պայմանավորվենք այդ գրել նաև այն դեպքում, երբ հայտարարները զրո են դառնում։ Այսպիսի դեպքերում, իհարկե, գրության այդ ձևը պետք է տառացիորեն չհասկանալ, այլ պայմանականորեն։ Պետք է ընդունենք, որ (18′) հավասարությունը միշտ ա՛յն է նշանակում, ինչ որ (18)-ը, այսինքն՝ որ արտաքին անդամների* $(x_1-x_3)(y_2-y_3)$ *արտադրյալը հավասար է ներքին անդամների* $(x_2-x_3)(y_1-y_3)$ *արտադրյալին։ Օրինակ,* $\frac{x_1}{0}=\frac{y_1}{1}$ *նշանակում է, որ* $x_1 \cdot 1=y_1 \cdot 0$, *այսինքն՝* $x_1=0$։

§ **11. Բևեռային կոորդինատներ։** *Հարթության վրա կետի դիրքը որոշելու համար, բացի կոորդինատների՝ վերևում դիտարկված դեկարտյան ուղղանկյուն սիստեմից, բավական հաճախ է օգտագործվում նաև կոորդինատների բևեռային սիստեմը։*

Դիցուք հարթության վրա տրված են մի O *կետ (որ կանվանենք* բևեռ*) և այդ կետով անցնող մի* OP *առանցք (որ կանվանենք* բևեռային առանցք*), ինչպես և՝ ընտրված է մասշտաբի միավոր (գծ. 24)։ Հարթության ցանկացած* M *կետի դիրքը որոշենք բևեռի և բևեռային առանցքի նկատմամբ։* M *կետի* $r=OM$

հեռավորությունը բևեռից անվանենք նրա բևեռային շառավիղ, իսկ բևեռային առանցքով և $\overline{OM}$ ուղղությամբ օժտված հատվածով կազմված φ-անկյունը՝ բևեռային անկյուն. պայմանավորվենք φ անկյունը վերցնել $-\pi<\varphi\leqslant\pi$ սահմաններում: Այդ դեպքում, ակներևաբար, հարթության յուրաքանչյուր M կետին կհամապատասխանի r և φ թվերի միայն մեկ զույգ (բացառություն է կազմում բևեռը, որի համար $r=0$, իսկ φ-ն ցանկացած արժեք ունի):



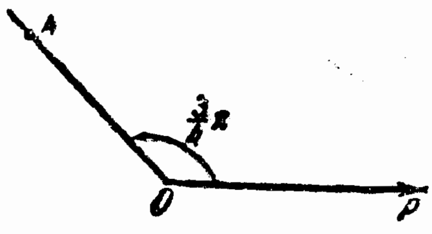
Գծ. 24

Հակադարձաբար, r և φ թվերի յուրաքանչյուր զույգին ($r\geqslant0, -\pi<\varphi\leqslant\pi$) համապատասխանում է հարթության միայն մեկ կետ, որի համար r-ը բևեռային շառավիղ է, իսկ φ-ն՝ բևեռային անկյուն: Կետի բևեռային շառավիղն ու բևեռային անկյունը կոչվում են այդ կետի բևեռային կոորդինատներ: Պայմանավորվում ենք կետի բևեռային կոորդինատները գրել կետը նշանակող տառից հետո՝ փակագծերում, ցույց տալով նախ r-ը, ապա φ-ն՝ $M(r, \varphi)$:

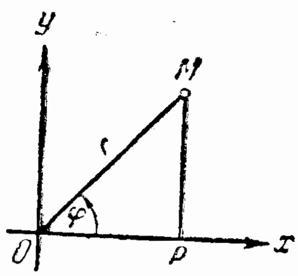
Օրինակ: Բևեռային սիստեմում կառուցել $A\left(2, \frac{3}{4}\pi\right)$ կետը:

O բևեռից տանենք մի առանցք, որը բևեռային առանցքի հետ կազմի $\frac{3}{4}\pi$ անկյուն (այլ խոսքով՝ բևեռային առանցքը պտտենք $\frac{3}{4}\pi$ անկյունով) և այդ առանցքի վրա դրական ուղղությամբ O բևեռից սկսած վերցնենք OA հատվածը, որի երկարությունը հավասար է 2 միավորի: Այդ հատվածի A ծայրը կլինի որոնելի կետը (գծ. 25):

Կարելի է կապ հաստատել միևնույն կետի դեկարտյան և բևեռային կոորդինատների միջև: Դիցուք տված են կոորդինատների դեկարտյան սիստեմ և բևեռային սիստեմ այնպես, որ բևեռը



Գծ. 25



Գծ. 26

գտնվում է դեկարտյան սիստեմի սկզբնակետում, իսկ բևեռային առանցքը համընկնում է աբսցիսների առանցքի հետ (գծ. 26):

Հարթության M կամայական կետի դեկարտյան կոորդինատները նշանակենք x, y, բևեռային կոորդինատները՝ r, φ։ Մենք գիտենք (գլ. I, § 9 (14′) բանաձևեր), որ՝

$$x=պր_x\overline{OM},$$

$$y=պր_y\overline{OM},$$

իսկ մյուս կողմից (նույն տեղը, (12) բանաձևեր)՝

$$պր_x\overline{OM}=r\cos\varphi,$$

$$պր_y\overline{OM}=r\sin\varphi։$$

Հետևաբար՝

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\varphi,\\ y&=r\sin\varphi։\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Այս բանաձևերն M կետի դեկարտյան կոորդինատներն արտահայտում են նույն կետի բևեռային կոորդինատների միջոցով։ Բևեռային կոորդինատները դեկարտյան կոորդինատներով արտահայտելու համար (19) հավասարումներից յուրաքանչյուրի երկու մասերը քառակուսի բարձրացնենք և ապա անդամ առ անդամ գումարենք։ Կստանանք՝

$$x^2+y^2=r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi),$$

այսինքն՝

$$r^2=x^2+y^2,$$

որտեղից՝

$$r^2=\sqrt{x^2+y^2}\ ։ \tag{20}$$

Այնուհետև նույն (19) հավասարություններից ստանում ենք՝

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}։ \tag{21}$$

Այս բանաձևով որոշվում է φ բևեռային անկյունը, ընդ որում φ-ի համար ստացվում է երկու արժեք (հիշենք, որ $-\pi<\varphi\leq\pi$), որոնք գտնվում են տարբեր քառորդներում։ Քանի որ $y=r\sin\varphi$, ուստի φ անկյան այդ երկու արժեքներից պետք է ընտրել այն, որի համար սինուսը կունենա նույն նշանը, ինչ որ ունի y-ը։

Օրինակ։ Տված են M կետի դեկարտյան կոորդինատները՝ $x=1$, $y=-1$։ Գտնել այդ կետի բևեռային կոորդինատները։

Ըստ (20) և (21) բանաձևերի ունենք՝

$$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},\qquad \operatorname{tg}\varphi=-1։$$

$\varphi=\frac{3}{4}\pi$ և $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ երկու արժեքներից պետք է վերցնել $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ արժեքը, քանի որ sin φ-ն տվյալ դեպքում պետք է ունենա բացասական նշան: Այդպիսով, բևեռային կոորդինատները կլինեն՝

$$r=\sqrt{2}, \qquad \varphi=-\frac{\pi}{4}:$$

Դիտողություն: Մեր մուծած բևեռային կոորդինատների համար $r\geqslant 0, -\pi<\varphi\leqslant\pi$: Սակայն այդպիսի սահմանափակումը երբեմն ձեռնտու չէ, ուստի հետագայում մենք կենթադրենք, որ r-ը և φ-ն կարող են ցանկացած արժեքներ ստանալ $-\infty$-ից մինչև $+\infty$: Այդ դեպքում r և φ բևեռային կոորդինատների օգնությամբ կետի կառուցումը պայմանավորվում ենք կատարել հետևյալ ձևով:

O բևեռով տանում ենք մի առանցք, որը բևեռային առանցքի հետ կազմի φ անկյուն (այլ խոսքով, բևեռային առանցքը պտտում ենք φ անկյունով, հարկ եղած դեպքում մի քանի լրիվ պտույտներ կատարելով): Այնուհետև, կառուցած առանցքի վրա, բևեռից սկսած, վերցնում ենք $|r|$ երկարությամբ OM հատված՝ առանցքի դրական ուղղությամբ, եթե $r>0$, և բացասական ուղղությամբ, եթե $r<0$: Այդ հատվածի M ծայրը կլինի որոնելի կետը: Ակներև է, որ այսպիսի կառուցման դեպքում M կետի բևեռային շառավիղը հավասար է այն $\overline{OM}$ հատվածի մեծությանը, որը գտնվում է բևեռային առանցքի հետ φ անկյուն կազմող առանցքի վրա: Էական է, որ ցանկացած r և φ իրական թվերի զույգին համապատասխանում է միայն մեկ M կետ: Հենց այդ պատճառով էլ այդ թվերը ծառայում են որպես կետի կոորդինատներ:

Նկատենք, որ (19) բանաձևերն իրավացի են մնում ոչ միայն $r\geqslant 0, -\pi<\varphi\leqslant\pi$ դեպքում, այլև ընդհանուր դեպքում: Այդ ապացուցելու համար կարելի է օգտվել § 9-ի (13) բանաձևերից, որոնք $\overline{OM}$ հատվածի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա արտահայտում են նրա r *մեծության* և Ox առանցքով ու այն առանցքով կազմված φ անկյունով, որի վրա գտնվում է $\overline{OM}$ ուղղությամբ օժտված հատվածը: Այդ ժամանակ $r^2=x^2+y^2$ բանաձևից r-ը գտնելիս արմատը կարելի է վերցնել ցանկացած նշանով՝

$$r=\pm\sqrt{x^2+y^2}, \tag{20'}$$

որից հետո φ անկյունը կարելի է գտնել (21) բանաձևով, ընդ որում այնպես, որպեսզի $\sin\varphi$-ն ունենա նույն նշանը, ինչ որ $\frac{y}{r}$ կոտորակը (քանի որ $y=r\sin\varphi$):

Վարժություններ[1]

1. Կառուցել այն կետերը, որոնք տվյալ մասշտաբի դեպքում որոշվում են հետևյալ կոորդինատներով՝

$$x=2,\quad y=5, \qquad\qquad x=3,\quad y=-3,$$

$$x=0,\quad y=4, \qquad\qquad x=3,\quad y=-4,$$

$$x=-3,\quad y=0, \qquad\qquad x=\sqrt{2},\quad y=-1.$$

2. Տրված է մի կետ, որը որոշվում է $x=5$, $y=-2$ կոորդինատներով։ Գտնել այն կետի կոորդինատները, որը տվածին սիմետրիկ է աբսցիսների առանցքի նկատմամբ։

3. Գտնել այն B կետը, որը սիմետրիկ է $A(2, -4)$ կետին I և III կոորդինատային անկյունների կիսորդի նկատմամբ։

4. Գտնել այն կետի կոորդինատները, որը սիմետրիկ է $A(a, b)$ կետին՝ աբսցիսների առանցքի նկատմամբ։

5. Գտնել այն կետի կոորդինատները, որը սիմետրիկ է $A(a, b)$ կետին՝ օրդինատների առանցքի նկատմամբ։

6. Գտնել այն կետի կոորդինատները, որը սիմետրիկ է $A(a, b)$ կետին՝ կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ։

7. Ցույց տալ, որ այն A_2 կետը, որը I և III կոորդինատային անկյունների կիսորդի նկատմամբ սիմետրիկ է $A_1(a, b)$ կետին, ունի (b, a) կոորդինատները։

8. Տված է մի քառակուսի, որի կողմը հավասար է 2 միավորի։ Ինչի՞ հավասար կլինեն այդ քառակուսու գագաթների կոորդինատները, եթե որպես կոորդինատային առանցքներ ընտրենք նրա՝ իրար ո՛չ զուգահեռ որևէ երկու կողմերը։

9. Տված է մի քառակուսի, որի կողմը հավասար է 2 միավորի։ Ինչի՞ հավասար կլինեն նրա գագաթների կոորդինատները, եթե որպես կոորդինատային առանցքներ ընտրենք այդ քառակուսու անկյունագծերը։

10. Տված է մի շեղանկյուն (ռոմբ), որի կողմը հավասար է 5 միավորի, իսկ անկյունագծերից մեկը՝ 6 միավորի։ Ինչի՞ հավասար կլինեն նրա գագաթների կոորդինատները, եթե որպես կոորդինատային առանցքներ ընդունենք այդ շեղանկյան անկյունագծերը։

11. Գտնել a միավոր կողմ ունեցող կանոնավոր վեցանկյան գագաթների կոորդինատները, եթե կոորդինատների սկզբնակետը գտնվում է վեցանկյան կենտրոնում և աբսցիսների առանցքն անցնում է երկու հակադիր գագաթներով։

12. Կետը, շարժվելով ուղիղ գծով, $A(-3, -2)$ կետից տեղափոխվել է $B(4, 5)$ կետը։ Գտնել անցած ճանապարհի երկարությունը և այն α անկյունը, որ շարժման ուղղությունը կազմում է Ox առանցքի հետ։

13. $A(1, 1)$, $B(-1, 2)$ և $C(3, 3)$ գագաթներ ունեցող եռանկյան ներքին անկյունների թվում կա՞ արդյոք բութ անկյուն։

---

1 Վարժությունների պատասխանները բերված են գրքի վերջում. աստղիկով նշված խնդիրների համար տրված են նաև լուծումները։

14. *Ապացուցել, որ* A(3, 2), B(6, 5), C(1, 10) *գագաթներ ունեցող եռանկյունը ուղղանկյուն է։*

15. *Գտնել* A(2, 3), B(—3, 3), C(0, —1) *գագաթներ ունեցող եռանկյան պարագիծը։*

16. *Գտնել* A(2, 1), B(—2, 3), C(0, 3) *գագաթներ ունեցող եռանկյան միջնագծերի երկարությունները։*

17. *Տրված է մի հատված* (1, —1) *կետից մինչև* (—4, 5) *կետը։ Նույն ուղղությամբ մինչև ո՞ր կետը պետք է շարունակել այդ հատվածը, որպեսզի նրա երկարությունը եռապատկվի։*

18. *Աբսցիսների առանցքի վրա գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացած կոորդինատների սկզբնակետից և* (—5, 3) *կետից։*

19. *Գտնել այն կետը, որը հավասարապես է հեռացած կոորդինատային առանցքներից և* (3, 6) *կետից։*

20. *Գտնել այն կետը, որը գտնվում է 10 միավոր հեռավորության վրա աբսցիսների առանցքից և* (—5, 2) *կետից։*

21. *Ուղիղ գիծն անցնում է* A(2, 4) *և* B(5, 1) *կետերով։ Նրա վրա գտնել այն կետը, որի աբսցիսը հավասար է* —3*-ի։*

22. (x, 5) *և* (—2, y) *կետերի հեռավորությունը* (1, 1) *կետում կիսվում է։ Գտնել այդ կետերը։*

23. (0, 2) *և* (8, 0) *կետերը միացնող հատվածը բաժանել նույն հարաբերությամբ, ինչ հարաբերություն որ կա այդ կետերի՝ սկզբնակետից ունեցած հեռավորությունների միջև։*

24. *Տված են եռանկյան երկու գագաթների կոորդինատները՝* $x_1=3$, $y_1=7$ *և* $x_2=-2$, $y_2=5$*։ Երրորդ գագաթը գտնել այնպես, որպեսզի նրանով անցնող կողմերի միջնակետերը գտնվեն կոորդինատային առանցքների վրա։*

25. *Եռանկյան հիմքը հավասար է* a*-ի, բարձրությունը* h*-ի, իսկ մյուս երկու կողմերից մեկը՝* b*-ի։ Հիմքն ու բարձրությունն ընդունելով որպես կոորդինատային առանցքներ, գտնել երրորդ կողմի միջնակետի կոորդինատները։*

26.* *Գտնել այն եռանկյան միջնագծերի հատման կետը, որի գագաթներն են՝* A(1, 2), B(0, 5), C(—2, 3)*։*

27. *Եռանկյան գագաթներն են՝* (5, 0), (3, —8), (1, —4)*։ Գտնել այն կետերը, որտեղ եռանկյան միջնագծերը բաժանվում են երեք հավասար մասերի։*

28. *Եռանկյան ծանրության կենտրոնի կոորդինատներն արտահայտել նրա գագաթների կոորդինատների միջոցով։*

29. *Ցույց տալ, որ եթե սիստեմը բաղկացած է* n *նյութական կետերից՝* $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$, *որտեղ կենտրոնացած են համապատասխանաբար* m_1, m_2, ... m_n *զանգվածներ, ապա այդ սիստեմի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները կորոշվեն հետևյալ բանաձևերով՝*

$$x=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}, \qquad y=\frac{y_1m_1+y_2m_2+\ldots+y_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}.$$

30. *Գտնել այն եռանկյան մակերեսը, որի գագաթներն են՝* A(0, 1), B(3, 4), C(—1, —1)*։*

31. *Հաշվել այն քառանկյան մակերեսը, որի գագաթներն են՝* A(—2,—3), B(—1, 4), C(3, 3) *և* D(6,—1)*։*

32. *Իմանալ, գտնվո՞ւմ են արդյոք մեկ ուղիղի վրա* (2, 3), (5, 7), (11, 15) *կետերը։*

33. *Որոշել* P *ուժի մեծությունը և ուղղությունը, գիտենալով, որ կոորդինատային առանցքների վրա նրա պրոյեկցիաները հավասար են՝* $P_x=5$, $P_y=12$։

34. *Գտնել լարից պատրաստած եռանկյան ծանրության կենտրոնը, եթե եռանկյան գագաթներն են՝* O(0, 0), A(4, 0), B(3, 4)։

35. *Համասեռ տախտակն ունի ուղղանկյուն սեղանի ձև, որի մեծ հիմքը հավասար է* a*-ի, փոքր հիմքը՝* b*-ի, իսկ բարձրությունը* h*-ի։ Գտնել նրա ծանրության կենտրոնի կոորդինատները (հաստությունը հաշվի չառնել)։*

36. *Գտնել այն կետերի դեկարտյան կոորդինատները, որոնց բևեռային կոորդինատներն են՝*

$$A\left(\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right),\qquad B\left(4,\ \frac{\pi}{3}\right),$$

$$C\left(4\sqrt{2},\ \frac{3\pi}{4}\right),\qquad D\left(2,\ -\frac{\pi}{6}\right),\qquad E\left(-3,\ \frac{2\pi}{3}\right)։$$

37. *Գտնել այն կետերի բևեռային կոորդինատները, որոնց դեկարտյան կոորդինատներն են՝*

A(3, —2), B(—1, —1), C(3, 0), D(0, —4)։

ԳԼՈՒԽ II

ԳԾԵՐ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

§ 1. Տրված գծերի հավասարումները կազմելը։ *Նախորդ գլխում ցույց տրվեց, որ հարթության յուրաքանչյուր կետին համապատասխանում է թվերի մի կարգավորված զույգ և, հակադարձաբար, թվերի յուրաքանչյուր կարգավորված զույգին համապատասխանում է հարթության մի որոշակի կետ։*

Այժմ ցույց տանք, որ հարթության վրա գծերին համապատասխանում են հավասարումներ երկու փոփոխականներով։ Գծերի և հավասարումների միջև հաստատվող այդ կապը հնարավորություն կտա գծերի երկրաչափական հատկությունների ուսումնասիրությունը հանգեցնել նրանց համապատասխանող հավասարումների անալիտիկ հատկությունների հետազոտությանը։

Անալիտիկ երկրաչափության մեջ ամեն մի գիծ դիտարկում են որպես կետերի երկրաչափական տեղ։ Գծի, որպես կետերի երկրաչափական տեղի, սահմանման մեջ պարունակվում է այն հատկությունը, որն ընդհանուր է նրա բոլոր կետերի համար։ Այսպես, օրինակ, C կենտրոն և R շառավիղ ունեցող շրջանագիծը կարելի է դիտել որպես հարթության այնպիսի կետերի երկրաչափական տեղ, որոնք C կետից R հեռավորության վրա են գտնվում։ Այդ նշանակում է, որ շրջանագծի վրա գտնվող յուրաքանչյուր M կետի համար $MC=R$, իսկ եթե M կետը շրջանագծի վրա չի գտնվում, ապա նրա համար $MC \neq R$։

Հարթության վրա վերցնենք մի որևէ գիծ, այդ հարթության մեջ ընտրենք կոորդինատների դեկարտյան սիստեմ և դիտարկենք մեր վերցրած գծի ցանկացած կետը։ Եթե այդ կետը շարժվի տրված գծի վրայով, ապա նրա x և y կոորդինատները կփոփոխվեն, մնալով, սակայն, միմյանց հետ կապված մի որոշ պայմանով, որը բնութագրում է տված գծի կետերը։ Այդպիսով, մենք x-ի և y-ի միջև կստանանք մի որոշ առնչություն, որը տեղի կունենա միայն ա՛յն դեպքում, երբ կետը շարժվի տված գծի վրայով, և կխախտվի՛, եթե կետը գծից դուրս գա։

Հետևաբար, հարթության վրա գծին համապատասխանում է մի որոշ հավասարում x և y երկու փոփոխականներով։

x և y փոփոխականների միջև այնպիսի հավասարումը, որին բավարարում են տրված գծի վրա գտնվող յուրաքանչյուր կետի կոորդինատներ և չեն բավարարում այդ գծի վրա չգտնվող և ո՛չ մի կետի կոորդինատներ, կոչվում է այդ գծի հավասարում:

Գծի կամայական կետի x և y կոորդինատները, որ մտնում են այդ հավասարման մեջ, կոչվում են ընթացիկ կոորդինատներ։

Դիտարկենք մի քանի պարզագույն օրինակներ տրված գծերի հավասարումները կազմելու վերաբերյալ։

Օ ր ի ն ա կ 1. Գտնել A(1, 2) և B(—3, 4) կետերը միացնող հատվածի միջնուղղահայացի հավասարումը։

Այդ ուղիղը մենք դիտարկենք որպես A և B կետերից հավասարապես հեռացած կետերի երկրաչափական տեղ։ Դիցուք M(x, y)-ը կամայական կետ է այդ ուղիղի վրա։ Այդպիսի բոլոր կետերի ընդհանուր հատկությունը կարտահայտի հետևյալ հավասարումը՝

$$AM=BM \tag{1}$$

(իսկ եթե M-ը չգտնվի նշված ուղիղի վրա, ապա $AM \neq BM$)։ Ուղիղի հավասարումը կազմելու համար մնում է AM և BM հեռավորությունները արտահայտել M կետի կոորդինատներով և ստացված արտահայտությունները տեղադրել (1) հավասարության մեջ։ Այդ ժամանակ՝

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}\text{։}$$

Այս էլ հենց տված ուղիղի հավասարումն է։ Նրա երկու մասերը քառակուսի բարձրացնելուց և պարզեցումներից հետո կստանանք՝

$$2x-y+5=0\text{։}$$

Օ ր ի ն ա կ 2. Կազմել R շառավիղ ունեցող շրջանագծի հավասարումը։

Կոորդինատային առանցքները ընտրենք կամայապես։ Այդ դեպքում շրջանագծի C կենտրոնը կունենա որոշ a և b կոորդինատներ։ Շրջանագծի M կամայական կետի կոորդինատները նշանակելով x և y, այդ բոլոր M կետերի համար ընդհանուր հատկությունն արտահայտենք անալիտիկորեն։ Շրջանագծի սահմանումից հետևում է, որ M կետի հեռավորությունը C կենտրոնից (գծ. 27) հաստատուն մեծություն է և հավասար է R-ի, այսինքն՝

$$CM=R\text{։} \tag{2}$$

CM-ը որոշելով որպես C և M կետերի հեռավորություն (գլ. 1, § 5), մենք (2) հավասարությունը կարտահայտենք M կետի ընթացիկ կոորդինատների միջոցով, այն է՝

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R\text{։} \tag{2'}$$

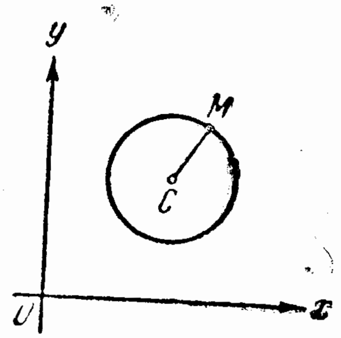
Այս հավասարության երկու մասերը քառակուսի բարձրացնելով և արմատից ազատելով, շրջանագծի հավասարումը կստանանք հետևյալ վերջնական տեսքով՝

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\text{։} \tag{3}$$

Այս հավասարման մեջ a և b հաստատունները շրջանագծի կենտրոնի կոորդինատներն են, R-ը՝ շառավիղն է, իսկ x և y փոփոխականները շրջանագծի կամայական կետի կոորդինատներն են։

Մասնավորապես, երբ որպես կոորդինատների սկզբնակետ ընտրված է շրջանագծի կենտրոնը, կունենանք $a=b=0$, և (3) հավասարումն ավելի պարզ տեսք կընդունի՝

$$x^2+y^2=R^2\text{։}$$



Գծ. 27

§ 2. Հավասարումների երկրաչափական իմաստը։ Մենք տեսանք, որ յուրաքանչյուր գիծ, որ դիտարկվում է որպես կետերի երկրաչափական տեղ, որոշվում է մի հավասարումով նրա կետերի կոորդինատների միջև։ Հակադարձաբար, յուրաքանչյուր հավասարում x և y երկու փոփոխականների միջև, ընդհանրապես ասած, որոշում է մի գիծ՝ որպես այնպիսի կետերի երկրաչափական տեղ, որոնց x և y կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը։

Իրոք, դիտարկենք մի որևէ հավասարում x և y փոփոխականների միջև։ Նրա բոլոր անդամները տեղափոխելով ձախ մասը, հավասարումը կգրենք այսպիսի տեսքով՝

$$F(x, y)=0, \tag{4}$$

որտեղ F-ը երկու փոփոխականների ֆունկցիայի նշանն է։ Դիցուք, օրինակ, x-ի յուրաքանչյուր տված թվային արժեքի դեպքում, (4) հավասարումը, որպես y անհայտի նկատմամբ գրված հավասարում, ունի երկու իրական արմատ։ x փոփոխականին տանք $x=a$ կամայական թվային արժեքը և (4) հավասարումից գտնենք y-ի համապատասխան արժեքները։ y-ը որոշելու համար ստանում ենք մեկ անհայտով հավասարում՝

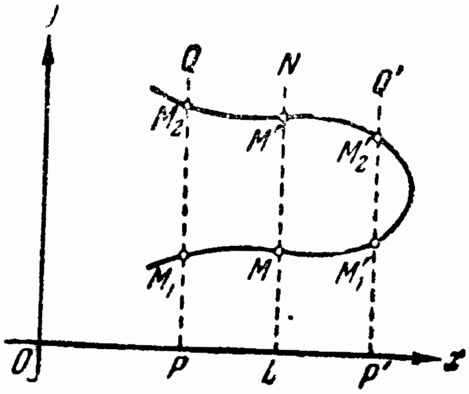
$$F(a, y)=0\text{։} \tag{5}$$

Դիցուք այս հավասարումն ունի $y=b_1$ և $y=b_2$ արմատները։ 28-րդ գծագրում նշենք M_1 և M_2 կետերը, որոնց (a, b_1) և (a, b_2) կոորդինատները բավարարում են տված (4) հավասարմանը։

Այժմ x փոփոխականին տանք մի այլ՝ $x=a'$ թվային արժեք և y-ի համապատասխան արժեքները որոշենք

$$F(a', y)=0 \tag{5'}$$

հավասարումից։ Թող այս հավասարման արմատները լինեն՝ $y=b'_1$ և $y=b'_2$։ Գծագրում նշենք M'' և M'_2 կետերը, որոնց (a', b'_1) և (a', b'_2) կոորդինատները բավարարում են տված հավասարմանը։ Եթե x փոփոխականը անընդհատ փոփոխենք a արժեքից մինչև a_1 արժեքը, ապա LN ուղիղն ինքն իրեն զուգահեռ կտեղափոխվի, ելնելով PQ դիրքից և հասնելով $P'Q'$ դիրքը, ընդ որում յուրաքանչյուր դիրքում նրա վրա կըգտնվեն երկու կետեր, որոնց կոորդինատները կբավարարեն տված (4) հավասարմանը։ Այսպիսով, M և M' կետերը կգծեն մի գիծ։ Այդ գիծն ստացվում է որպես երկու շարժումների արդյունք. մի կողմից՝ LN ուղիղի ինքն իրեն զուգահեռ շարժվելու (x-ի փոփոխության) մյուս կողմից՝ M և M' կետերի՝ այդ ուղիղի վրա շարժվելու (y-ի փոփոխության) արդյունք։

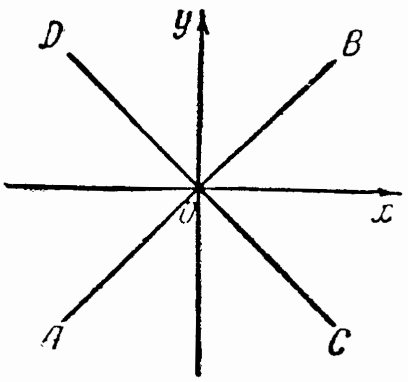


Գծ. 28

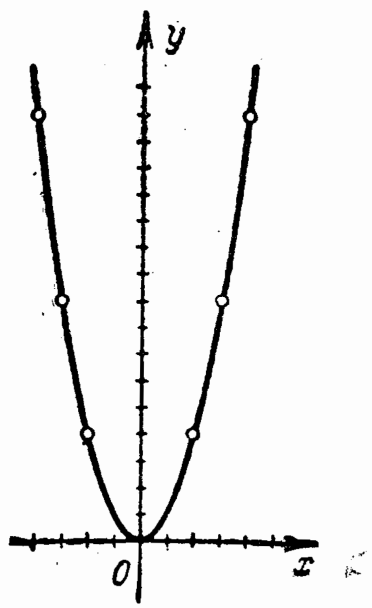
Ուրեմն, x և y կոորդինատների միջև գրված (4) հավասարումը որոշում է մի գիծ՝ որպես այնպիսի կետերի երկրաչափական տեղ, որոնց կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը։

Դիտարկենք մի քանի օրինակներ իրենց հավասարումներով տրված գծերի կառուցման վերաբերյալ։

Օրինակ 1. Կառուցել այն գիծը, որը որոշվում է $x-y=0$ հավասարումով։



Գծ. 29



x	y
—4	16
—3	9
—2	4
—1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Գծ. 30

Հավասարումը կարելի է արտագրել այսպես՝

$$y=x։$$

Ակներևորեն, այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց համար աբսցիսը հավասար է օրդինատին, իրենից ներկայացնում է I և III կոորդինատային անկյունների AB կիսորդը (գծ. 29)։ Հետևաբար, $x-y=0$ հավասարումը որոշում է հենց այդ կիսորդը։

Օրինակ 2. Կառուցել այն գիծը, որը որոշվում է $x+y=0$ հավասարումով։

Հեշտ է տեսնել, որ այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց համար $y=-x$, կլինի II և IV կոորդինատային անկյունների CD կիսորդը։ Հետևաբար, $x+y=0$ հավասարումը՝ այդ կիսորդի հավասարումն է (գծ. 29)։

Օրինակ 3. Կառուցել այն գիծը, որը որոշվում է $x^2-y=0$ հավասարումով։

Այս հավասարման կոորդինատներից մեկն արտահայտենք մյուսով, օրինակ՝ y-ն արտահայտենք x-ով՝ $y=x^2$։ x-ին տանք զանազան կամայական արժեքներ, օրինակ՝ -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 և գտնենք y-ի համապատասխան արժեքները։ Այսպիսով, մենք կստանանք մի շարք կետեր։ Այդ կետերը նշենք հարթության վրա և անընդհատ գծով միացնենք (գծ. 30)։ Կստանանք որոնելի կորը։

Դիտարկենք նաև հավասարումների մի քանի հատուկ տեսակներ։

1) Հավասարումը կարող է պարունակել կոորդինատներից միայն մեկը և, այնուամենայնիվ, որոշել մի որոշակի գիծ։

Դիցուք տված է $y-2=0$ կամ $y=2$ հավասարումը։ Այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց օրդինատները հավասար են 2-ի, ակներևորեն կլինի այն ուղիղը, որը զուգահեռ է OX առանցքին և վերջինից ունի 2 միավոր հեռավորություն։

Դրա նման, $x+1=0$ հավասարումը որոշում է մի ուղիղ, որը զուգահեռ է OY առանցքին և նրանից ունի -1 միավոր հեռավորություն։

2) Եթե $F(x, y)=0$ հավասարման ձախ մասը արտադրիչների է վերլուծվում, ապա յուրաքանչյուր արտադրիչն առանձին հավասարեցնելով զրոյի, կստանանք մի քանի նոր հավասարումներ, որոնցից ամեն մեկը կարող է որոշել մի գիծ։ Օրինակ, $x^2-y^2=0$ կամ $(x+y)(x-y)=0$ հավասարումը վերածվում է երկու հավասարումների՝ $x+y=0$ և $x-y=0$, որոնցից ամեն մեկը, ինչպես վերևում տեսանք, մի ուղիղ գիծ է. դրանք կոորդինատային անկյունների կիսորդներն են։

3) Մասնավոր դեպքում կարող է պատահել, որ x և y կոորդինատների միջև տված $F(x, y)=0$ հավասարումը որոշի այնպիսի երկրաչափական տեղ, որը բաղկացած է մեկ կամ մի քանի

առանձին կետերից։ Այսպես, օրինակ, $x^2+y^2=0$ *հավասարումով որոշվում է միայն* $O(0, 0)$ *կետը, իսկ*

$$(x^2-1)^2+(y^2-4)^2=0$$

հավասարումով՝

$$(1, 2),\ (1, -2),\ (-1, 2),\ (-1, -2)$$

չորս կետերից բաղկացած երկրաչափական տեղը։

4) Կարող է, վերջապես, պատահել, որ $F(x, y)=0$ *հավասարումը կետերի ոչ մի երկրաչափական տեղ չորոշի, այսինքն՝ ոչ մի կետի կոորդինատներ չբավարարեն այդ հավասարմանը։ Այսպես, օրինակ՝*

$$x^2+y^2+1=0$$

հավասարումը չի բավարարվում x *և* y *կոորդինատների ոչ մի զույգ իրական արժեքներով։*

Եթե հավասարումը բավարարվում է, ինչպես վերջին օրինակում, միայն այն դեպքում, երբ x *և* y *փոփոխականներից թեկուզ մեկը կեղծ արժեք ունի, ապա ասում են, որ այդպիսի հավասարմանը համապատասխանում է* կետերի կեղծ տեղ։

§ **3. Երկու հիմնական խնդիր**։ *1 և 2 §-ներում շարադրվածից ծագում են հետևյալ երկու հիմնական խնդիրները։*

I. Տրված է մի գիծ, որպես կետերի երկրաչափական տեղ։ Կազմել այդ գծի հավասարումը։

II. Տրված է հավասարումը x և y կոորդինատների միջև։ Կառուցել այդ հավասարումով որոշվող գիծը։

Հաջորդ գլխում մենք դիտարկելու ենք թե՛ մեկ և թե՛ մյուս խնդրի ընդհանուր լուծումը ուղիղ գծի համար։

§ **4. Երկու գծերի հատումը**։ *Երկրաչափական շատ խնդիրների թվում ամենակարևորներից մեկը՝ տված երկու գծերի հատման կետերը գտնելու խնդիրն է։ Դիցուք այդ գծերը որոշվում են հետևյալ հավասարումներով՝*

$$f(x, y)=0 \text{ և } \varphi(x, y)=0։$$

Եթե գոյություն ունի դրանց հատման կետ, ապա նա, ակներևորեն, գտնվում է թե՛ մեկ և թե՛ մյուս գծի վրա։ Հետևաբար, այդպիսի կետի կոորդինատները պետք է բավարարեն այդ հավասարումներից յուրաքանչյուրին։ Հակադարձաբար, ամեն մի կետ, որի կոորդինատները բավարարում են այդ երկու հավասարումներին միաժամանակ, գտնվում է երկու կորի վրա էլ։ Այստեղից հետևում է, որ տված երկու գծերի հատման կետերը գտնելու համար, պետք *է այդ գծերի հավասարումները միասին լուծել։ Հավասարումների այդ սիստեմի յուրաքանչյուր իրական լուծումը կտա հատման մի կետ։ Իսկ եթե պարզվի, որ հավասարումների այդ սիստեմը համատեղ սիստեմ չէ, կամ նրա բոլոր լուծումների մեջ* x *և* y *թվերից թեկուզ մեկը կեղծ է, ապա այդ կնշանակի, որ տված գծերը չեն հատվում։*

Օրինակ։ Այս գլխի § 1-ում մենք արտածեցինք այն շրջանագծի հավասարումը, որի շառավիղը հավասար է R*-ի և կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, այն է՝*

$$x^2+y^2=R^2։$$

Եթե վերցնենք $R=5$, *ապա այդ շրջանագծի հավասարումը կլինի՝*

$$x^2+y^2=25։$$

Նույն պարագրաֆի 1-ին օրինակում արտածեցինք մի ուղիղի հավասարում՝

$$2x-y+5=0։$$

Գտնենք այս երկու գծերի հատման կետերը։

Դրա համար պետք է լուծել հետևյալ հավասարումների սիստեմը՝

$$x^2+y^2=25,$$

$$2x-y+5=0։$$

Վերջին հավասարումից ունենք՝

$$y=2x+5։$$

Տեղադրելով y*-ի այս արտահայտությունը առաջին հավասարման մեջ, կստանանք՝*

$$x^2+(2x+5)^2=25։$$

Պարզեցումից հետո կունենանք՝

$$x^2+4x=0,$$

որտեղից՝

$$x_1=0 \text{ և } x_2=-4։$$

x*-ի այս արժեքները տեղադրելով* y*-ի համար գտած արտահայտության մեջ, կստանանք՝*

$$y_1=5 \text{ և } y_2=-3։$$

Հետևաբար, տված գծերն ունեն հատման երկու կետ՝ $(0,5)$ *և* $(-4,-3)$

§ 5. Գծերի պարամետրական հավասարումները։ *Որոշ դեպքերում, գծի հավասարումը կազմելիս, ոչ թե ընթացիկ կոորդինատներն են միմյանց հետ կապում մեկ հավասարմամբ, այլ յուրաքանչյուր կոորդինատ առանձին արտահայտում են որպես նոր փոփոխականի, օրինակ՝* t*-ի ֆունկցիա, ստանալով այսպիսի հավասարումներ՝*

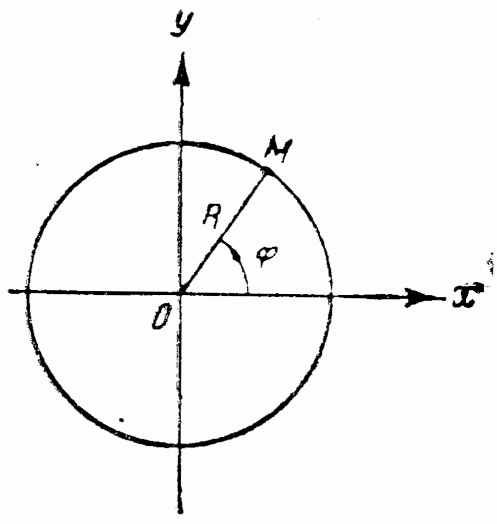
$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t)։ \qquad (6)$$

Այս հավասարումները կազմում են այնպես, որ t-ի միևնույն արժեքին համապատասխանող x և y արժեքները հանդիսանան տված գծի վրա գտնվող կետի կոորդինատներ: t-ն փոփոխելիս, փոփոխվում են նաև x, y կոորդինատները, հետևաբար՝ նրանց համապատասխանող կետը շարժվում է տված գծի վրա: (6) հավասարումները կոչվում են գծի պարամետրական հավասարումներ, իսկ t-ն՝ փոփոխական պարամետր:

Եթե (6) հավասարումներից t պարամետրն արտաքսենք, կստանանք հավասարում x և y կոորդինատների միջև՝ $F(x, y)=0$ տեսքով:

Օրինակ: Կազմենք R շառավիղ ունեցող այն շրջանագծի պարամետրական հավասարումները, որի կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում (գծ. 31): Հեշտ է տեսնել, որ շրջանագծի կետի ընթացիկ կոորդինատներն այն φ անկյան ֆունկցիաներ են, որն այդ կետից տարված շառավիղը կազմում է Ox առանցքի հետ: Հետևաբար, կարող ենք այդ φ անկյունն ընդունել որպես փոփոխական պարամետր և x, y ընթացիկ կոորդինատներն արտահայտել նրա միջոցով: Շրջանագծի վրա M կետի ամեն մի դիրքում տեղի կունենան հետևյալ հավասարությունները (գլ. I, § 9)՝

$$x=R\cos\varphi,$$
$$y=R\sin\varphi:$$



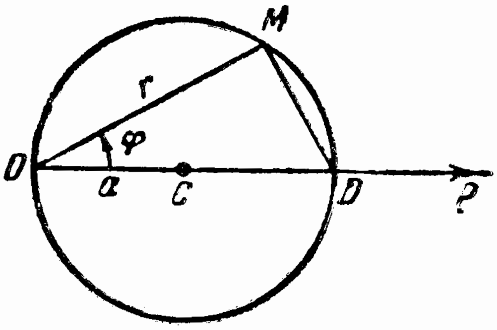
Գծ. 31

Հենց սրանք էլ կլինեն շրջանագծի պարամետրական հավասարումները: Եթե ցանկանանք, սրանցից կարելի է ստանալ շրջանագծի հավասարումը նախորդից մեզ հայտնի տեսքով: Դրա համար պետք է φ-ն արտաքսել: Հավասարումների երկու մասերը քառակուսի բարձրացնելով և գումարելով, կստանանք մեզ արդեն ծանոթ հավասարումը՝

$$x^2+y^2=R^2:$$

§ 6. Գծերի հավասարումները բևեռային կոորդինատներով: Մենք դիտարկել ենք գծերի հավասարումները դեկարտյան կոորդինատներով, սակայն կարելի է խոսել նաև գծերի՝ բևեռային կոորդինատներով հավասարումների մասին: Կոորդինատների բևեռային սիստեմում գծի հավասարում մենք անվանելու ենք այնպիսի հավասարումը r և φ փոփոխականների միջև, որին բավարարում են տված գծին պատկանող ամեն մի կետի կոորդինատներ և որին չեն բավարարում այդ գծին չպատկանող և ոչ մի կետի կոորդինատներ: Դիտարկենք տված գծի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով գտնելու մի օրինակ:

Դիցուք պահանջվում է գտնել այն շրջանագծի հավասարումը, որն անցնում է բևեռով, ունի a շառավիղ և որի C կենտրոնը գտնըվում է բևեռային առանցքի վրա։ Շրջանագծի M կամայական կետն ուղիղ հատվածներով միացնենք O բևեռի և բևեռով անցնող տրամագծի D ծայրակետի հետ (գծ. 32)։ M կետի կոորդինատները կլինեն՝ φ անկյունը և OM հատվածի r երկարությունը։ Հիշենք, որ շրջանագիծը իր տրամագծի վրա հենվող ուղիղ անկյունների գագաթների երկրաչափական տեղն է։ Հետևաբար, OMD եռանկյունն ուղղանկյուն եռանկյուն է, ուստի և կստանանք՝



Գծ. 32

$$r = 2a\cos\varphi։$$

Հենց սա էլ շրջանագծի մեր որոնած հավասարումն է[1]։

Նկատենք, որ տված գծի հավասարման տեսքը կախված է բևեռի և բևեռային առանցքի ընտրությունից։ Այսպես, եթե բևեռն ընտրենք a շառավիղ ունեցող շրջանագծի կենտրոնում, ապա շրջանագծի բոլոր կետերի (և միայն այդ կետերի) համար բևեռային շառավիղը կունենա միևնույն a արժեքը՝ $r=a$. այս հավասարումն էլ հենց կլինի այն շրջանագծի հավասարումը, որն ունի a շառավիղ և որի կենտրոնը գտնվում է բևեռում։ Բևեռային φ անկյունը չի մտնում այս հավասարման մեջ, մնալով կամայական։

Գծի ձևը իր հավասարման օգնությամբ հետազոտելիս հաճախ է կարիք լինելու օգտվել բևեռային կոորդինատներից։ Այդպես է հարկավոր ամեն անգամ, երբ գծի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով ավելի պարզ է, քան դեկարտյան կոորդինատներով։ Որպես օրինակ դիտարկենք երկու գիծ, որոնք կիրառություններում հաճախ են հանդիպում։

Օրինակ 1. Արքիմեդի սպիրալ (գալարագիծ) կոչվող գիծը բևեռային կոորդինատներով որոշվում է հետևյալ հավասարումով՝

$$r = a\varphi,$$

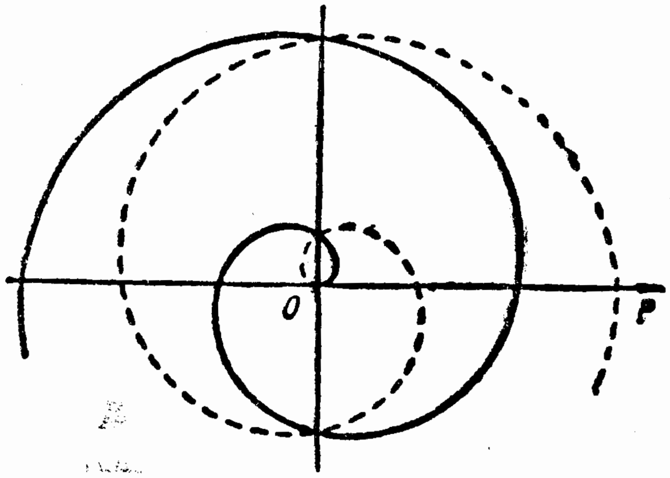
որտեղ a-ն դրական հաստատուն է։ Այդ գիծը գծելու համար, φ-ին տանք

---

1 Այս հավասարումն արտածելիս r-ը դրական ենք համարել։ Սակայն, φ-ի որոշ արժեքների դեպքում հավասարումից r-ի համար կստացվեն նաև բացասական արժեքներ։ Այնուամենայնիվ, հեշտությամբ կարելի է ստուգել, որ այդ դեպքում ևս ստացվող կետերը գտնվում են նույն շրջանագծի վրա։

կամայական արժեքներ և գտնենք r-ի համապատասխան արժեքները։ Տված հավասարմանը բավարարող (r, φ) արժեքների ստորև բերված աղյուսակը ցույց է տալիս, որ երբ φ անկյունն աճում է $\frac{\pi}{2}$ տարբերություն ունեցող թվաբանական պրոգրեսիայով, r բևեռային շառավիղը նույնպես աճում է թվաբանական պրոգրեսիայով, որի տարբերությունը հավասար է $a\frac{\pi}{2}$-ի։ Բացի դրանից, նկատենք, որ այդ գծի դրական կոորդինատներ ունեցող յուրաքանչյուր (r, φ) կետին նույն գծի վրա համապատասխանում է (—r, —φ) կետ, այսինքն՝ Արքիմեդի սպիրալը սիմետրիկ դասավորություն ունի բևեռով անցնող և բևեռային առանցքին ուղղահայաց ուղիղի նկատմամբ։ Գծ. 33-ում

γ	r
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}a$
π	πa
$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi a$
2π	$2\pi a$



Գծ. 33

անընդհատ գծով պատկերված է φ-ի դրական արժեքներին համապատասխանող ճյուղը, իսկ կետագծով՝ բացասական արժեքներին համապատասխանող ճյուղը։

Օրինակ 2. Բևեռային կոորդինատներով՝

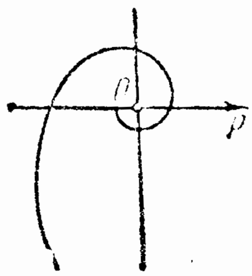
$$r=ae^{k\varphi}$$

հավասարումով որոշվող գիծը, որտեղ a-ն և k-ն դրական հաստատուններ են, կոչվում է լոգարիթմական սպիրալ։

Այդ գիծը գծելու համար φ-ին կամայական արժեքներ տանք և հաշվենք r-ի համապատասխան արժեքները։ Տված հավասարմանը բավարարող (r, φ) արժեքների ստորև բերված աղյուսակը ցույց է տալիս, որ երբ φ անկյունն աճում է $\frac{\pi}{2}$ տարբերություն ունեցող թվաբանական պրոգրեսիայով, r բևեռային շառավիղն այս անգամ աճում է երկրաչափական պրոգրեսիայով, որի հայտարարը հավասար է $e^{k\cdot\frac{\pi}{2}}$-ի։ Երբ φ անկյունն անվերջորեն աճում է, r-ը նույնպես անվերջորեն աճում է։ Երբ φ անկյունը ձգտում է բացասական անվերջության, բևեռային շառավիղը ձգտում է զրոյի և կորն անսահմանորեն մոտենում է O բևեռին, փաթաթվելով նրա շուրջը։ Այդ պատճառով O կետը կոչվում է լոգարիթմական սպիրալի ասիմպտոտական կետ (գծ. 34)։

Երբեմն կարիք է լինում գծի դեկարտյան կոորդինատներով տրված հավասարումից ստանալ նույն գծի հավասարումը բևեռա-

յին կոորդինատներով կամ ընդհակառակը: Այդպիսի դեպքերում պետք է օգտագործել դեկարտյան և բևեռային կոորդինատների կապն արտահայտող բանաձևերը (գլ. I, § 11):



φ	r
$-\pi$	$ae^{-k\pi}$
$-\frac{\pi}{2}$	$ae^{-k\pi/2}$
0	a
$\frac{\pi}{2}$	$ae^{k\pi/2}$
π	$ae^{k\pi}$

Գծ. 34

Օ ր ի ն ա կ: Շրջանագծի

$$r=2a\cos\varphi$$

բևեռային կոորդինատներով հավասարումը գրել դեկարտյան կոորդինատներով:

r*-ը և* $\cos\varphi$*-ն արտահայտենք* x*-ով ու* y*-ով՝*

$$r=\pm\sqrt{x^2+y^2},\quad \cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}:$$

Այս արտահայտությունները տեղադրելով տված հավասարման մեջ, որոշ պարզեցումներից հետո կստանանք՝

$$x^2+y^2-2ax=0:$$

Վարժություններ

1*. *Կառուցել* $x^2y=4a^2(2a-y)$ *հավասարումով տրված կորը: (Այս կորը կոչվում է* Անյեզիի գանգուր*):*

2*. *Կառուցել* $r=10\sin 2\varphi$ *հավասարումով տրված կորը: (Այս կորը կոչվում է* քառաթերթ վարդ*):*

3. *Կառուցել հետևյալ հավասարումներով տրված կորերը՝*

ա) $y=x^3$, *բ)* $y=x^5$, *գ)* $y=x^4$,

դ) $y=x^3+2$, *ե)* $y=\frac{1}{2}x^4-5$, *զ)* $y^2=x^3$:

4. *Կառուցել այն կորերը, որոնք բևեռային կոորդինատներով տրված են հետևյալ հավասարումներով՝*

ա) $r=a\sin 3\varphi$, *բ)* $r=a\cos 3\varphi$,

գ) $r=a\cos 2\varphi$, *դ)* $r=a(1-\cos\varphi)$:

5 Կառուցել այն կորերը, որոնք բևեռային կոորդինատներով տրված են հետևյալ հավասարումներով՝

ա) $r=2-\cos\varphi$, բ) $r=3-2\sin 2\varphi$, գ) $r=2-\sin 3\varphi$։

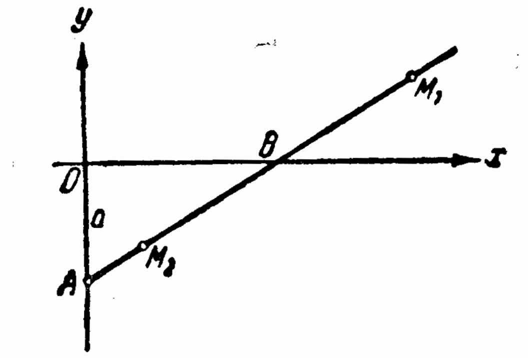
6. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարապես են հեռացած կոորդինատների սկզբնակետից և $A(-5, 3)$ կետից։

7. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարապես են հեռացած Ox առանցքից և $F(0, 4)$ կետից։ Կառուցել այդ կորը։

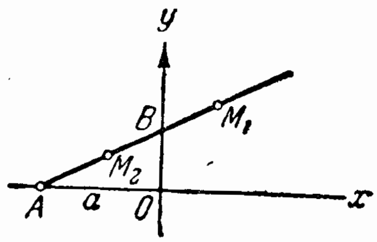
8. Որոշել այն M կետի հետագիծը, որն այնպես է շարժվում, որ նրա հեռավորությունն $A(3, 0)$ կետից երկու անգամ փոքր է մնում $B(-6, 0)$ կետից ունեցած հեռավորությունից։

9. Որոշել այն M կետի հետագիծը, որն այնպես է շարժվում, որ նրա հեռավորությունն $F(-1, 0)$ կետից երկու անգամ փոքր է մնում $x=-4$ ուղիղից ունեցած հեռավորությունից։

10*. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որի՝ տված P և Q երկու կետերից ունեցած հեռավորությունների արտադրյալը հաստատուն մեծություն է և հավասար է m^2-ու։ P և Q կետերի միջև հեռավորությունը հավասար է $2n$-ի։ (Կետերի այս երկրաչափական տեղը կոչվում է Կասսինիի օվալ)։ Կառուցել այդ գիծը։



Գծ. 35



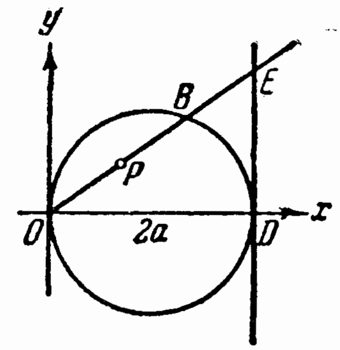
Գծ. 36

11*. Կասսինիի օվալը (տե՛ս նախորդ վարժությունը) $m=n$ դեպքում կոչվում է Բեռնուլիի լեմնիսկատ։ Գտնել լեմնիսկատի հավասարումը՝ ա) դեկարտյան կոորդինատներով, բ) բևեռային կոորդինատներով։ Կառուցել այդ կորը։

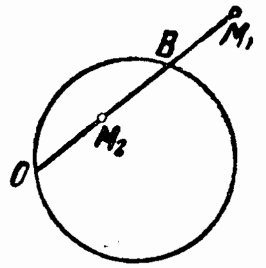
12. Տրված է Ox ուղիղը և նրանից a հեռավորության վրա գտնվող A կետը (գծ. 35)։ Եթե AB ուղիղը պտտվի A կետի շուրջը, ապա այդ ուղիղի վրա գտնվող այն M_1 և M_2 կետերը, որոնք AB ուղիղի և Ox հիմնական ուղիղի հատման B կետից ունեն տրված b հեռավորությունը, կգծեն մի որոշ գիծ։ Այդ գիծը կոչվում է Նիկոմեդի կոնխոիդ (կոնքակերպ)։ Գտնել կոնխոիդի հավասարումը և կառուցել այն՝ $a>b$, $a=b$ և $a<b$ դեպքերում։

13*. Տրված է Oy ուղիղը և նրանից a հեռավորության վրա գտնվող A կետը (գծ. 36)։ A կետի շուրջը պտտվում է AB ճառագայթը, որի վրա, ճառագայթի և Oy առանցքի հատման B կետի տարբեր կողմերում, վերցրած են M_1 և M_2 կետերն այնպես, որ BM_1 և BM_2 փոփոխական հատվածների երկարությունները միշտ հավասար լինեն OB-ին։ M_1 և M_2 կետերի գծած կորը կոչվում է ստրոֆոիդ։ Կազմել այդ կորի հավասարումը և կառուցել կորը։

14*. Տրված են $OD=2a$ տրամագիծ ունեցող շրջանագիծը և նրա DE շոշափողը (գծ. 37)։ D կետին տրամագծորեն հակադիր O կետից տարված է OE ճառագայթը և նրա վրա վերցրած է OP հատվածը՝ շրջանագծի և շոշափողի միջև գտնվող BE հատվածին հավասար։ Երբ OE ճառագայթը պտտվի O կետի շուրջը, P կետը կգծի մի կոր, որը կոչվում է Դիոկլեսի ցիսոիդ։ Գտնել այդ կորի հավասարումը և կառուցել կորը։



Գծ. 37



Գծ. 38

15*. Տրված է a շառավիղ ունեցող մի շրջանագիծ և նրա վրա O կետը (գծ. 38)։ Երբ OB ուղիղը պտտվի O կետի շուրջը, այդ ուղիղի վրա գտնվող և ուղիղի ու շրջանագծի հատման B կետից տրված m հեռավորությունը պահպանող M_1 և M_2 կետերը կգծեն մի կոր, որը կոչվում է Պասկալի խխունջ[1]։ Գտնել այդ կորի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով և կառուցել կորը՝ $m>2a$, $m=2a$ և $m<2a$ դեպքերում։

16. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարապես են հեռացած տված երկու կետերից։

17. Երկու ուղիղներ պտտվում են երկու անշարժ կետերի շուրջը, միշտ մնալով միմյանց ուղղահայաց։ Գտնել նրանց հատման կետի գծած կորի հավասարումը։

18. M կետից R և r շառավիղներ ունեցող երկու շրջանագծերին տարված են հավասար երկարություն ունեցող շոշափողներ։ Գտնել այդպիսի M կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, եթե շրջանագծերի կենտրոնների միջև հեռավորությունը հավասար է $2d$-ի։

19. $2a$ հաստատուն երկարություն ունեցող հատվածն իր ծայրերով սահում է ուղիղ անկյան կողմերի վրայով։ Ուղիղ անկյան գագաթից այդ հատվածին իջեցրած է OM ուղղահայացը։ Գտնել այդ ուղղահայացների հիմքերի երկրաչափական տեղի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով և կառուցել կորը։

20. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնց՝ տրված քառակուսու կողմերից ունեցած հեռավորությունների քառակուսիների գումարը հավասար է հաստատուն մեծության։

21. Ցիսոիդի $x^3=y^2(2a-x)$ հավասարումը գրել բևեռային կոորդինատներով։

---

1 Մասնավոր դեպքում, երբ $m=2a$, այդ գիծը կոչվում է կարդիոիդ (սրտակերպ)։

22. Հետևյալ կորերի հավասարումները գրել դեկարտյան կոորդինատներով՝

ա) $r=m+2a\cos\varphi$ (Պասկալի խխունջ),

բ) $r=a\sin 2\varphi$ (քառաթերթ վարդ)։

23*. a շառավիղ ունեցող շրջանը գլորվում է աբսցիսների առանցքի վրայով։ Շրջանագծի այն կետը, որը շրջանի սկզբնական դիրքի ժամանակ գտնվում էր կոորդինատների սկզբնակետում, շրջանը գլորվելիս գծում է մի կոր (ցիկլոիդ)։ Գտնել այդ կորի պարամետրական հավասարումները։

24. Մարմինը v արագությամբ նետված է դեպի վեր՝ հորիզոնի նկատմամբ α անկյան տակ։ Օդի դիմադրությունը հաշվի չառնելով, գտնել մարմնի հետագծի պարամետրական հավասարումները (որպես պարամետր ընդունել ժամանակը)։

ԳԼՈՒԽ III

ՈՒՂԻՂ ԳԻԾ

§ **1. Ուղիղի անկյունային գործակիցը։** *Նախորդ գլխում ցույց տրվեց, որ հարթության վրա ընտրելով կոորդինատների մի որոշ սիստեմ, մենք կարող ենք տրված գծի կետերը բնորոշող երկրաչափական հատկությունն անալիտիկորեն արտահայտել մի հավասարումով ընթացիկ կոորդինատների միջև։ Այդպիսով, մենք ստանում ենք գծի հավասարումը։ Ներկա գլխում մենք դիտարկելու ենք ուղիղ գծերի հավասարումները։*

Ուղիղի հավասարումը դեկարտյան կոորդինատներով կազմելու համար հարկավոր է որևէ կերպ տալ այն պայմանները, որոնք որոշում են ուղիղի դիրքը կոորդինատային սիստեմի նկատմամբ։

Նախապես մենք մուծենք ուղիղի անկյունային գործակցի գաղափարը՝ որը հարթության վրա ուղիղի դիրքը որոշող մեծություններից մեկն է։

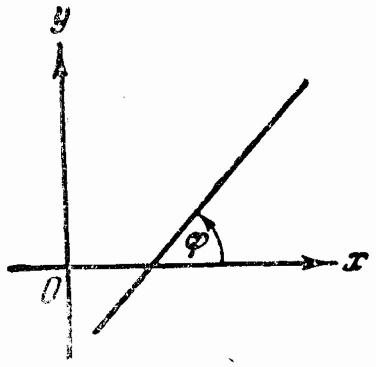
Ox առանցքի նկատմամբ ուղիղի թեքման անկյուն *անվանենք այն անկյունը, որով պետք է* Ox *առանցքը պտտել, որպեսզի նա համընկնի տված ուղիղի հետ (կամ նրան զուգահեռ դառնա)։ Ինչպես սովորաբար, անկյունը դիտարկելիս հաշվի ենք առնելու նրա նշանը (նշանը որոշվում է պտտման ուղղությամբ, նայած թե ժամացույցի սլաքի հակառա՞կ ուղղությամբ է պտտվում, թե՞ սլաքի ուղղությամբ)։ Քանի որ* Ox *առանցքի լրացուցիչ պտույտը 180°-ով նորից կհամատեղի նրան տված ուղիղի հետ, ուստի ուղիղի թեքման անկյունը* Ox *առանցքի նկատմամբ կարող է միարժեքորեն չընտրվել (կընտրվի* π*-ին բազմապատիկ գումարելիի ճշգրտությամբ)։*

Ուղղի՝ Ox առանցքի նկատմամբ թեքման անկյան տանգենսը **կոչվում է** ուղիղի անկյունային գործակից։

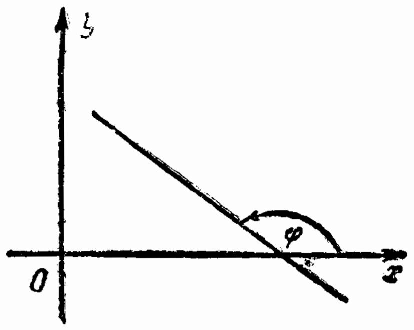
Քանի որ անկյունը π*-ով փոփոխելիս նրա տանգենսը չի փո-*

փոխվում, հետևաբար, ուղիղի անկյունային գործակիցը որոշվում է միարժեքորեն:

Անկյունային գործակիցը բնորոշում է ուղիղի ուղղությունը (մենք այստեղ իրարից չենք տարբերում ուղիղի երկու միմյանց հակադիր ուղղությունները): Եթե ուղիղի անկյունային գործակիցը հավասար է զրոյի, ապա ուղիղը զուգահեռ է աբսցիսների առանցքին: Մենք պայմանավորվենք միշտ դիտարկել ուղիղի թեքման անկյան փոքրագույն դրական արժեքը: Այդ դեպքում, եթե անկյունային գործակիցը դրական է, ապա թեքման անկյունը սուր կլինի (գծ. 39), ընդ որում անկյունային գործակիցը մեծանալիս մեծանում է նաև թեքման անկյունը: Իսկ եթե անկյունային գոր-



Գծ. 39



Գծ. 40

ծակիցը բացասական է, ապա թեքման անկյունը բութ կլինի (գծ. 40): Նկատենք, որ Ox առանցքին ուղղահայաց ուղիղը անկյունային գործակից չունի, քանի որ ուղիղ անկյան տանգենս գոյություն չունի:

§ 2. Ուղիղ գծի հավասարումն անկյունային գործակցով: Դիտարկենք այնպիսի ուղիղ, որը զուգահեռ չէ օրդինատների առանցքին: Նրա դիրքը հարթության վրա լրիվին որոշ կլինի, եթե տրված լինեն ուղիղի թեքման անկյունն աբսցիսների առանցքի նկատմամբ և օրդինատների առանցքի վրա ուղիղի կտրած հատվածի մեծությունը, այսինքն՝ օրդինատների առանցքի վրա ուղղությամբ օժտված այն հատվածի մեծությունը, որի սկիզբը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, իսկ ծայրը՝ ուղիղի և Oy առանցքի հատման կետում:

Ուղիղի թեքման անկյունն Ox առանցքի նկատմամբ նշանակենք φ, իսկ Oy առանցքից ուղիղի կտրած $\overline{OB}$ հատվածի մեծությունը՝ b: Դիցուք $M(x, y)$-ը կամայական կետ է ուղիղի վրա, (գծ. 41): Երբ M կետը շարժվում է տված ուղիղի վրա, նրա x և y կոորդինատները, փոփոխվելով հանդերձ, միշտ միմյանց հետ կապված են մնում մի որոշ պայմանով։ Տեսնենք, թե ո՞րն է այդ պայմանը։

Դիտարկենք $\overline{BM}$ ուղղությամբ օժտված հատվածը։ Գիտենալով նրա սկզբի և ծայրի կոորդինատները՝

$$B(0,\ b),\quad M(x,\ y),$$

կարող ենք գտնել նրա պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա (գլ. 1, § 9)՝

$$\text{պր}_x\overline{BM}=x,\quad \text{պր}_y\,\overline{BM}=y-b։$$

Այդ դեպքում, I գլ. § 9-ի (16) բանաձևի համաձայն՝

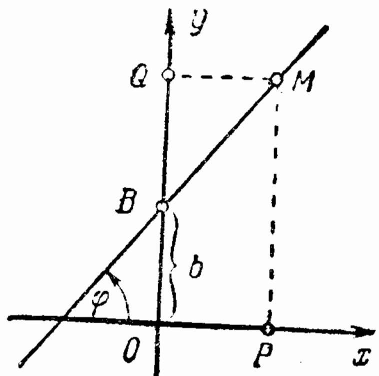
$$tg\varphi=\frac{y-b}{x},$$

որտեղից՝

$$y-b=x\,tg\varphi,\ \text{կամ}\ y=x\,tg\varphi+b։$$

Նշանակելով $tg\varphi=k$, վերջնականապես կստանանք՝

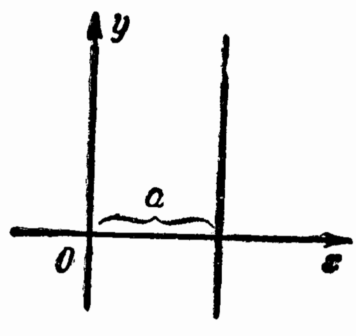
$$y=kx+b։ \qquad (1)$$



Գծ. 41

Այս հավասարմանը բավարարում են միայն դիտարկվող ուղղի կետերի կոորդինատները. այն կխախտվի, եթե կետը չգտնվի այդ ուղղի վրա։ Այսպիսով, ստացված (1) հավասարումը տված ուղղի հավասարումն է։

Ուղղի (1) տեսքի հավասարումը կոչվում է **ուղղի հավասարում անկյունային գործակցով**։

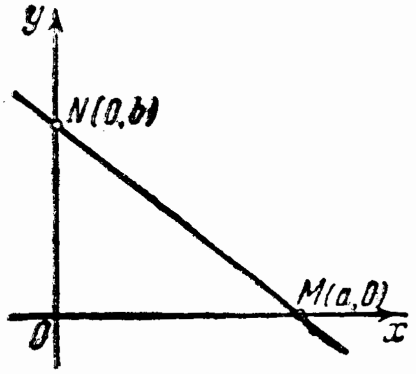


Գծ. 42

(1) հավասարումն ստանալիս մենք ենթադրեցինք, որ ուղիղը զուգահեռ չէ Oy առանցքին։ Այժմ տեսնենք, թե ինչպիսի հավասարում կունենա Oy առանցքին զուգահեռ ուղիղը։ Դիցուք a-ն՝ այդ ուղղի և Ox առանցքի հատման կետի աբսցիսն է (գծ. 42)։ Ակներև է, որ այդ ուղղի ամեն մի կետի աբսցիս հավասար է a-ի, իսկ եթե կետը չի գտնվում այդ ուղղի վրա, ապա նրա աբսցիսն a-ից տարբեր է։ Հետևաբար՝ այդ ուղիղն ունի հետևյալ հավասարումը՝

$$x=a։ \qquad (2)$$

Այսպես, ուրեմն, եթե տված ուղիղը զուգահեռ չէ Oy առանցքին, նրա հավասարումը կարելի է գրել (1) տեսքով, իսկ եթե ուղիղը զուգահեռ է Oy առանցքին, ապա նրա հավասարումը կարելի է գրել (2) տեսքով։ Քանի որ (1) և (2) հավասարումները x և y փոփոխականների նկատմամբ առաջին աստիճանի են, ապա մենք դրանով ապացուցեցինք, որ կոորդինատների դեկարտյան սիստեմում յուրաքանչյուր ուղիղ կարելի է ներկայացնել առաջին աստիճանի հավասարումով։



Գծ. 43

Մասնավորապես, եթե ուղիղն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով, ապա $b=0$ և այդպիսի ուղիղի հավասարումը հետևյալ տեսքը կունենա՝

$$y=kx: \qquad (3)$$

Եթե ուղիղը զուգահեռ է Ox առանցքին, նրա անկյունային գործակիցը՝ $k=0$ և այդպիսի ուղիղի հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$y=b: \qquad (4)$$

Օրինակ։ Կազմել այն ուղիղի հավասարումը, որն աբսցիսների առանցքի նկատմամբ թեքված է 45° անկյան տակ և օրդինատների առանցքից կտրում է —2 մեծություն ունեցող հատված։

Այստեղ՝ $k=\operatorname{tg} 45^\circ=1$ և $b=-2$։ Հետևաբար, ուղիղի հավասարումը կլինի՝

$$y=x-2:$$

§ 3. Երկու փոփոխականների միջև առաջին աստիճանի հավասարման երկրաչափական իմաստը։ Նախորդ պարագրաֆում ցույց տվինք, որ կոորդինատների դեկարտյան սիստեմում յուրաքանչյուր ուղիղ կարող է ներկայացվել առաջին աստիճանի հավասարումով։ Այժմ բնական կլինի հակադարձ հարցը դնել՝ արդյո՞ք ամեն մի առաջին աստիճանի հավասարում x և y փոփոխականների նկատմամբ ուղիղ գիծ է որոշում։ Այս հարցին պատասխանելու համար դիտարկենք առաջին աստիճանի հավասարումը ընդհանուր տեսքով և պարզենք, թե ինչպիսին է հարթության այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց (x, y) կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը։ Ցույց տանք, որ այդ կետերի երկրաչափական տեղն ուղիղ գիծ է։

x-ի և y-ի նկատմամբ առաջին աստիճանի ընդհանուր հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$Ax+By+C=0։ \qquad (5)$$

Այստեղ A-ն, B-ն, C-ն ցանկացած թվեր են, ընդ որում, փոփոխականների A և B գործակիցները, իհարկե, միաժամանակ զրո լինել չեն կարող (այլապես (5) հավասարումն այդ դեպքում x և y փոփոխականներ չէր պարունակի և հավասարում չէր լինի)։

Ենթադրելով, որ B≠0, (5) հավասարումը լուծենք y-ի նկատմամբ, կստանանք՝

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

կամ, նշանակելով՝ $-\frac{A}{B}=k$, $-\frac{C}{B}=b$, *կունենանք՝*

$$y=kx+b։ \qquad (1)$$

Բայց մենք նախորդ պարագրաֆում արդեն տեսանք, որ (1) հավասարումը պատկերում է մի ուղիղ գիծ, որն ունի k անկյունային գործակից և օրդինատների առանցքից կտրում է b մեծությամբ հատված։

Մենք ենթադրեցինք, որ B≠0, իսկ եթե B=0, ապա (5) հավասարումը կստանա հետևյալ տեսքը՝

$$Ax+C=0։$$

Քանի որ A≠0, ապա այս հավասարումը լուծելով x-ի նկատմամբ, կստանանք՝

$$x=-\frac{C}{A},$$

կամ, նշանակելով $-\frac{C}{A}=a$, *կգրենք՝*

$$x=a։ \qquad (2)$$

Սակայն մենք արդեն տեսել ենք (§ 1), որ (2)-ը Oy առանցքին զուգահեռ ուղիղի հավասարում է։

Այսպիսով, ներկա պարագրաֆի սկզբում դրված հարցը լուծվեց. մենք ցույց տվեցինք, որ ընթացիկ կոորդինատների նկատմամբ առաջին աստիճանի յուրաքանչյուր հավասարում որոշում է ուղիղ գիծ։ *Սրան համապատասխան, (5) հավասարումը կոչվում է* ուղիղի ընդհանուր հավասարում։

Այս գլխի § 1-ում և § 2-ում շարադրվածն ամփոփելով, կարող ենք ասել, որ ուղիղ գիծը և միայն ուղիղ գիծը կարող է կոորդինատների դեկարտյան սիստեմում ներկայացվել առաջին աստիճանի հավասարումով x և y ընթացիկ կոորդինատների նկատմամբ։

Դիտողություն։ Առաջին աստիճանի (5) ընդհանուր հավասարումը (1) տեսքին բերելու համար, պետք է այն լուծել y-ի նկատմամբ։ Այդ դեպքում x-ի մոտ ստացվող գործակիցը կլինի ուղիղի անկյունային գործակիցը, իսկ ազատ անդամը՝ օրդինատների առանցքից ուղիղի կտրած հատվածի մեծությունը։ Ուղիղի հավասարումն այդ տեսքով առանձնապես կարևոր է։ Վերը շարադրվածից հետևում է, որ x-ի գծային ֆունկցիայի (այսինքն՝ x-ի նկատմամբ առաջին աստիճանի բազմանդամի) գրաֆիկն ուղիղ գիծ է, ինչպես և, հակադարձաբար, եթե x-ի մի որևէ ֆունկցիայի գրաֆիկն ուղիղ գիծ է, ապա այդ ֆունկցիան կարելի է գրել x-ի նկատմամբ առաջին աստիճանի բազմանդամի տեսքով։ Այստեղից է ծագում գծային («ուղղագիծ») ֆունկցիա անունը։

Օրինակ։ Ուղիղ գիծը տրված է $2x+3y+7=0$ հավասարումով։ Գրել նրա հավասարումն անկյունային գործակցով։

Տված հավասարումն y-ի նկատմամբ լուծելով, կստանանք՝

$$y=-\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\text{։}$$

Այստեղից երևում է, որ ուղիղի անկյունային գործակիցը՝ $k=-\frac{2}{3}$, իսկ՝ օրդինատների առանցքից կտրած հատվածի մեծությունը՝ $b=-\frac{7}{3}$։

4. $Ax+By+C=0$ առաջին աստիճանի ընդհանուր հավասարման հետազոտումը։ Ինչպես մենք տեսանք, առաջին աստիճանի

$$Ax+By+C=0 \qquad (5)$$

ընդհանուր հավասարումը որոշում է ուղիղ գիծ։ Տեսնենք, թե այդ ուղիղը կոորդինատային առանցքների նկատմամբ ինչպիսի՞ դիրք է գրավում, երբ (5) հավասարման մեկ կամ երկու գործակիցը զրո են դառնում։

1. $C=0$։ Այս դեպքում (5) հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$Ax+By=0$$

և որոշում է կոորդինատների սկզբնակետով անցնող ուղիղ, քանի որ բավարարվում է $x=y=0$ արժեքներով։

2. $A=0$։ Այս դեպքում (5) հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$By+C=0,$$

կամ, նշանակելով՝ $-\frac{C}{B}=b$, հետևյալ տեսքը՝

$$y=b:$$

Այսպիսի ուղիղի բոլոր կետերի համար օրդինատը հաստատուն արժեք ունի, այսինքն՝ ուղիղը զուգահեռ է OX *առանցքին և գտնվում է նրանից* |b| *հեռավորության վրա.* OX *առանցքից վերև, եթե* b>0, *և ներքև, եթե* b<O:

3. B=0: *Այս դեպքում (5) հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝*

$$Ax+C=0:$$

կամ, նշանակելով $-\dfrac{C}{A}=a$, *հետևյալ տեսքը՝*

$$x=a$$

և որոշում է Oy *առանցքին զուգահեռ ուղիղ:*

4. C=0, B=0: *Այս դեպքում (5) հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝*

$$Ax=0,$$

կամ՝

$$x=0:$$

Ուղիղը համընկնում է Oy *առանցքի հետ:*

5. C=0, A=0: *Այս դեպքում (5) հավասարումը բերվում է*

$$y=0$$

տեսքի: Ուղիղը համընկնում է OX *առանցքի հետ:*

§ 5. Ուղիղ գծի հավասարումը հատվածներով: *Մենք արդեն ասել ենք, որ կոորդինատային առանցքների նկատմամբ ուղիղ գծի դիրքը կարելի է որոշել տարբեր եղանակներով: Ուղիղի դիրքը որոշող տվյալներից կախված մենք նրա հավասարումը կստանանք տարբեր ձևերով:*

Դիտարկենք մի ուղիղ, որը հատում է երկու կոորդինատային առանցքներն էլ և չի անցնում կոորդինատների սկզբնակետով: Ուղիղի դիրքը կարելի է որոշել, եթե տրվեն Ox *և* Oy *առանցքներից ուղիղի կտրած հատվածների* a *և* b *մեծությունները (գծ. 43-ում* a=*մեծ* $\overline{OM}$, b=*մեծ* $\overline{ON}$*): Գտնենք այդ ուղիղի հավասարումը:*

Այդպիսի ուղիղի հավասարումը կարելի է գրել ընդհանուր տեսքով՝

$$Ax+By+C=0, \qquad (5)$$

որտեղ A, B, C *գործակիցներից ոչ մեկը զրոյի հավասար չէ: Ըն-*

նում է գտնել այդ գործակիցները, այսինքն՝ դրանք արտահայտել տված a *և* b *թվերի միջոցով։*

Քանի որ $M(a,^\circ)$ *կետը գտնվում է տված ուղղի վրա, ուստի նրա կոորդինատները բավարարում են (5) հավասարմանը՝*

$$Aa+C=0,$$

որտեղից՝

$$A=-\frac{C}{a}\text{։} \tag{6}$$

Նման ձևով, $N(o,b)$ *կետի կոորդինատները ևս պիտի բավարարեն (5) հավասարմանը, որը կտա՝*

$$Bb+C=0,$$

որտեղից՝

$$B=-\frac{C}{b}\text{։} \tag{7}$$

A*-ի և* B*-ի արժեքները (6)-ից և (7)-ից տեղադրելով ուղղի (5) հավասարման մեջ, կստանանք՝*

$$-C\frac{x}{a}-C\frac{y}{b}+C=0\text{։}$$

Հավասարման երկու մասերը բաժանելով C*-ի վրա (պայմանի համաձայն* $C\neq0$*), կգտնենք՝*

$$-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+1=0,$$

կամ՝

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\text{։} \tag{8}$$

Ուղղի (8) տեսքի հավասարումը կոչվում է ուղղի հավասարում հատվածներով։

Օ ր ի ն ա կ։ Ուղղի $2x-3y+2=0$ *հավասարումը գրել հատվածներով։*

Քանի որ $(a,0)$ *կետը գտնվում է այդ ուղղի վրա, ապա նրա կոորդինատները բավարարում են ուղղի հավասարմանը։ Հետևաբար՝*

$$2a+2=0,\ \text{որտեղից՝}\ a=-1\text{։}$$

Նման ձևով, հավասարման մեջ տեղադրելով $(0,b)$ *կետի կոորդինատները, կգտնենք՝*

$$-3b+2=0,\ \text{որտեղից՝}\ b=\frac{2}{3}\text{։}$$

Ուրեմն, ուղղի հավասարումը հատվածներով կլինի՝

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{\frac{2}{3}}=1: \qquad (8')$$

Այս (8′) հավասարումը կարելի է ստանալ նաև տրված հավասարումը հանրահաշվական ձևափոխությունների ենթարկելով։ Իրոք, տված հավասարման ազատ անդամը տեղափոխելով աջ մասը, կստանանք՝

$$2x-3y=-2:$$

Հավասարության երկու մասերը բաժանենք —2-ի, կունենանք՝

$$-\frac{2x}{2}+\frac{3y}{2}=1:$$

Այժմ կարելի է այս հավասարումը գրել (8) տեսքով՝

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{\frac{2}{3}}=1:$$

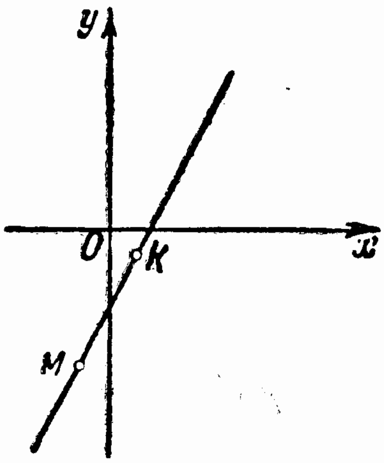
§ 6. Ուղիղի կառուցումը տրված հավասարումով։ *Ուղիղ գիծը կառուցելու համար բավական է գծագրի վրա նշել նրա որևէ երկու կետ։ Ուղիղի վրա գտնվող որևէ կետի կոորդինատները գտնելու համար, կոորդինատներից մեկին տալիս ենք կամայական արժեք և ուղիղի հավասարումից գտնում մյուս կոորդինատի համապատասխան արժեքը։*

Օ ր ի ն ա կ 1. Տված է ուղիղի հավասարումը՝

$$2x-y-3=0:$$

Կառուցել ուղիղը։

Հավասարման մեջ դնենք, օրինակ, $x=1$. այդ դեպքում՝ $2-y-3=0$, որտեղից՝ $y=-1$։ Հետևաբար, $K(1,-1)$ կետը գտնվում է ուղիղի վրա։ Այնուհետև, ընդունելով, օրինակ, $x=-1$, կգտնենք $M(-1,-5)$ կետը, որը նույնպես գտնվում է ուղիղի վրա։ Գտած երկու կետերով լրիվին որոշվում է ուղիղը (գծ. 44)։



Գծ. 44

Օ ր ի ն ա կ 2. Կառուցել $2x+3y=0$ ուղիղը։

Քանի որ հավասարման մեջ ազատ անդամը բացակայում է, ուրեմն նրանով որոշվող ուղիղն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով։ Մնում է գտնել մի երկրորդ կետ, սկզբնակետից տարբեր։ Դրա համար հավասարման մեջ դնենք, օրինակ, $x=1$. այդ դեպքում՝ $2+3y=0$, որտեղից՝ $y=-\frac{2}{3}$։ Հետևաբար, $\left(1,-\frac{2}{3}\right)$ կետը գտնվում է ուղիղի վրա։ Մնում է ուղիղ անցկացնել այդ կետով և կոորդինատների սկզբնակետով։

Դ ի տ ո ղ ու թ յ ու ն։ Գործնականում ուղիղը կառուցելիս հարմար է օգտագործել հատվածներով տված հավասարումը, կամ գտնել ուղիղի հատման կետերը կոորդինատային առանցքների հետ (որի համար հավասարման մեջ պետք է դնել $x=0$ և գտնել b-ն, ապա դնել $y=0$ և գտնել a-ն)։

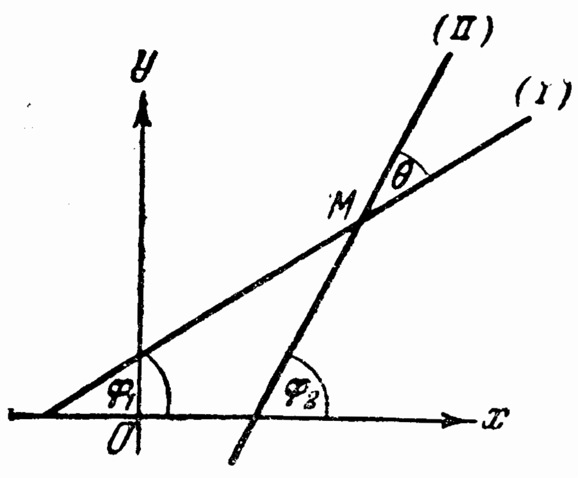
§ **7. Երկու ուղիղներով կազմված անկյունը։** Դիցուք տված են երկու ուղիղներ՝ (I) և (II)։ Այդ ուղիղները դիտարկելով նշված դասավորությամբ, նրանցով կազմված անկյուն ասելով հասկանում ենք այն անկյունը, որով պետք է պտտել (I) ուղիղը, որպեսզի այն համընկնի (II) ուղիղի հետ (կամ նրան զուգահեռ դառնա)։ Անկյան նշանը որոշվում է սովորական կանոնով։ Քանի որ լրացուցիչ կերպով π անկյունով պտտելու հետևանքով ուղիղը նորից կգրավի իր սկզբնական դիրքը, ապա պարզ է, որ (I) և (II) ուղիղներով կազմված անկյունը միարժեքորեն չի որոշվի (այլ π-ի բազմապատիկ գումարելիի ճշգրտությամբ)։ Անկյան արժեքներից մեկը միշտ կարելի է այնպես ընտրել, որպեսզի նա լինի ոչ բացասական և π-ից փոքր։ Գործնականում անկյան հենց այդ արժեքն էլ սովորաբար նկատի են ունենում։

Դիցուք (I) և (II) ուղիղների հավասարումները տված են անկյունային գործակիցներով՝

$$y=k_1x+b_1, \qquad (I)$$

$$y=k_2x+b_2։ \qquad (II)$$

(I) և (II) ուղիղների թեքման անկյուններն Ox առանցքի նկատմամբ նշանակենք համապատասխանորեն φ_1 և φ_2, իսկ (I) և (II) ուղիղներով կազմված անկյունը՝ θ։



Գծ. 45

Այդ դեպքում, ակներևորեն, կունենանք (գծ. 45)՝

$$\varphi_1+\theta=\varphi_2,$$

որտեղից՝

$$\theta=\varphi_2-\varphi_1։$$

Եթե (I) և (II) ուղիղներն ուղղահայաց չեն, ապա, եռանկյունաչափության հայտնի բանաձևի համաձայն՝

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_2\operatorname{tg}\varphi_1}։$$

Նկատելով, որ $\operatorname{tg}\varphi_1=k_1$ և $\operatorname{tg}\varphi_2=k_2$, կստանանք՝

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}; \qquad (9)$$

Դիտողություն 1. (9) բանաձևը որոշում է այն անկյան տանգեսը, որն առաջանում է K_1 անկյունային գործակից ունեցող ուղիղն M կետի շուրջը պտտելով՝ մինչև նրա համընկնելը K_2 անկյունային գործակից ունեցող ուղիղի հետ։ Այդ կարելի է հիշել, բանաձևը գրելով այսպես՝

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2};$$

Դիտողություն 2. Եթե խոսքը երկու ուղիղներով կազմված անկյան մասին է և չի նշվում ուղիղների դասավորությունը մեկը մյուսի նկատմամբ, ապա կամայապես կարելի է որոշել նրանց դասավորությունը։ Ակներևորեն, ուղիղների դասավորությունը փոխելիս կփոփոխվի անկյան տանգենսի նշանը։

Դիտողություն 3. Եթե ուղիղներից թեկուզ մեկը զուգահեռ է Oy առանցքին, ապա (9) բանաձևն իմաստ չունի։ Այդպիսի դեպքում, ընդունելով, օրինակ, որ Oy առանցքին զուգահեռ է երկրորդ ուղիղը, երկու ուղիղներով կազմված անկյունը կորոշենք հետևյալ բանաձևով՝

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi_1։$$

Օրինակ 1. Գտնել $y=2x-3$ և $3x+y-2=0$ ուղիղներով կազմված անկյունը։

Եթե ուղիղները համարակալենք նույն կարգով, ինչ կարգով նրանց հավասարումները գրված են, այդ դեպքում (I) ուղիղի համար անկյունային գործակիցը կլինի՝ $k_1=2$, իսկ (II) ուղիղի համար՝ $k_2=-3$։ Այժմ (9) բանաձևով կստանանք՝

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-3-2}{1-2\cdot 3} = 1, \text{ որտեղից՝ } \theta = 45^\circ։$$

Օրինակ 2. Գտնել հետևյալ ուղիղներով կազմված անկյունը՝

$$x-2y+3=0 \text{ և } x-3=0։$$

Այստեղ $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$։ Առաջին ուղիղի անկյունային գործակիցը հավասար է $\frac{1}{2}$-ի, իսկ նրա թեքման անկյունը (Ox առանցքի նկատմամբ) հավասար է $\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$։ Համաձայն 3-րդ դիտողության՝

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}։$$

§ 8. Երկու ուղիղների զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները: *Ուղիղները զուգահեռ են ա՛յն և միայն այն դեպքում, երբ* Ox *առանցքի նկատմամբ նրանց թեքման անկյունների տանգենսները հավասար են՝*

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2,$$

կամ՝

$$k_1 = k_2: \tag{10}$$

Այսպիսով, ուղիղների զուգահեռության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը նրանց անկյունային գործակիցների հավասարությունն է:

Երկու ուղիղների զուգահեռության պայմանը կարելի է նաև ուղղակի (9) բանաձևից ստանալ:

Ուղիղների ուղղահայացության դեպքում (և միայն այդ դեպքում) կարելի է համարել՝

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}:$$

Այստեղից հետևում է, որ՝

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2},$$

կամ՝

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\varphi_1,$$

որտեղից՝

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 = -1,$$

կամ, վերջնականապես՝

$$k_1 k_2 = -1: \tag{11}$$

Այսպիսով, երկու ուղիղների ուղղահայացության անհրաժեշտ և բավարար պայմանն այն է, որ նրանց անկյունային գործակիցների արտադրյալը հավասար լինի —1-ի:

Օրինակ 1. Հետևյալ ուղիղները՝

$$2x-3y+1=0 \text{ և } 4x-6y-5=0$$

զուգահեռ են: Իսկապես, այդ ուղիղների անկյունային գործակիցները կլինեն՝ $k_1=\frac{2}{3}$, $k_2=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, *ուրեմն՝* $k_1=k_2$, *այսինքն՝ տեղի ունի զուգահեռության պայմանը:*

Օրինակ 2. k *գործակցի ինչպիսի՞ արժեքի դեպքում* $y=kx+1$ *հավասարումը կորոշի այնպիսի ուղիղ, որն ուղղահայաց լինի* $y=2x-1$ *ուղիղին:*

Երկրորդ ուղիղի անկյունային գործակիցը՝ $k_2=2$*: Ուղղահայացության պայմանը տալիս է՝* $2k=-1$, *որտեղից՝* $k=-\frac{1}{2}$*:*

§ 9. Տվյալ կետով անցնող և տվյալ ուղղությունն ունեցող ուղիղի հավասարումը: *Դիցուք տրված են* $A(x_1, y_1)$ *կետը և* k *անկյունային գործակիցը, որը որոշում է* A *կետով անցնող* ուղիղի ուղղությունը։ Այդ ուղիղի հավասարումը մենք կորոնենք

$$y=kx+b \tag{12}$$

տեսքով, որտեղ b անհայտը պետք է որոշել այնպես, որպեսզի ուղիղն անցնի $A(x_1, y_1)$ կետով։ Քանի որ A կետը գտնվում է տված ուղիղի վրա, ապա նրա կոորդինատները պետք է բավարարեն (12) հավասարմանը։ Այդ հավասարման մեջ ընթացիկ կոորդինատների տեղ դնելով x_1, y_1, կստանանք՝

$$y_1=kx_1+b։ \tag{13}$$

Այս (13) պայմանից պետք է b-ն որոշել և գտած արժեքը տեղադրել (12) հավասարման մեջ։ Այլ խոսքով, պետք է b-ն արտաքսել (12) և (13) հավասարություններից, որ մենք կկատարենք, (12)-ից հանելով (13)-ը։ Այսպիսով, կստանանք՝

$$y-y_1=k(x-x_1), \tag{14}$$

որը և կլինի (x_1, y_1) կետով անցնող և k անկյունային գործակցով որոշվող ուղղությունն ունեցող ուղիղի հավասարումը։

Պարզ է, որ (14) տեսքով կարելի է գրել ամեն մի ուղիղի հավասարում, որը զուգահեռ չէ Oy առանցքին։ Տված $A(x_1, y_1)$ կետով անցնող և Oy առանցքին զուգահեռ ուղիղի հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը (գլ. III, § 2)՝

$$x=x_1։$$

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն։ Հարթության մի որոշ կետով անցնող բոլոր ուղիղների համախումբը կոչվում է **ուղիղների փունջ**, իսկ նրանց ընդհանուր կետը՝ **փնջի կենտրոն**։

Եթե (14) հավասարման մեջ k-ի տակ հասկանանք այնպիսի մեծություն, որն ընդունում է ամեն հնարավոր արժեքներ, ապա այդ հավասարումը կորոշի $A(x_1, y_1)$ կետով անցնող բոլոր ուղիղները, այսինքն՝ $A(x_1, y_1)$ կենտրոնն ունեցող ուղիղների փունջը [(14) ձևով կարելի է գրել փնջի յուրաքանչյուր ուղիղի հավասարում, բացի մեկից՝ Oy առանցքին զուգահեռ ուղիղի հավասարումից]։

Օ ր ի ն ա կ 1. Կազմել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $(-3, 4)$ կետով և Ox առանցքի նկատմամբ թեքված է $135°$ անկյան տակ։

Հավասարումը կարելի է գրել (14) տեսքով։ Այստեղ՝ $x_1=-3$, $y_1=4$, $k=\operatorname{tg} 135°=-1$։ Հետևաբար, որոնելի հավասարումը կլինի՝

$$y-4=-1(x+3),$$

կամ՝

$$x+y-1=0:$$

Օրինակ 2. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է (1, 2) կետով և զուգահեռ է $2x-3y+1=0$ *ուղղին։*

Տված ուղղի անկյունային գործակիցը՝ $k_1=\frac{2}{3}$։ *Որոնելի ուղիղը զուգահեռ է տված ուղղին, հետևաբար, նրա անկյունային գործակիցը՝* $k_2=k_1=\frac{2}{3}$։ *Այսպիսով, (14) հավասարման մեջ պետք է դնել՝* $k=\frac{2}{3}$, $x_1=1$, $y_1=2$, *որ կտա՝*

$$y-2=\frac{2}{3}(x-1),$$

որտեղից՝

$$3y-6=2(x-1), \text{ կամ՝ } 3y-6=2x-2$$

և վերջնականապես՝

$$2x-3y+4=0։$$

Օրինակ 3. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է (−1, 1) կետով և ուղղահայաց է $3x-y+2=0$ *ուղղին։*

Որոնելի ուղղի անկյունային գործակիցը նշանակենք k_1, *իսկ տված ուղղինը՝* k_2։ *Հավասարումից երևում է, որ* $k_2=3$, *իսկ ուղղահայացության* $k_1k_2=-1$ *պայմանը մեզ կտա՝*

$$3k_1=-1, \text{ որտեղից՝ } k_1=-\frac{1}{3}։$$

Այսպիսով, որոնելի հավասարումը կլինի՝

$$y-1=-\frac{1}{3}(x+1), \text{ կամ՝ } 3y-3=-x-1$$

և վերջնականապես՝

$$x+3y-2=0։$$

Օրինակ 4. Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է (2, −1) կետով և $5x-2y+3=0$ *ուղղի հետ կազմում է 45° անկյուն։*

Այն ուղղի անկյունային գործակիցը, որի հավասարումը պետք է կազմենք, գտնենք § 7-ի (9) բանաձևով։

Քանի որ խնդրի պայմանում չի ասված, թե ո՞ր ուղղից պետք է հաշվել անկյունը, ապա առաջադրված խնդիրը երկու լուծում ունի։

Առաջին լուծումն ստանալու համար (9) բանաձևում ընդունենք $k_1=\frac{5}{2}$ *(տված ուղղի համար),* $\theta=45°$, *իսկ* k_2*-ը կլինի որոնելի ուղղի անկյունային գործակիցը։ Այս դեպքում կունենանք՝*

$$1=\frac{k_2-\frac{5}{2}}{1+\frac{5}{2}k_2}, \text{ որտեղից՝ } k_2=-\frac{7}{3}$$

և որոնելի հավասարումը կլինի՝

$$y+1=-\frac{7}{3}(x-2),$$

որը պարզեցումներից հետո կդառնա՝

$$7x+3y-11=0։$$

Մյուս լուծումը կստանանք, եթե (9) բանաձևում ընդունենք $k_2=\frac{5}{2}$, $=45^\circ$ և գտնենք k_1-ը։ Այդ դեպքում կունենանք $k_1=\frac{3}{7}$ և որոնելի հավասարումը կլինի՝

$$y+1=\frac{3}{7}(x-2),$$

կամ՝

$$3x-7y-13=0։$$

Նկատենք հետևյալը. քանի որ գտած ուղիղներից յուրաքանչյուրը տըրված ուղղի հետ կազմում է 45° անկյուն, ուստի նրանք պետք է միմյանց ուղղահայաց լինեն։ Իրոք, այդ ուղիղների անկյունային գործակիցները հավասար են $-\frac{7}{3}$-ի և $\frac{3}{7}$-ի։

§ 10. Երկու ուղիղների փոխադարձ դիրքը հարթության վրա։

Եթե երկու ուղիղներ գտնվում են մի հարթության վրա, ապա նրանց փոխադարձ դասավորության երեք տարբեր դեպքեր են հնարավոր՝ 1) ուղիղները հատվում են (այսինքն՝ ունեն մեկ ընդհանուր կետ), 2) ուղիղները զուգահեռ են և չեն համընկնում, 3) ուղիղները համընկնում են։

Պարզենք, ինչպե՞ս իմանալ, թե այդ երեք դեպքերից ո՞րը տեղի ունի, եթե ուղիղները տված են իրենց հավասարումներով ընդհանուր տեսքով՝

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2=0։\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Եթե ուղիղները հատվում են, այսինքն՝ ընդհանուր կետ ունեն, ապա այդ կետի կոորդինատները պետք է բավարարեն (15)-ի երկու հավասարումներին էլ։ Հետևաբար, ուղիղների հատման կետի կոորդինատները գտնելու համար, պետք է նրանց հավասարումները համատեղ լուծել։ Այդ նպատակով, նախ արտաքսենք x անհայտը, որի համար առաջին հավասարումը բազմապատկենք A_2-ով, իսկ երկրորդը՝ A_1-ով և երկրորդ հավասարումից հանենք առաջինը։ Կստանանք՝

$$(A_1B_2-A_2B_1)y+C_2A_1-C_1A_2=0։ \qquad (15')$$

(15) հավասարումներից y անհայտն արտաքսելու համար առաջին հավասարումը բազմապատկենք B_2-ով, իսկ երկրորդը՝ B_1-ով և առաջինից հանենք երկրորդ հավասարումը: Կստանանք՝

$$(A_1B_2-A_2B_1)x+C_1B_2-C_2B_1=0: \qquad (15'')$$

Եթե $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$, ապա (15′) և (15″) հավասարումներից կըստանանք (15) սիստեմի լուծումը՝

$$x=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}, \qquad y=\frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}: \qquad (16)$$

(16) բանաձևերը տալիս են երկու ուղիղների հատման կետի x և y կոորդինատները:

Այսպիսով, եթե $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$, ապա ուղիղները հատվում են:

Եթե $A_1B_2-A_2B_1=0$, ապա (16) բանաձևերն իմաստ չունեն: Ինչպիսի՞ն են այդ դեպքում դասավորված ուղիղները: Հեշտ է տեսնել, որ այդ դեպքում ուղիղները զուգահեռ են: Իրոք A_1B_2- $-A_2B_1=0$ պայմանից բխում է, որ $-\frac{A_1}{B_1}=-\frac{A_2}{B_2}$, այսինքն՝ $k_1=k_2$: Իսկ եթե $B_1=B_2=0$, ապա ուղիղները զուգահեռ են Oy առանցքին և, հետևաբար, նաև միմյանց:

Այսպես, ուրեմն, եթե $A_1B_2-A_2B_1=0$, *ապա ուղիղները զուգահեռ են: Այդ պայմանը կարելի է գրել նաև այսպես՝*

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}:$$

Այս դեպքում կարելի է ասել, որ եթե ուղիղների հավասարումների մեջ ընթացիկ կոորդինատների համապատասխան գործակիցները համեմատական են, ապա ուղիղները զուգահեռ են:

Զուգահեռ ուղիղները, մասնավորապես, կարող են և համընկնել: Պարզենք, թե ո՞րն է ուղիղների համընկնելու անհրաժեշտ պայմանը: Դրա համար դիտարկենք (15′) և (15″) հավասարումները: Եթե այդ հավասարումների ազատ անդամները երկուսն էլ հավասար լինեն զրոյի, այսինքն՝ $C_2A_1-C_1A_2=0$ և $C_1B_2-C_2B_1=0$, ապա՝

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2},$$

այսինքն՝ (15) հավասարումներում համապատասխան անհայտների գործակիցները և ազատ անդամները համեմատական են: Այդպի-

սի դեպքում սիստեմի հավասարումներից մեկն ստացվում է մյուսից՝ նրա բոլոր անդամները բազմապատկելով մի ընդհանուր բազմապատկիչով, այսինքն՝ (15) հավասարումները համարժեք են։ Հետևաբար, տված զուգահեռ ուղիղները համընկնում են։

Իսկ եթե (15′) և (15″) հավասարումների ազատ անդամներից թեկուզ մեկը հավասար չլինի զրոյի (կամ՝ $C_2A_1-C_1A_2\neq0$, *կամ՝* $C_1B_2-C_2B_1\neq0$*), այսինքն՝*

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2},$$

ապա (15′) և (15″) հավասարումները, նշանակում է՝ նաև (15) հավասարումները, լուծումներ չեն ունենա [(15′) կամ (15″) հավասարումներից առնվազն մեկն անհնար կլինի]։ Այդ դեպքում զուգահեռ ուղիղները չեն համընկնի։

Այսպես, ուրեմն, **երկու ուղիղների համընկնելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանը՝ նրանց հավասարումներում համապատասխան գործակիցների համեմատականությունն է՝**

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}։$$

Օրինակ 1. Գտնել հետևյալ ուղիղների հատման կետը՝

$$2x-3y-1=0 \text{ և } 3x-y-2=0։$$

Հավասարումները համատեղ լուծենք. երկրորդը բազմապատկենք 3-ով՝

$$2x-3y-1=0, \quad 9x-3y-6=0,$$

երկրորդից հանենք առաջինը, կստանանք՝

$$7x-5=0, \text{ որտեղից՝ } x=\frac{5}{7}։$$

Այնուհետև, առաջին հավասարումը բազմապատկելով 3-ով, երկրորդը՝ 2-ով և երկրորդից հանելով առաջինը, կստանանք՝

$$7y-1=0, \text{ որտեղից՝ } y=\frac{1}{7}։$$

Այսպիսով, երկու տված ուղիղների հատման կետի կոորդինատները կլինեն՝

$$x=\frac{5}{7}, \quad y=\frac{1}{7}։$$

Օրինակ 2. Հետևյալ ուղիղները՝

$$2x-y+2=0 \text{ և } 4x-2y-1=0$$

զուգահեռ են (ընդհանուր կետ չունեն), որովհետև՝

$$\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{2}{-1}։$$

Հետևյալ երկու ուղիղները՝

$$3x+y-2=0 \text{ և } 6x+2y-4=0$$

համընկնում են, որովհետև՝

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}.$$

§ 11. Ուղիղների փնջի հավասարումը։ § *9-ում (դիտողություն) դիտարկեցինք այն ուղիղների փնջի հավասարումը, որի կենտրոնը տված* $A(x_1, y_1)$ *կետն է։ Երբեմն ուղիղների փնջի կենտրոնն անմիջականորեն չի տրվում, այլ որոշվում է փնջին պատկանող երկու ուղիղներով։ Այդպիսի դեպքում փնջի կենտրոնի կոորդինատները կարելի է գտնել տված ուղիղների հավասարումները համատեղ լուծելով։ Սակայն փնջի կենտրոնի կոորդինատները հաշվելուց կարելի է խուսափել, եթե օգտվենք ուղիղների փնջի հավասարման մի այլ ձևից։*

Դիցուք՝

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ և } A_2x+B_2y+C_2=0$$

ուղիղները հատվում են (x_1, y_1) *կետում։ Կազմենք հետևյալ հավասարումը՝*

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0, \qquad (17)$$

որտեղ λ*-ն կամայական պարամետր է։*

λ*-ի ամեն մի արժեքի դեպքում (17) հավասարումն ուղիղ գիծ է որոշում, քանի որ այն առաջին աստիճանի է* x *և* y *փոփոխականների նկատմամբ։ Հեշտ է ցույց տալ, որ այդ ուղիղն անցնում է* (x_1, y_1) *կետով։ Իրոք, քանի որ* (x_1, y_1) *կետը պատկանում է տված ուղիղներից յուրաքանչյուրին, ապա՝*

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1=0 \text{ և } A_2x_1+B_2y_1+C_2=0,$$

որտեղից նաև՝

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1+\lambda(A_2x_1+B_2y_1+C_2)=0։$$

Հետևաբար, տված երկու ուղիղների հատման կետի կոորդինատները բավարարում են (17) հավասարմանը։

Այսպիսով, (17) հավասարումը λ*-ի տարբեր արժեքների դեպքում որոշում է տարբեր ուղիղներ, որոնք պատկանում են* (x_1, y_1) *կենտրոնն ունեցող փնջին։*

Մնում է պարզել, թե արդյոք կարելի՞ է (17) հավասարումից λ*-ի համար ընտրությամբ ստանալ փնջի ցանկացած ուղիղի հավասարումը։*

Դիցուք (α, β)-ն հարթության վրա կամայական կետ է՝ (x_1, y_1)-ից տարբեր։ (17) հավասարումով որոշվող ուղիղը այդ կետով կանցնի, եթե նրա կոորդինատները բավարարեն (17) հավասարմանը, այսինքն՝ եթե

$$A_1\alpha+B_1\beta+C_1+\lambda(A_2\alpha+B_2\beta+C_2)=0\text{։}$$

Այստեղից հետևում է, որ երբ

$$\lambda=-\frac{A_1\alpha+B_1\beta+C_1}{A_2\alpha+B_2\beta+C_2},$$

ապա (17) հավասարումը կպատկերի փնջի այն ուղիղը, որն անցնում է հարթության կամայապես ընտրած (α, β) կետով։

λ պարամետրը չի կարելի հարմար կերպով ընտրել միայն այն դեպքում, երբ (α, β) կետը գտնվի $A_2x+B_2y+C_2=0$ ուղղի վրա (այդպիսի դեպքում λ-ն որոշող բանաձևն իմաստը կորցնում է)։ Հետևաբար, (17) հավասարումը λ-ի տարբեր արժեքների դեպքում կորոշի փնջի բոլոր ուղիղները, բացի մեկից (տված ուղիղներից՝ երկրորդը)։ Իսկ այս վերջին հավասարումն էլ, ակներևորեն, կստացվի հետևյալ հավասարումից՝

$$\mu(A_1x+B_1y+C_1)+A_2x+B_2y+C_2=0,$$

$\mu=0$ դեպքում։

(17) տեսքի հավասարումն անվանում են ուղիղների փնջի հավասարում։

Օրինակ։ Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է

$$2x-3y-1=0 \text{ և } 3x-y-2=0$$

ուղիղների հատման կետով և ուղղահայաց է $y=x$ ուղղին։

Առաջին եղանակ։ $2x-3y-1=0$ և $3x-y-2=0$ հավասարումները համատեղ լուծելով, գտնում ենք ուղիղների հատման կետի կոորդինատները (տե՛ս § 10, օրինակ 1)՝

$$x=\frac{5}{7},\quad y=\frac{1}{7}\text{։}$$

Ուղիղների ուղղահայացության պայմանից կգտնենք որոնելի ուղղի անկյունային գործակիցը՝ $k=-1$։ Հետևաբար, որոնելի հավասարումը կլինի՝

$$y-\frac{1}{7}=-1\left(x-\frac{5}{7}\right),$$

որն աստիճանաբար պարզեցնելով, կստանանք՝

$$y-\frac{1}{7}=-x+\frac{5}{7},\ \text{կամ՝}\ 7y-1=-7x+5,$$